Versão Online ISBN 978-85-8015-037-7
Cadernos PDE

VOLUME I

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2007

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

Universidade
Estadual de Londrina

PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL – SEED/PR

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E OS SONS MUSICAIS

SUELI DA SILVA ROSSI

LONDRINA
DEZEMBRO / 2008

SUELI DA SILVA ROSSI

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E OS SONS MUSICAIS

Artigo Final apresentado como trabalho de conclusão do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE.
Orientação: Prof. Ms Luciana Gastadi Sardinha Souza.

LONDRINA
DEZEMBRO / 2008

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E OS SONS MUSICAIS

Sueli da Silva Rossi
Orientação: Luciana Gastaldi Sardinha Souza

RESUMO: Este artigo se inicia com um breve histórico sobre a necessidade de se criar um relógio preciso. Em seguida, estuda o movimento harmônico simples com o objetivo de entender a comparação entre o movimento de um peso suspenso por uma mola e o movimento de um ponto P percorrendo uma circunferência, para que desse modo obtenha-se a função seno. Posteriormente é feita uma comparação com a corda vibrante, buscando proporcionar um entendimento sobre as relações existentes entre os sons musicais e as funções trigonométricas.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas, Matemática, Música, Pitágoras, Som.

ABSTRACT: This article begins with a brief history about the need to create a precise clock. It then studies the simple harmonic motion in order to understand the comparison between the movement of a weight suspended by a spring and the movement of a point P traversing a circle, so to get to the sine function. Later a comparison is made with vibrant string, trying to provide an understanding of the relationships between the musical sounds and trigonometric functions.

Keywords: Trigonometric functions, Mathematics, Music, Pythagoras, Sound.

I. INTRODUÇÃO

Até o século XV, a Música era considerada uma ciência Matemática, que juntamente com a Aritmética, Geometria e a Astronomia compunham o Quadrivium.

A relação entre a Matemática e a Música é bastante antiga, mas se evidencia cientificamente com os experimentos de Pitágoras (séc VI a.C.), que conseguiu organizar os sons em uma escala musical por meio de seus experimentos com um monocórdio, partindo das divisões de uma corda.

Posteriormente, outros matemáticos também realizaram suas pesquisas, estabelecendo uma série de relações entre estas duas ciências, por exemplo: Arquitas de Tarento, foi o primeiro a caracterizar o fenômeno sonoro como resultado de pulsações de ar que produziam sons mais agudos à medida que se tornavam mais rápidas, prenunciando a relação de freqüência com altura musical, formalizada em 1638 por Galileu; Mersenne deduziu a fórmula que expressa a freqüência de vibração da corda em função de seu comprimento, densidade linear e sua tensão;

Brook Taylor foi o primeiro a calcular o período fundamental de uma corda vibrante; Johan Bernoulli, que estabeleceu a primeira análise de configuração de uma pequena deformação da corda vibrante com um peso. Dentre outros, também destacamos a descoberta do matemático francês Jean Baptiste Fourier, que provou que uma onda qualquer é formada pela somatória de várias outras de formato senoidal.

Para compreendermos um pouco estas relações, este trabalho se apresenta no seguinte formato: no item II há um pequeno histórico sobre a medida do tempo e a necessidade da construção de um relógio preciso. No item III há o detalhamento do movimento de um peso atado a uma mola, e a Lei de Hooke. No item IV compara-se o movimento anterior ao de um ponto P percorrendo uma circunferência, obtendo-se desse modo, a função seno. No item V explica-se a função seno radiano e os conceitos de amplitude, freqüência e período, que posteriormente são relacionados com o som, no item VI: altura musical com freqüência, intensidade musical com amplitude.

II. A BUSCA DA MEDIDA DO TEMPO

Durante o século XVII, período das grandes navegações, a maior preocupação era a medida do tempo, e para resolver esse problema, a solução encontrada foi construir um relógio confiável e preciso, pois até então, não existia um relógio deste tipo.

A idéia do relógio surgiu desde o início da humanidade. Com a constante procura por divisões de tempo mais ágeis, a medição do tempo passou a ter importância no controle das tarefas e competições. O primeiro relógio foi uma simples vara fincada no chão, cuja sombra se deslocava ao comando do sol, não marcando as horas, apenas dividindo o dia, por volta do ano 600 a.C., na Judéia. Era extremamente impreciso, e também não funcionava durante a noite ou em dias nublados.

Com a necessidade de medidas mais seguras, surgiram a clepsidra (relógio de água) e a ampulheta (a base de areia) que tinham o mesmo princípio: intervalos constantes para escoar uma substância de um local para outro, através de um orifício. O maior problema do relógio de água ocorria quando fazia muito frio e a água ficava congelada.

Fig. 01 - Clepsidra
fonte: http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/curioso/cap03/cap3framebaixo.php - Acesso em 23/11/2008

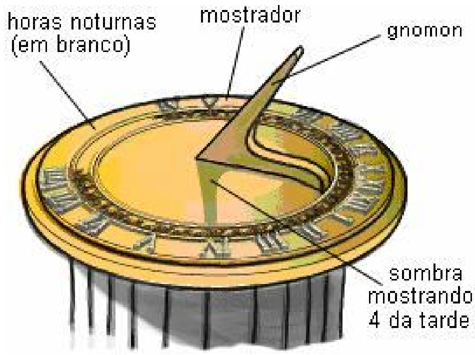

Fig. 02 – Relógio de Sol
fonte: http://www.ucs.br/ccet/defq/naeq/material_didatico/textos_interativos_21.htm - Acesso em 23/11/2008

A divisão do dia em horas só ocorreu quando Galileu Galilei definiu as regras do movimento pendular e sua regularidade, idéia que foi aproveitada pelo holandês Christian Huygens para fabricar o primeiro relógio de pêndulo. A aplicação do pêndulo nos relógios fez reduzir o erro diário de 15 minutos para cerca de 10 segundos.

