Versão Online ISBN 978-85-8015-037-7
Cadernos PDE

VOLUME I

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2007

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCAÇÃO – SEED
SUPERINTENDÊNCIA DA EDUCAÇÃO – SUED
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL - PDE

TEREZINHA YOSHIKO TAKAKI

ARTIGO FINAL:
"ÁLGEBRA DO ENSINO MÉDIO, QUANDO USAMOS?"

IES: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA – UEL
ORIENTADORA: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
ÁREA CURRICULAR: MATEMÁTICA

LONDRINA – PR. – 2008

“Álgebra do Ensino Médio, Quando Usamos?”

Terezinha Yoshiko Takaki

Licenciada em Matemática e Especialista em Matemática Superior pela Universidade Estadual de Londrina. Professora pertencente ao Quadro Próprio do Magistério do Estado do Paraná desde 1996, na disciplina de Matemática. Atua como docente no Colégio Estadual “Professor Vicente Rijo” e no Colégio Estadual “Hugo Simas”, em Londrina.

Resumo

Quando se tem um objetivo a atingir, o caminho a ser percorrido, mesmo árduo e desafiador, passa a ter significado fazendo com que se procure, de alguma maneira, vencer os obstáculos para atingir a meta. Desse modo, para que se perceba como o conhecimento matemático é importante e abrangente, desperte maior interesse e o que se estuda seja assimilado, procura-se mostrar através dos problemas de aplicação o uso de alguma matemática apresentada no Ensino Médio em várias áreas de atuação. Utilizando da metodologia da Resolução de Problemas, exploram-se os conhecimentos já adquiridos para aprender a interpretar melhor, compreender as situações propostas e aprimorar-se preparando para novos desafios. Assim, ao encontrar significado no aprendizado sua motivação fará com que descubra sua capacidade de análise e reflexão tornando-se participante na construção do conhecimento, capacitando-se para reconhecer e relacionar a presença da matemática escolar no seu cotidiano e também na profissão que futuramente possa exercer.

Palavras chave

Matemática. Ensino Médio. Problemas de Aplicação. Resolução de Problemas.

Abstract

When you have a goal to be achieved, the road to be traveled, even hard and challenging it will be meaningful so that they try, somehow, to overcome obstacles to achieve the goal.

Thus, in order to understand how mathematical knowledge is important and comprehensive, awaken more interest and what is studied stimulate more interest and what is studied needs to be consolidated, so it is tried to seek through the application problems the use of any high school in mathematics to shown in various areas of expertise. Using the methodology of solving problems, is to exploit the knowledge already acquired to learn how to interpret better, understand and improve the proposed situations and prepare for new challenges. Thus, when learning to find meaning in their motivation it make them to discover their capacity for analysis and reflection in becoming a participant in the construction of knowledge, enabling themselves to recognize and associate the presence of school mathematics in their daily lives and also in the profession that in the future they can have.

Key words

Mathematics. High school. Application Problems, Solving Problems.

Introdução

Na nossa vivência como professores de matemática perguntam-nos o porquê do ensino de certos conteúdos na Escola Básica. Formulam perguntas do tipo: “Para que estudar logaritmos, trigonometria, equações ou teoremas? Onde vou usar isso na minha vida?” “Por que tive de estudar fórmulas, regras, propriedades e teoremas se esqueci tudo e hoje não preciso de nada mais do que as quatro operações que faço na calculadora?”.

Os conteúdos estudados no Ensino Fundamental e Médio têm como prioridade a formação do cidadão. A variedade de conteúdos ensinados compõe um conjunto harmonioso de conhecimento que, integrados, formam um patrimônio cultural matemático visando o exercício da cidadania.

De acordo com Valladares (2003), podemos destacar nesse patrimônio cultural matemático três faces: teórica, prática e cultural.

i) Teórica ou pura é aquela onde são salientadas as seqüências das partes constitutivas da matemática, o valor e encanto das teorias em estudo.

ii) Prática ou aplicada se apresenta nas ocasiões em que a matemática é usada para resolver problemas como: calcular antecipadamente se a prestação de um eletro doméstico pode ser incluída no orçamento ou medir o tamanho dos objetos ao planejar a decoração de uma residência. Pode ser considerada no exercício de várias profissões que requerem conhecimento de formação matemática como pedreiro, marceneiro, comerciante, engenheiro, administrador, etc.

iii) Cultural é constituída de um acervo de conhecimentos onde a formação matemática básica é incorporada, ajudando o cidadão na compreensão dos acontecimentos da vida para que possa viver melhor. Podemos, nesta face, responder parte dos questionamentos do por que estudar matemática.