Por longos séculos, medir o tempo com precisão foi um desafio. E quando os pêndulos pareciam ter resolvido o problema, novos desafios surgiram. Considerando então uma época de navegação imprecisa, como medir o tempo a bordo dos navios, onde o movimento pendular era comprometido com o balanço dos navios?

Filipe III da Espanha e Filipe II de Portugal, assim como Luis XIV, da França, ofereceram verdadeiras fortunas a quem apresentasse uma fórmula de medir o tempo com exatidão a bordo dos navios. Com o relógio, poderiam também saber, com exatidão, a longitude de um barco em alto mar. Por exemplo, suponhamos que se conheça a longitude de uma determinada localidade da Terra e que um barco leve a bordo um relógio que marca as horas desta localidade. Como a Terra gira 360º em um dia, em uma hora gira 15º. Daí, a cada 15º que um barco se desloca à oeste de uma localidade, o relógio estará marcando uma hora a mais do que a hora daquela nova localidade. Se o piloto do barco observa, por meio da posição do sol, o momento em que ocorre o meio-dia (quando o sol estiver em cima de sua cabeça), e se, em tal momento, o relógio marca 3 horas, quando deveria marcar 12 horas, saberá neste instante que a longitude de sua posição é 3 vezes 15º, ou seja, 45º a oeste da localidade de origem.

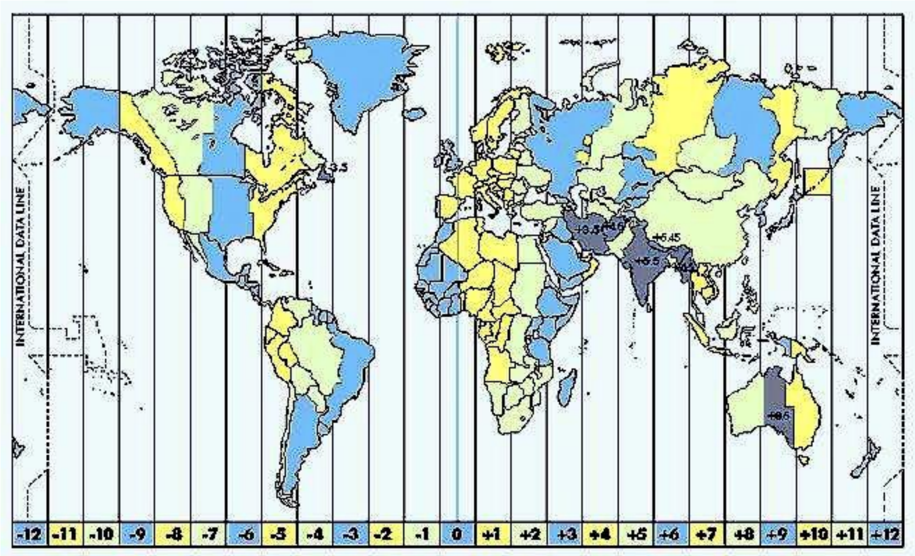

Fig. 03 - Mapa Mundi
Fonte:http://www.tourhouse.com.br/new/images/mapamundi.gif – Acesso em 24/11/2008

Então, para construir o relógio preciso, a idéia que surgiu foi a de buscar algum fenômeno físico que se repetisse regularmente. Os fenômenos escolhidos foram o de um peso atado a uma mola e o de um pêndulo, visto que, desprezando-se a resistência do ar, estes movimentos permaneceriam periódicos[1].

O pêndulo foi descartado porque não funcionava adequadamente com o balanço dos navios.

III. O MOVIMENTO DE UM PESO SUSPENSO A UMA MOLA E A SENÓIDE

Um dos movimentos oscilatórios mais simples de se entender, é o Movimento Harmônico Simples (M. H. S). Muitos comportamentos oscilatórios surgem a partir da existência de forças restauradoras, basicamente do tipo elásticas, que tendem a manter os sistemas em certos estados ou posições, obedecendo assim, a **Lei de Hooke**.

[1] Chamamos de movimento periódico a todo movimento que se repete em intervalos iguais.

Robert Hooke (1635 – 1703), professor de Matemática no Gresham College, estava bastante interessado em construir um relógio e acreditava que a natureza do mecanismo consistiria em molas. Enquanto estudava este movimento da mola, ele descobriu que há uma proporcionalidade direta entre a intensidade da força que atua num corpo e a deformação que ela provoca.

Para exemplificar, partiremos de um sistema massa-mola, que consiste de uma massa de valor m, presa por uma das extremidades de uma certa mola de fator de restauração k, cuja outra extremidade está ligada a um ponto fixo e um ponto de equilíbrio, que chamaremos de ponto O.

Deste modo, toda vez que tentarmos tirar o nosso sistema do ponto de equilíbrio 0, surgirá uma força que tentará trazê-lo de volta a situação inicial. Assim, ao empurrarmos o bloco para cima da posição 0, uma força de sentido contrário e proporcional ao deslocamento y surgirá tentando manter o bloco na posição de equilíbrio 0.

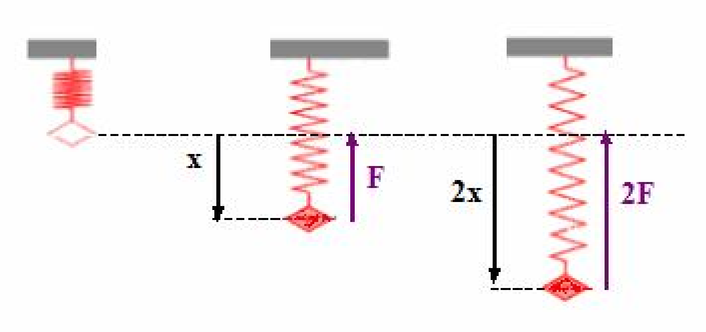

Fig. 04 – Sistema Massa-Mola - Lei de Hooke

A intensidade da força elástica (F) é proporcional à deformação (x), que pode ser traduzida pela expressão:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

O sinal negativo significa que o vetor força elástica (F) atua no sentido contrário ao vetor deformação (x).

$$F(x) = -kx$$

Passando o segundo termo para o primeiro membro temos:

F (x) + kx = 0

Aplicando a 1ª. Lei de Newton, sabemos que F(x) = ma(x):

ma(x) + kx = 0

Podemos perceber também que x = x(t), pois a posição de x varia de acordo com o tempo enquanto o nosso sistema oscila, ficando a nossa equação:

ma(x(t)) + kx(t) = 0

como

$a(x(t)) = \frac{d^2x(t)}{d^2t}$, temos que

$$\frac{m(d^2x(t))}{d^2t} + kx(t) = 0$$

Esta é uma Equação Diferencial de segunda ordem, cuja solução é encontrada, em termos da sua equação característica, substituindo-se:

$x''(t), x'(t) \quad e \quad x(t)$ por $\lambda^2, \lambda \quad e \quad \lambda^0 = 1,$ respectivamente.

A solução representa a função de movimento de nosso sistema massa-mola.

$$m.x''(t) + K.x(t) = 0$$
$$m\lambda^2 + k = 0$$, logo
$$\lambda^2 = \frac{-k}{m}$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

temos duas raízes complexas

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{\dfrac{k}{m}}i \\ \lambda_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}i \end{cases}$$

cuja solução geral é $x(t) = A.e^{(a+ib)t} + B.e^{(a-ib)t}$

Utilizando as relações de Euler

$$e^{ibt} = \cos bt \quad + \quad i\,\text{sen}\, bt \qquad e^{-ibt} = \cos bt \quad - \quad i\,\text{sen}\, bt$$

temos

$$x(t) = A.e^{\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}i\right)t} + B.e^{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}i\right)t}$$

$$x(t) = A.\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t - i.\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right) + B.\left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t + i\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t\right)$$

$$x(t) = A.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t - A.i\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t + B.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t + B.i\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t$$

$$x(t) = (A+B).\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t \quad + \quad i.(A-B).\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t$$

$$\begin{aligned} (A+B) &= C \\ i.(A-B) &= D \end{aligned},$$

$$x(t) = C.\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t \quad + \quad D.\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)t$$

Considerando a constante (velocidade angular) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (ver anexo 1), a equação do movimento fica:

$$\boxed{x(t) = C.\cos \omega.t \quad + \quad D.\text{sen}\, \omega t}$$

IV. O MOVIMENTO OSCILATÓRIO E O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Suponhamos que um ponto P se mova em torno de uma circunferência de raio unitário a uma velocidade constante. Chamemos algumas de suas posições de P_1, P_2, P_3,... Na representação poderemos colocar um ponto Q na reta vertical que passa pelo centro O, tal que Q esteja sempre na mesma altura que P acima ou abaixo da horizontal que passa por O. Ao ponto Q denominamos projeção de P sobre a reta vertical. Assim, a posição P_1 de P corresponde a Q_1; P_2 corresponde a Q_2 e assim sucessivamente.

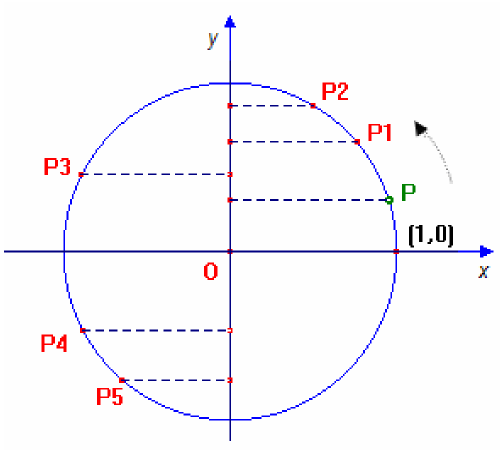

Fig. 05. Movimento de um Ponto P

Digamos que P, partindo do ponto (1,0) em sentido anti-horário, dê uma volta ao redor da circunferência. Ao observarmos o movimento deste ponto e sua projeção, notamos que a ordenada de P se move até alcançar a sua posição mais elevada, volta para o ponto 0, passa ponto mínimo e retorna ao ponto 0. É um movimento semelhante ao movimento da mola.

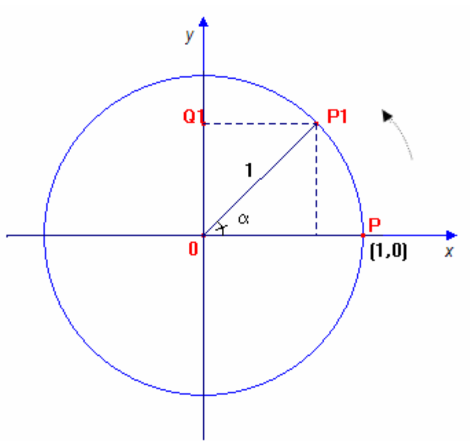

Fig. 06. Movimento de P_1

Introduzindo os eixos de coordenadas

Se P parte do eixo x e alcança, por exemplo, a posição P_1, então a posição de P pode ser dada pelo ângulo α. A altura de Q acima do eixo x é a mesma que o valor y de P. Assim,

$$sen\alpha = \frac{y}{1}, \quad \text{portanto}$$

$$y = sen\alpha$$

A posição do ponto Q será dada pela função: $y = sen\alpha$. Quando α é um ângulo agudo, sen α tem o seu significado antigo: é a razão entre o lado oposto e a hipotenusa do triângulo retângulo.

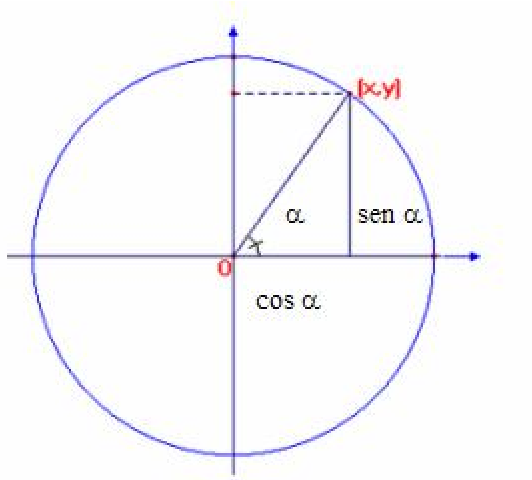

Fig. 07. A Função Seno

Porém, quando o ângulo ultrapassa 90°, a equação $y = sen\alpha$ representa a função real $y : \Re \to \Re$, y = sen α.