É fácil perceber que a probabilidade de identificar onde cada tópico estudado entra na composição desse patrimônio quase inexiste, porém quem o adquire utiliza inconscientemente. Desse modo, muitas vezes as pessoas não percebem a presença da matemática aprendida na escola fazendo parte dos conhecimentos que as ajudam a viver melhor. É necessário conscientizá-las e informá-las das muitas aplicações da matemática na vida. É preciso desenvolver a capacidade de identificar a presença ou ausência de um recurso matemático. Assim o estudante irá perceber a importância da matemática para a sua vida, independente da profissão que no futuro venha a exercer.

Matemática, um desafio

Na escola básica aprendemos a efetuar operações matemáticas com número, Real ou Complexo, trabalhando de forma abstrata. Portanto, sem sentido para os nossos estudantes. Os números negativos são um exemplo. Os alunos conhecem a temperatura negativa, saldo bancário negativo, giro negativo, porém qual a utilidade de um produto de números negativos? Que significado tem o produto de temperaturas negativas? Um produto de duas dívidas ou saldos bancários negativos? Esta é uma das razões dos estudantes não encontrarem sentido em estudar alguns conteúdos de matemática. Assim, não percebendo a utilidade do que se propõe a estudar se desinteressam sendo um dos motivos da indisciplina em sala de aula. Não visualizando o uso do que se aprende desmotiva e dá impressão de que não é necessário aprender por não saber onde usa ou para que serve.

Segundo Lins (2005), muitas pessoas questionam para que serve a matemática escolar, chegando a sugerir que ela é inútil ou irrelevante. Muitos não aprendem o que a escola propõe, outros aprendem o que é ensinado, mas apenas para cumprir as obrigações da escola. É comum os alunos do Ensino Médio dizerem que esqueceram algum conteúdo do Ensino Fundamental, ou até mesmo que nunca aprenderam. Isto ocorre porque não conseguiram integrar a matemática que aprenderam na escola no seu dia a dia. Têm dificuldade de identificar a matemática escolar aplicada fora dela. Conseqüentemente não conseguem utilizar a matemática escolar de forma mais concreta não tendo a oportunidade, portanto, de identificá-la como algo importante, útil e necessária. É preciso mostrar aos alunos a importância do conhecimento da matemática, não apenas de modo concreto, como utilidade na sua vida, mas também do que é abstrato para a sua formação cultural. É essa formação cultural que leva a viver melhor, de forma mais útil, agradável e objetiva, fazendo com que analise, tematize, formalize tanto a matemática da escola como a fora da escola, integrando-as.

Se não houver interesse não há como aprender, compreender o conteúdo estudado. Não havendo compreensão tudo se torna mais difícil, pois tentar resolver sem compreensão é meramente repetir de forma mecânica algum processo matemático, isto faz esquecer muito rápido o que estudou durante o curso. Ao ser solicitado algum conhecimento anterior, esquecido, parece que tudo se torna mais difícil, fazendo se sentir incapaz de aprender. Isto se torna uma bola de neve para muitos fazendo da matemática a vilã da escola.

Sobre "Álgebra do Ensino Médio, quando usamos"

Material produzido como parte do Programa de Desenvolvimento Educacional, um programa de formação continuada que integra as Escolas Públicas às Instituições de Ensino Superior, fazendo com que o professor da Educação Básica interaja com os das Instituições de Ensino Superior nas atividades de formação desenvolvidas nas Universidades. Este programa tem como principal objetivo "proporcionar aos professores da rede pública estadual subsídios teórico-práticos para o desenvolvimento de ações educacionais sistematizadas, que possam ser avaliadas em seu processo e em seu produto e que resultem em redimensionamento de sua prática educativa."(PARANÁ – 2006)

Este trabalho se propõe a auxiliar o professor na tarefa de mostrar ao aluno onde os conteúdos de matemática estudados no Ensino Médio, que muitas vezes aos olhos dos alunos não têm utilidade, são aplicados. Consta de uma coletânea de alguns problemas de aplicação presentes em livros didáticos, sugerindo o uso da metodologia de resolução de problemas.