Para explicarmos este fenômeno, faz-se necessário o uso de uma variável contínua, pois este fenômeno depende do tempo. Assim, teremos que usar uma nova unidade, o **radiano**. Radiano é um ângulo central cujo arco que lhe corresponde possui um comprimento igual ao raio da circunferência.

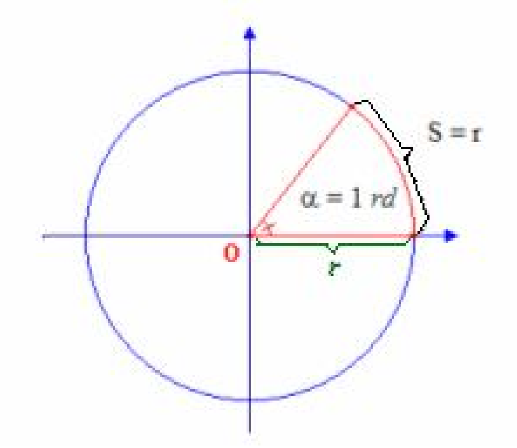

Fig. 08. Seno Radiano

S = comprimento do arco

R = raio da circunferência

1 rd ≅ 57,3°

V. FUNÇÃO SENO RADIANO

Dado um número x ∈ ℜ, efetua-se sobre a circunferência, a partir de A = (1,0) um percurso de comprimento |x| (no sentido horário, se x < 0 e no sentido anti-horário se x >0). Seja P o ponto de chegada, temos:

$$sen^{rad}\, x = ordenada \quad de \quad P$$

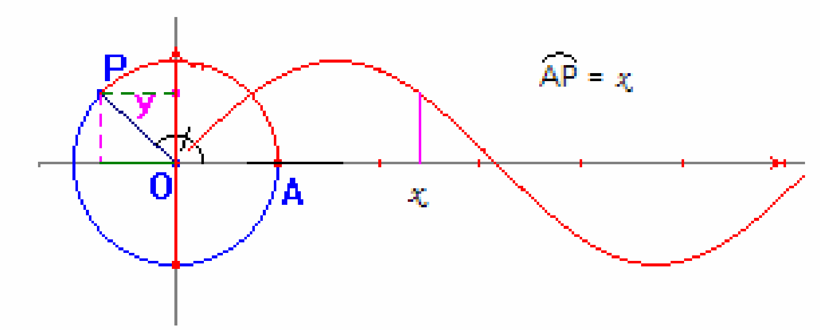

Fig. 09. Senóide

A função $y = sen\alpha$ tem um valor máximo de y = 1 e um valor mínimo y = -1. Ao valor do deslocamento máximo da posição de repouso, damos o nome de **Amplitude** da função.

Para tanto, significa que se tivéssemos uma função determinada por $y = 2.sen\alpha$, diríamos que sua amplitude seria 2. Assim, para qualquer valor de α, a função $y = 2.sen\alpha$, representa 2 vezes o seno de α, que se evidencia pela função:

$$y = A.sen\alpha$$

A = amplitude.

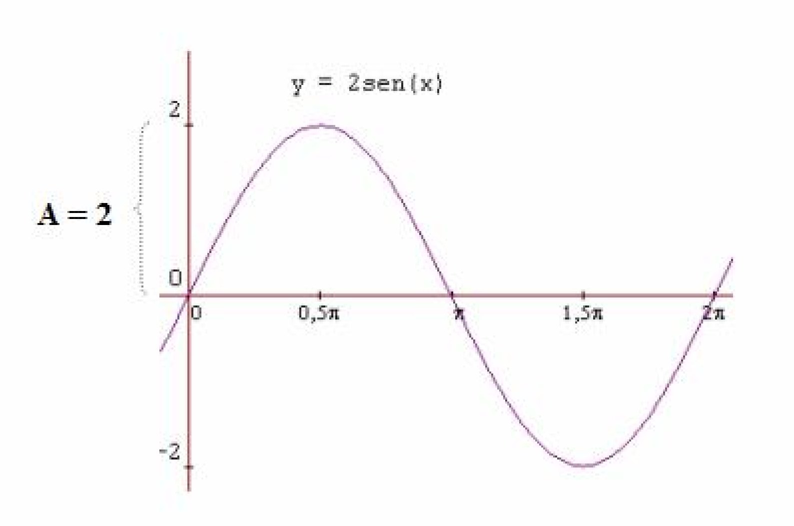

Fig. 10. Representação gráfica de y = 2.sen(x)

Antes de utilizarmos a função seno para representar o movimento de um peso atado a uma mola, deveremos eliminar uma outra dificuldade, pois a função que buscamos deverá representar uma relação entre o **deslocamento e o tempo**. Os valores de nossas funções, *y = sen*α ou *y = 2.sen*α representam o deslocamento de um ponto Q que se move para cima e para baixo sobre uma reta, mas a variável independente é um ângulo.

Suponhamos que um ponto P gaste 1s para dar uma volta completa em uma circunferência:

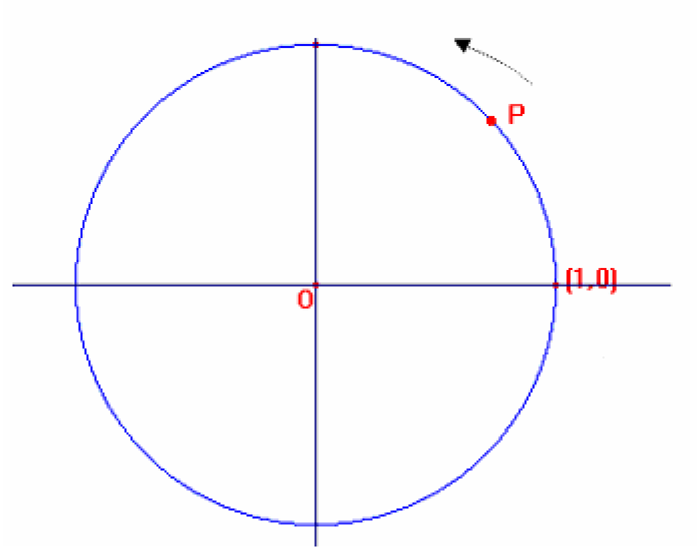

Fig. 11. Movimento de P

A) O ponto P executa 1 revolução por segundo

1s $\rightarrow$ percorrerá 2π radianos

t s $\rightarrow$ percorrerá x radianos

$$x = 2\pi t$$

Portanto, o valor de x em t segundos será 2π t.

Assim, a função y = sen x será representada por: $y = \text{sen } 2\pi t$

Graficamente teremos:

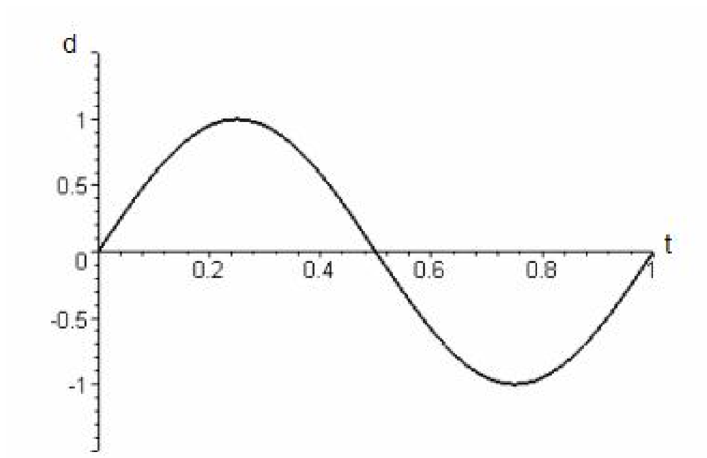

Fig. 12. Representação gráfica de $y = \text{sen } 2\pi t$

Enquanto o tempo (t) varia de 0 a 1 segundo, o ângulo α varia de 0 a 2π, ou seja, o ponto P completou um ciclo em um segundo, ou 1 ciclo por segundo (1/s = $1s^{-1}$). A este número de ciclos que um corpo apresenta no espaço de um segundo, chamamos de ***freqüência***, no qual 1 ciclo por segundo ($1s^{-1}$) é igual a 1 hz (hertz).

O tempo gasto pelo ponto P para completar um ciclo denomina-se ***período***, e é medido geralmente, em segundos. Nesse caso, o período é de 1 segundo.

B) O ponto P executa 2 revoluções por segundo

$$1s \rightarrow \text{percorrerá } 2.\ 2\pi \text{ radianos}$$

$$t\ s \rightarrow \text{percorrerá } x \text{ radianos}$$

$$x = 2.2\pi\ t$$

Portanto, o valor de x em t segundos será 4π t.

Assim, a função y = sen x será representada por:

$$y = \text{sen } 4\ \pi\ t$$

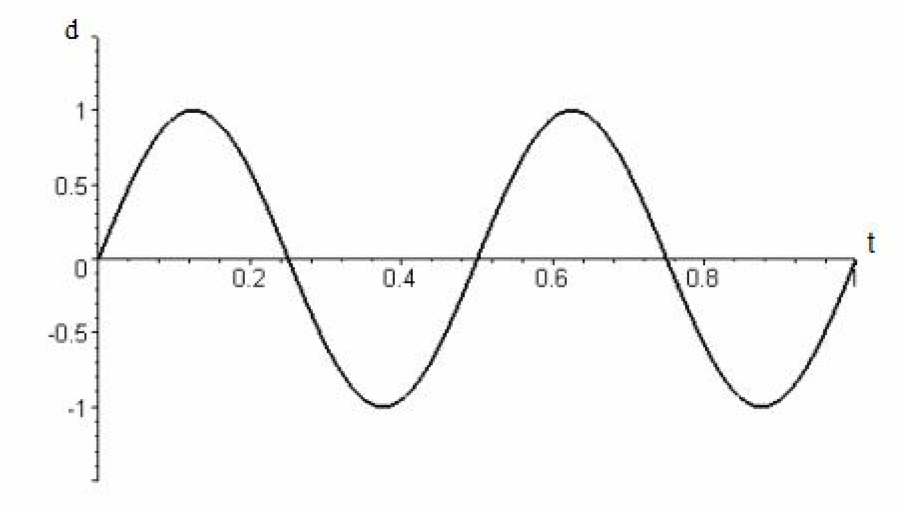

Fig. 13. Representação gráfica de $y = \text{sen } 4\ \pi\ t$

Ou

$$y = \text{sen } 4\pi\ t$$

$$y = \text{sen } 2\pi\ .2t$$

Neste caso, y passou por dois ciclos completos em um segundo, portanto, a freqüência é de dois ciclos por segundo (2 hz), "completando" o processo em uma volta, e o seu período equivale à metade, ou seja, 0,5 s.