Com o objetivo de facilitar o aprendizado e para que seja feito com interesse, recorre-se aos problemas de aplicação, pois, como afirma Thomas Butts (1997), "os problemas de aplicação envolvem algoritmos aplicativos. Os problemas tradicionais caem nesta categoria, exigindo sua resolução: (a) formulação do problema simbolicamente e depois (b) manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos".

Como os problemas de aplicação envolvem algoritmos aplicativos não fugindo dos problemas tradicionais que constam nos nossos livros didáticos, facilita a sua utilização, pois, não exige mudança de metodologia no ensino desenvolvido pela maioria de nossos colegas, professores da Rede. Além disso, esse tipo de problema tem a vantagem de relacionar-se com a vida cotidiana, ora esclarecendo alguma situação do interesse do aluno, ora explorando a curiosidade de como a matemática é usada em algumas profissões, procurando assim motivar o aluno a se interessar em aprender matemática.

Ao utilizarmos os problemas de aplicação e recorrendo ao método da resolução de problemas procuramos abrir caminho para a participação efetiva dos alunos proporcionando situações de investigação, oportunizando análise e reflexão sobre situações reais que cercam a sua vida. Deste modo, fazer com que o aluno participe da construção do conhecimento e seja responsável pela sua aprendizagem.

Por meio da Resolução de Problemas e dos questionamentos de Polya (2006) propomos fazer com que os alunos: primeiro compreendam o problema, depois, tracem um plano para resolução e executem o plano, em seguida, façam um retrospecto da resolução completa, revendo e discutindo. Deste modo o aluno desenvolve a sua interpretação, a compreensão e a sua capacidade investigativa. Tendo sua curiosidade instigada, necessitará de pesquisa para seu plano de resolução e, ao descobrir o caminho da solução sem que outra pessoa indique, seu aprendizado será real. Para aprender a traçar um plano de resolução necessita encontrar estratégias, analisar as possibilidades e escolher o procedimento mais indicado para a obtenção da solução. Realizar o retrospecto da resolução é confirmar o seu aprendizado, efetuar o caminho de volta de uma solução é mostrar o domínio atingido.

Tudo isso é um desafio para os alunos e, desafiados em dose certa haverá muito progresso e muitas boas descobertas. Afinal nossa vida é um constante desafio e é isto que nos move e nos leva a aprender, preparar para novos caminhos e novos desafios que vão nos moldando e fazendo os seres humanos que somos.

Para fazer parte deste material, foram selecionados alguns conteúdos sem critério pré-determinado; uma escolha instintiva baseada na experiência em sala de aula, aqueles que se mostram interessantes e o grau de dificuldade esteja de acordo com o estudante do Ensino Médio. Abordamos a função quadrática, função exponencial, logaritmo, matrizes e trigonometria. A seguir apresentaremos alguns problemas que fazem parte do material produzido.

Apresentação de alguns problemas

Na parte de função quadrática é proposto um problema que pode ser utilizado na oitava série do Ensino Fundamental, como motivador, para introduzir a função do segundo grau e no primeiro ano do Ensino Médio, como retomada de conteúdo, para iniciar Funções Quadráticas. A solução apresentada é acompanhada dos objetivos a atingir, o que propõe ao aluno aprender de forma organizada para facilitar o aprendizado. É apresentado da seguinte maneira (Takaki, 2007, pág16):

Enunciado: Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete retangular e o espaço em volta dela com a tela de alambrado. Tendo recebido 200 m de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões de terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.

Objetivos:

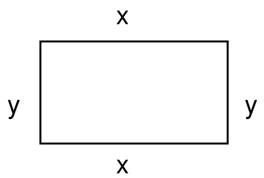
- Traçar o gráfico de funções quadráticas;
- resolver equações quadráticas gráfica e algebricamente;
- efetuar análise de gráficos de funções quadráticas;

Você vai aprender – I

- Escrever funções na forma quadrática;
- traçar gráfico de uma função quadrática;
- resolver equações quadráticas por meio de gráficos;
- efetuar algumas análises das informações do gráfico obtido.

Solução esperada:

Consideremos a quadra retangular de dimensões x e y.