2 ciclos completos em $\longrightarrow$ 1s
1 ciclo $\longrightarrow$ 0,5 s

C) P executa 3 revoluções por segundo. Analogamente teremos:

1s $\rightarrow$ percorrerá 3. 2π radianos
t s $\rightarrow$ percorrerá x radianos

$$x = 3.2\pi\ t$$

Portanto, o valor de x em t segundos será 6π t. Assim, a função y = sen x será representada por: $y = \text{sen } 6\ \pi\ t$

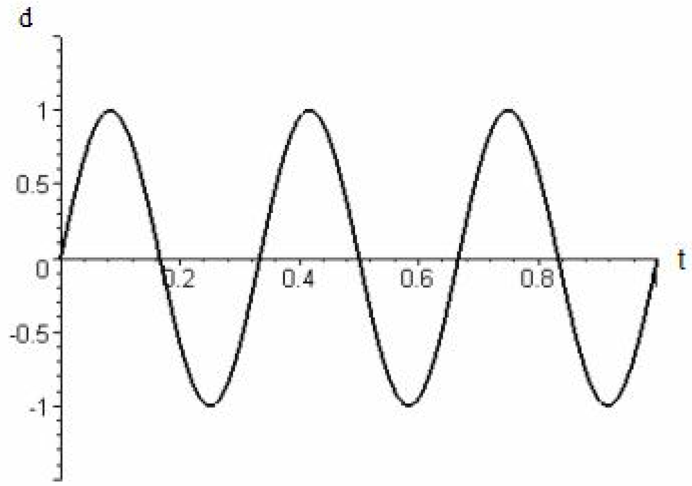

Fig. 14. Representação gráfica de $y = \text{sen } 6\ \pi\ t$

$$y = \text{sen}.6\pi.t$$

$$y = \text{sen}.2\pi.3.t$$

Foram completados 3 ciclos em 1 segundo, portanto, a freqüência foi de 3 hz, e o período equivalente a 1/3 de segundo, ou 0,3333... s.

Concluímos que se um ponto P percorrer uma circunferência f vezes em um segundo, teremos que a função y = sen x poderá ser representa por:

$$y = sen.2\pi.f.t \;\; \rightarrow \text{ f revoluções em 1s}$$

Para aumentarmos a amplitude desta função, basta aumentarmos o fator A, assim teremos:

$$\boxed{\mathbf{y = A.\ sen\ 2\pi.f.t}}$$

A = amplitude (raio do ciclo)
f = número de revoluções por segundo (freqüência)
t = tempo.

Quando observamos este mesmo tipo de movimento oscilatório (peso atado a uma mola) em um corpo deformável, como uma corda, verificamos a produção de som.

Mas, como o som é produzido?

VI. O SOM

Poderíamos definir som como sendo o resultado de oscilações muito rápidas que ocorrem na natureza. Desta forma, as notas musicais poderiam se definir como sendo variações da freqüência dessas oscilações. Na Física, definimos o som como uma onda longitudinal, que se propaga em um meio material (sólido, líquido ou gasoso), cuja freqüência está compreendida, aproximadamente, entre 20 hertz e 20.000 hertz.

Se quisermos ouvir o som de uma corda, deveremos pinçá-la e esta sairá de sua posição de equilíbrio realizando movimentos vibratórios, em um certo espaço de tempo.

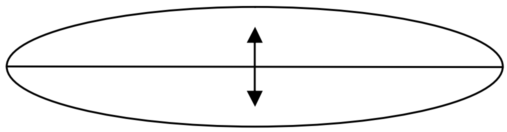

Fig. 15. Oscilação

Este movimento vibratório é análogo ao da mola anteriormente estudado.

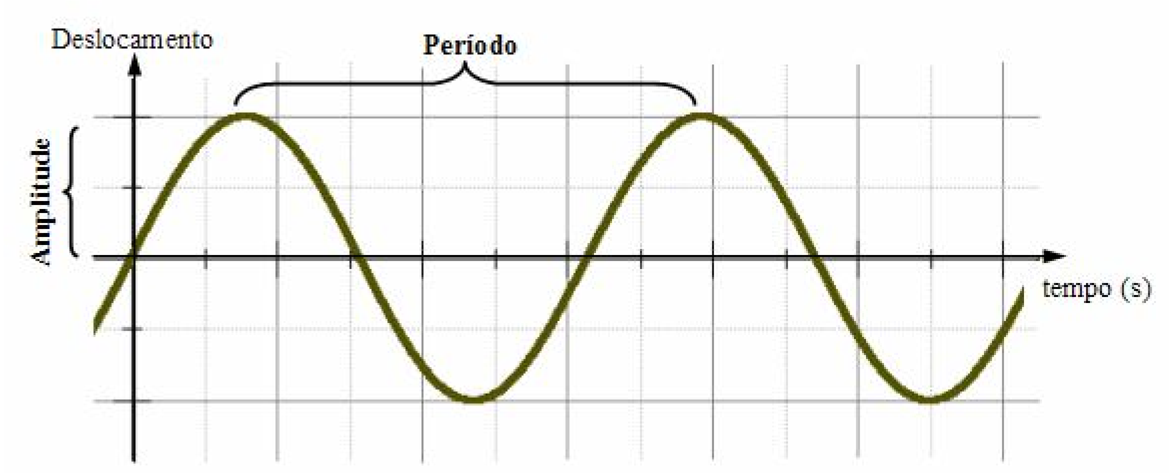

Fig. 16. Amplitude, Freqüência e Período

- A **amplitude** da onda equivale à propriedade do som de ser forte ou fraco, ou seja, a Intensidade.
- A **freqüência** equivale à altura da nota. Sendo assim, se executássemos 261 pulsos em um segundo obteríamos a nota Dó.
- O **período** é o tempo compreendido entre estados iguais de vibração.

Pitágoras realizou vários experimentos com um monocórdio. Em uma experiência ele dividiu uma corda ao meio, e verificou que esta corda tinha o dobro de vibrações, ou seja, considerando que a corda inteira vibrava 15 pulsos, metade da corda vibrou 30, e o período da função reduziu à metade.