Se o perímetro mede 200 m, a soma das medidas dos lados $2x + 2y = 200$, então $y = 100 - x$.
Como se deseja a área (A), sabemos que a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas dos lados: $A = x.y$, então, $A = x.(100 - x) = -x^2 + 100x$.
Encontramos assim a área $A = -x^2 + 100x$. Nessa equação a área depende dos valores dados para a medida x, ou seja, para cada valor de x teremos um valor para A.

Por exemplo, para $x = 60$ m, teremos $A = -(60)^2 + 100.60 = -3600 + 6000 = 2400$ m^2;

para x = 70 m, teremos A = – $(70)^2$ + 100.70 = – 4900 + 7000 = 2100 m^2.

Quando isso ocorre dizemos que a área A está em função de x, ou seja, a área depende do valor de x e convencionou-se representar em símbolos matemáticos da seguinte maneira: f(x). O que nos permite escrever A = f(x). Como A = $-x^2 + 100x$, podemos substituir A e escrever: $f(x) = -x^2 +$ $+100x$.

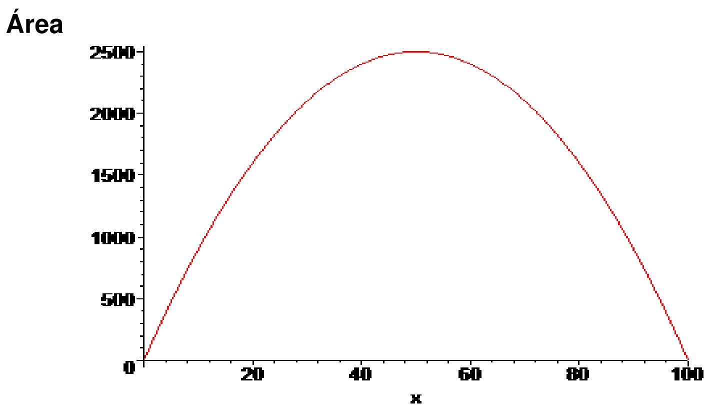
Observamos que na função f(x), a incógnita x num dos termos tem expoente 1 e no outro, tem expoente 2. Como o maior expoente da incógnita é 2, chamamos de função do segundo grau ou quadrática. Na forma geral a função quadrática é representada como: $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde **a**, **b**, **c** são números reais chamados coeficientes e **a** deve ser diferente de zero. Sendo equação do segundo grau, admite no máximo duas respostas.

Gráfico de uma função quadrática

Temos a função $f(x) = -x^2 + 100x$. Para traçar o seu gráfico, podemos criar uma tabela de valores como a seguir;

x	$f(x) = -x^2 + 100x$	F(x)
0	$f(0) = -0^2 + 100.0$	0
20	$f(20) = -(20)^2 + 100.20$	1600
30	$f(30) = -(30)^2 + 100.30$	2100
40	$f(40) = -(40)^2 + 100.40$	2400
50	$f(50) = -(50)^2 + 100.50$	2500
60	$f(60) = -(60)^2 + 100.60$	2400
70	$f(70) = -(70)^2 + 100.70$	2100
100	$f(100) = -(100)^2 + 100.100$	0

Construindo o gráfico no sistema de coordenadas cartesianas teremos:



Resolver equações quadráticas por meio de gráficos

Observando o gráfico vemos que o seu formato é de uma parábola e o seu ponto máximo, chamado vértice (V), tem como coordenadas V(50,2500). Assim podemos dizer que o valor de x

que corresponde à maior área possível é x = 50 m.
Então, se y = 100 – x teremos para a medida y = 50 m. Portanto as dimensões devem ser de 50 m por 50 m.

Algumas análises do gráfico

O aspecto do gráfico de uma função quadrática é uma parábola, que informações podemos tirar dela? Toda parábola é simétrica, assim o seu vértice pertence ao eixo de simetria. Percebemos também que o eixo de simetria é eqüidistante dos pontos onde f(x) = 0.
Você sabe dizer por que a parábola não foi traçada nos quadrantes negativos? Por se tratar de medidas e área. Eles não admitem valores negativos.
O que representa a parábola cruzar o eixo x? Como A = f(x) e a parábola cruza o eixo x nas coordenadas (0,0) e (100,0), significa que quando x = 0 e x = 100, f(x) = 0, ou seja, nesses valores de x, representa que não se forma um retângulo, pois sua área é nula.

Você vai aprender – II

- Resolver função quadrática algebricamente;
- determinar o vértice da parábola;
- resolver o problema algebricamente;
- traçar o gráfico sem o uso da tabela;

Resolução através da fatoração

Resolver uma função quadrática significa encontrar valores de x para que a função seja nula ou f(x) = 0. Lembrando que a função quadrática admite duas respostas.

1) Obter uma solução através da fatoração para as funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx$, com $a \neq 0$, vamos recorrer à propriedade da multiplicação que diz:
para qualquer número real a e b, se a.b = 0, então a=0 ou b=0 ou ambos são iguais a zero.

A nossa função é $f(x) = -x^2 + 100x$ e para obter a solução é necessário que f(x) = 0. Assim, teremos $-x^2 + 100x = 0$. Como fator x é comum, podemos usar a propriedade da evidência: x(–x + +100) = 0. Aplicando a propriedade da multiplicação, temos x = 0 ou (–x + 100) = 0. Para que –x + +100 seja igual a 0, o valor de x deve ser 100, ou seja, x = 100.
Então a solução da função: $f(x) = -x^2 + 100x$ é x = 0 e x = 100.

2) Se a nossa função fosse do tipo $f(x) = ax^2 + c$, com $a \neq 0$, por exemplo, $f(x) = x^2 - 100$ deveremos recorrer à fatoração da diferença de dois quadrados.
Assim, $x^2 - 100 = (x + 10).(x - 10)$.
Para se obter as soluções dessa função precisamos tornar f(x) = 0, então, utilizando da propriedade da multiplicação, para f(x) = (x + 10).(x – 10) = 0, temos que (x + 10) ou (x – 10) seja igual a zero donde se conclui que o primeiro valor de x é 10 e o segundo valor de x é –10, ou seja, x = ± 10.

Resolução de uma função completa do segundo grau

Uma função completa do segundo grau é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a,b,c \neq 0$. Resolvê-la é tornar $ax^2 + bx + c = 0$ encontrando o valor das duas incógnitas x. Para isto vamos obter a fórmula de Bhaskara.
Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Dividindo cada termo por a (podemos fazer isso pois a é diferente de zero) temos: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Subtraindo $\frac{c}{a}$ de cada lado da igualdade, $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$. Para

que o primeiro membro seja um quadrado perfeito precisamos completar com $\frac{b^2}{4a^2}$, ou seja, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$. Então teremos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Simplificando $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$. Extraindo a raiz quadrada, $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Subtraindo $\frac{b}{2a}$ teremos: $x = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$. Simplificando temos $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, esta é a fórmula de Bhaskara utilizada para resolver qualquer equação quadrática.

Determine a solução da função $f(x) = -5x^2 + 4x + 1$. Então $f(x) = 0$ ou $-5x^2 + 4x + 1 = 0$.

Teremos $a = -5$, $b = 4$ e $c = 1$. Substituindo na fórmula encontrada $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-5).1}}{2.(-5)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-10} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-10} = \frac{-4 \pm 6}{-10}$. A equação admite duas soluções:

$x_1 = \frac{-4 + 6}{-10} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$ e $x_2 = \frac{-4 - 6}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$.

Portanto a solução da função $f(x) = -5x^2 + 4x + 1$ é $x = \{-1/5, 1\}$.

Determinar o vértice da parábola

No gráfico traçado da função $f(x) = -x^2 + 100x$, o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria, portanto sua abscissa é $x = 50$, o ponto médio entre (0,0) e (100,0). Substituindo x por 50 em f(x), obteremos a ordenada do vértice $f(50) = 2500$. Portanto o vértice da parábola é o ponto (50,2500).
Para determinar, de um modo geral, as coordenadas do vértice V de uma equação quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, suporemos que a ordenada de V seja o número k. Assim a reta de equação $g(x) = k$ possui apenas o ponto V em comum com a parábola. Desse modo V deverá ser a solução comum das equações $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = k$.
Então devemos procurar o ponto onde $f(x) = g(x)$. Substituindo temos $ax^2 + bx + c = k$.
Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pondo a em evidência podemos escrever:
$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$. As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$. Como dentro dos colchetes em f(x) não possui o termo $\frac{b^2}{4a^2}$, ao substituir, ele deve ser subtraído, então podemos escrever $f(x) = ax^2 + bx + c = = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$, substituindo o quadrado do binômio e adicionando as frações $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ teremos $f(x) = ax^2 + bx + c = = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$. Resolvendo a indicação do colchete temos $f(x) = ax^2 + bx + c =$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Como sabemos que para determinar as coordenadas do vértice $ax^2 + bx + c = k$ é preciso que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = k$, uma constante. Para isto o termo em x deve ser nulo, ou seja, $x + \frac{b}{2a} =$ =0, ou $x = -\frac{b}{2a}$. Assim f(x) = $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Portanto as coordenadas do vértice de qualquer parábola são: $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