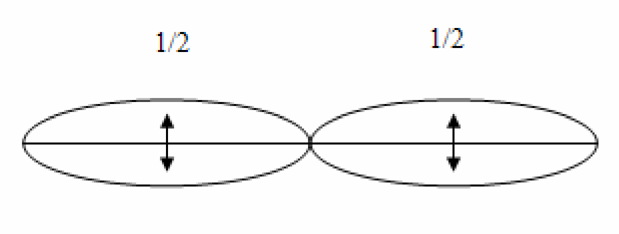

Fig. 17. Vibração da corda pressionada na metade

Representando por meio de um gráfico, teremos:

- $y_1 = \text{sen}\, 30\pi..t \quad \rightarrow \quad y_1 = \text{sen}\, 2\pi.15.t$

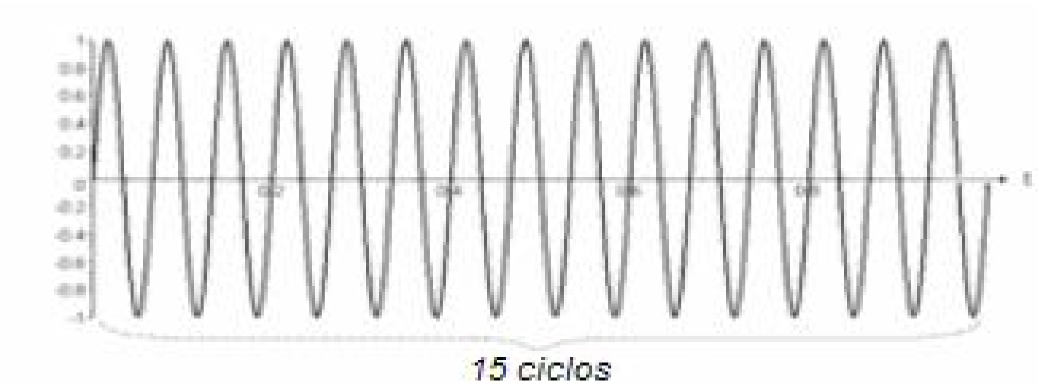

Fig. 18. Representação gráfica de y = sen 30π.t

Amplitude = 1

Período = 1/15 segundos (0,0666 s)

Freqüência = 15 hz (15 s^{-1})

- $y_2 = \text{sen}\,60\pi.t \qquad \rightarrow \qquad y_2 = sen 2\pi.2.15.t$

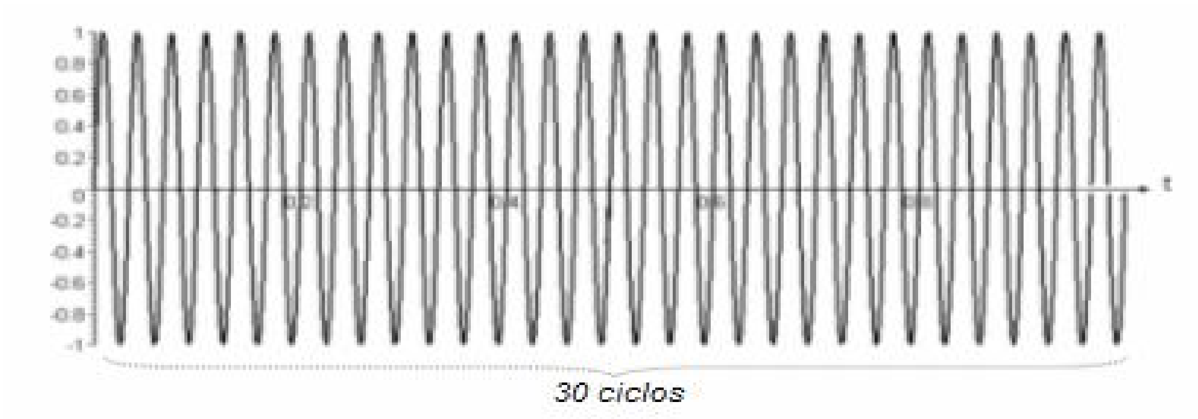

Fig. 19. Representação gráfica de y = sen 60π.t

Amplitude = 1

Período = 1/30 segundos (0,033 s)

Freqüência = 30 hz (30 s^{-1})

Portanto, y_2 tem o dobro das vibrações de y_1. O som obtido (y_2) soa uma oitava acima.

Concluímos que, quanto maior o número de vibrações, mais agudo é o som. Por exemplo, ao compararmos as funções $y = \text{sen}\,2\pi.t$ e $y = \text{sen}\,6\pi.t$, temos que a segunda representa um som mais agudo que a primeira, visto que o número de vibrações é maior, ou seja, enquanto a primeira tem a freqüência de 1 hertz, a segunda tem a freqüência de 3 hertz.

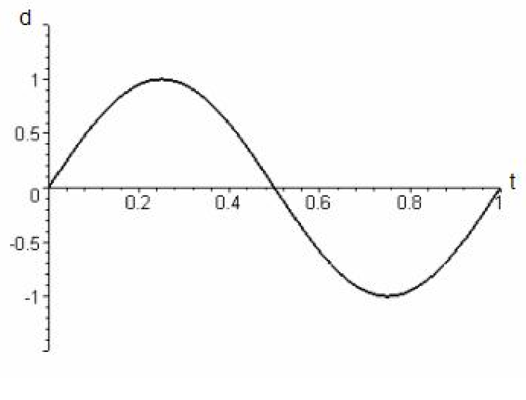

Fig. 20. $y = \text{sen}\,2\pi.t$

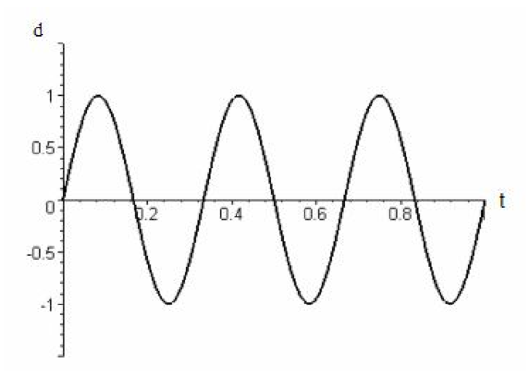

Fig. 21. $y = \text{sen}\,6\pi.t$

Também poderemos comparar a amplitude, uma vez que quanto maior a amplitude, mais forte é o som. Por exemplo, uma função definida por $y = 5.\text{sen}10\pi\, t$ representa um som mais forte do que o som representado pela função $y = 2sen10\pi\, t$, porque a amplitude da primeira vale 5 e a segunda vale 2.