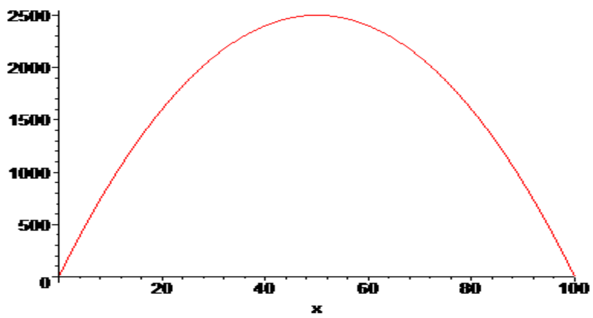
No nosso problema a função é $f(x) = -x^2 + 100x$, onde o coeficiente a = –1, o coeficiente b = 100 e o coeficiente c = 0. Substituindo em $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, teremos V(50,2500).

Para se ter área máxima, necessitamos da abscissa do ponto máximo, ou seja, x = 50 m.
Como a outra dimensão y = 100 – x, y = 50 m.
Resposta esperada: As dimensões devem ser 50 m por 50 m.

Traçar o gráfico sem o uso da tabela

Ao encontrarmos a solução da função $f(x) = -x^2 + 100x$, obtivemos as coordenadas do ponto onde a parábola cruza o eixo x: (0,0) e (100,0). Determinamos algebricamente o vértice da parábola V(50,2500). Com estes pontos já se consegue traçar o esboço do gráfico.

Área



A resolução proposta, acompanhada de demonstrações, faz com que o aluno de oitava série aprenda a importância do conhecimento da obtenção de fórmulas que são utilizadas no seu estudo, pois desenvolve a visão matemática e a compreensão do quanto essas fórmulas reduzem e facilitam os cálculos. Familiarizar-se com as fórmulas sabendo da sua origem faz com que a compreensão seja maior, desenvolvendo de forma mais concreta o raciocínio matemático. Infelizmente nas escolas públicas, hoje em dia, pouca importância se tem dado, no ensino fundamental e até mesmo no ensino médio, às demonstrações deixando de oportunizar ao aluno desenvolver a capacidade de compreensão mais requintada da matemática. Muitas vezes o professor comete o erro de não utilizar corretamente a linguagem mais específica, corroborando assim para que os nossos alunos tenham dificuldades em entender a matemática como um todo, ou seja, na leitura e interpretação tendo com conseqüência a baixa produtividade.

Outro problema bastante interessante de função quadrática é o do Restaurante (Takaki, 2007, pág12) que mostra a relação entre o preço do quilo de alimento e o lucro obtido, mostrando que existe um limite de preço para que o lucro seja máximo. É um problema que deve despertar curiosidade no aluno, pois, é um local onde muitos estão acostumados a freqüentar. Além disso, descobrir que a matemática explica uma das razões de alguns restaurantes terem sucesso e outros não, ensinando a calcular o preço ideal para obter lucro máximo é bastante estimulante. A sua resolução segue as indagações de Polya (2006), onde foram consideradas como respostas esperadas as de um bom aluno imaginário. Acreditamos que com cuidado e sensibilidade do professor interessado, este problema pode ser levado para a sala de aula sem muita dificuldade. Assim os alunos podem ter real oportunidade de participação nas resoluções dos problemas cabendo ao professor somente orientar e encaminhar, dando direcionamentos para que o próprio aluno chegue à solução e desse modo desenvolver melhor, de forma mais efetiva, o seu raciocínio matemático.