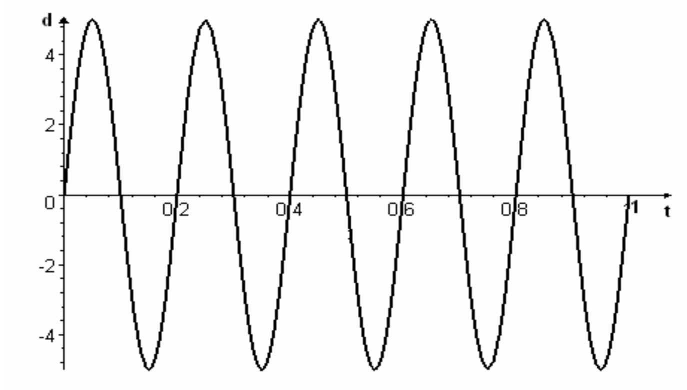

Fig. 22. y = 5 sen 10 π t

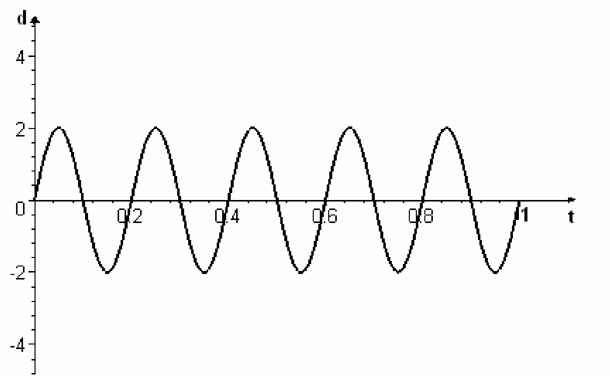

Fig. 23. y = 2 sen 20 π t

VII. CONCLUSÃO

Por meio deste estudo foi possível estabelecer algumas relações entre a Matemática e a Música, em especial, com as funções trigonométricas.

Um dos resultados deste estudo foi o material “A Senóide e os Sons Musicais”, que foi trabalhado com alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual São José, Londrina – PR. Este material se mostrou eficiente na construção de gráficos de funções trigonométricas, tanto na relação entre som e função, quanto na construção significativa dos conceitos como amplitude, freqüência e período.

Esperamos que este trabalho seja um pontapé inicial para mais projetos interdisciplinares entre a Matemática e a Música, uma vez que o ensino da Música será obrigatório nas escolas. Tais estudos se fazem necessários assim como a produção de materiais que auxiliem os professores no estudo da ligação entre estas duas ciências.

VIII. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABDOUNUR, J. O. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados.** 3ª Ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

BRONSON, R. **Moderna Introdução às Equações Diferencias – Coleção Schaum**; tradução de Alfredo Alves de Farias, revisão técnica Roberto Romário. São Paulo, MacGraw-Hill do Brasil, 1977.

KLINE, M. **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. México: Addison – Wesley Publishing Company, 1992.

LUCCAS, S. **Matemática e Música a harmonia perfeita**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 1996.

MARTINS, N. S. M. **Movimentando gráficos de funções**. Monografia. (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 2001.

MÁXIMO, A. ALVARENGA, B. **Curso de Física – Vol 2**. 2ª Ed. São Paulo: Scipione, 1997.

NEVILLE, H. & FLETCHER, T.D.R. **The Physics of Musical Instruments**. Second Edition. Ed. Springer, 1998.

ANEXO 01

Sempre que observamos um corpo em MHS (Movimento Harmônico Simples), podemos imaginá-lo como projeção de um MCU (Movimento Circular Uniforme).

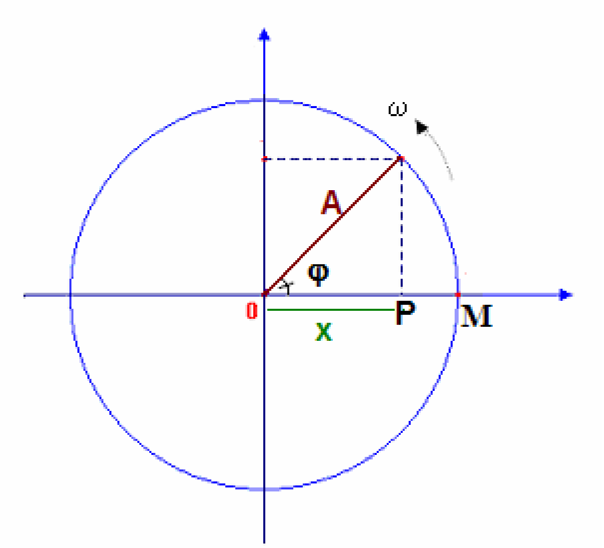

Fig. 24 – Movimento Harmônico Simples

A = elongação[2] máxima do corpo

M = ponto correspondente a elongação máxima

P = ponto correspondente à projeção

x = elongação de P.

φ = ângulo de fase.

$$E_{mec}^{p} = E_{mec}^{m}$$

$$E_c^p + E_p^p = E_c^m + E_p^m$$

$$\frac{1}{2}.mv^2 + \frac{1}{2}.kx^2 = 0 + \frac{1}{2}kA^2$$

$$mv^2 = k.A^2 - k.x^2$$

$$v^2 = \frac{k.(A^2 - x^2)}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}.(A^2 - x^2)}$$

$E_{mec}^{p} = Energia\ mecância\ no\ ponto\ P.$

$E_{mec}^{m} = Energia\ mecância\ no\ ponto\ M$

$E_c = Energia\ cinética.$

$E_p = Energia\ potencial.$

[2] Elongação = Posição x do corpo.

Quando x = 0 (ponto de equilíbrio), a velocidade é máxima.

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}.(A^2 - 0^2)}$$

$$v = A.\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (1)}$$

Como $v = \omega.R$, então

$$v_{\max} = \omega.A \text{ (2)}$$

Comparando-se (1) e (2)

$$A.\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega.A$$

temos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω = velocidade angular (MCU) ou pulsação (MHS).