Enunciado: Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

1º Compreender o problema:
Indagação (I): Qual é a incógnita?
Resposta esperada (R.e.): O valor do quilo da comida para obter maior receita possível.
(I): Quais são os dados?
(R.e.): Venda de 100 kg de comida por dia a 12 reais o quilo.
(I): Qual é a condicionante?
(R.e.): A cada real de aumento no preço do quilo reduz 10 clientes que consomem em média 500g

cada.
(I): É possível satisfazer a condicionante (situação ou circunstância que deve ser obedecida)?
(R.e.): Sim.
(I): A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?
(R.e.): Não. Precisamos também dos dados.
(I): Como relacionar os dados e a condicionante?
(R.e.): Podemos relacionar o consumo com o preço por quilo. Assim, para consumir 100 kg de comida por dia o preço é de 12 reais/kg. Se aumentar o preço de 1 real e passar para 13 reais/kg, perderá 10 clientes que consomem 500g cada. Se aumentar o preço de 2 reais e passar para 14 reais/kg, perderá 20 clientes que consomem 500g cada e assim por diante.

2º Estabelecimento de um plano:
(I): Como a incógnita está relacionada com a compreensão que teve do problema?
(R.e.): Como a receita é o produto da quantidade de comida (em kg) consumida pelo preço de cada kg, se encontrarmos uma expressão que o represente a quantidade de comida consumida e a respectiva expressão que represente o preço acrescido do quilo de comida encontraremos a expressão que representa a receita. Assim, determinada a expressão da receita poderemos obter a receita máxima e conseqüentemente o preço máximo por quilo de comida.

3º Execução do plano:
(I): Pode esquematizar o que compreendeu do problema?
(R.e.): Poderia ser: para 100kg paga-se 12 reais/kg. Para perda de 10 clientes que consomem 500g cada teremos uma perda de 10.500g = 5000g = 5kg. Então para 13 reais/kg o consumo será de 100 – 5 = 95kg. Para perda de 20 clientes que consomem 500g cada teremos uma perda de 20.500g = 10000g = 10kg. Então para 14 reais/kg o consumo será de 100 – 10 = =90kg.
(I): É possível montar uma tabela com esses resultados?
(R.e.): Sim, relacionando o consumo com o preço/kg.

Kg de comida/dia	Preço/kg
100	12
100 – 5 = 95	12 + 1 = 13
100 – 10 = 90	12 + 2 = 14

(I): Você pode determinar a expressão que represente o consumo e o preço/kg conforme está no seu plano?
(R.e.): Sim. Para isto vou refazer a tabela incluindo mais preços.

Kg de comida/dia	Preço/kg
100	12
100 – 5 = 95	12 + 1 = 13
100 – 10 = 90	12 + 2 = 14
100 – 15 = 85	12 + 3 = 15
100 – 20 = 80	12 + 4 = 16
100 – 25 = 75	12 + 5 = 17

Percebemos que a parte subtraída de 100 é múltipla de 5 e pode ser escrita como 100 – 5.1 = =95, 100 – 5.2 = 90, 100 – 5.3 = 85, 100 – 5.4 = 80,... Nota-se que os fatores que multiplicam o 5 são os mesmos que representam os acréscimos em reais nos preços do quilo. Veja:

Kg de comida/dia	Preço/kg
100	12
100 – 5 = 100 – 5.1 = 95	12 + 1 = 13
100 – 10 = 100 – 5.2 = 90	12 + 2 = 14
100 – 15 = 100 – 5.3 = 85	12 + 3 = 15
100 – 20 = 100 – 5.4 = 80	12 + 4 = 16
100 – 25 = 100 – 5.5 = 75	12 + 5 = 17

Assim, podemos escrever as expressões em função do preço acrescido (x) no valor do quilo de comida, ou seja: consumo = 100 – 5.x e o preço/kg = 12 + x.
Podemos escrever que a receita é representada pela expressão: (100 – 5x).(12 + x).
Como a receita está em função de x, podemos representar por f(x). Assim teremos:
$f(x) = (100 - 5x).(12 + x) = 1200 + 100x - 60x - 5x^2 = -5x^2 + 40x + 1200$. É uma função do segundo grau ou quadrática e o seu gráfico é uma parábola.
Para que essa receita seja máxima é preciso encontrar o $x_{máx}$ dessa função. Então vamos utilizar a fórmula que nos fornece a abscissa do vértice da parábola, lembrando que a função quadrática tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, e que a abscissa do vértice é dado por $x_{máx} = \frac{-b}{2a}$.

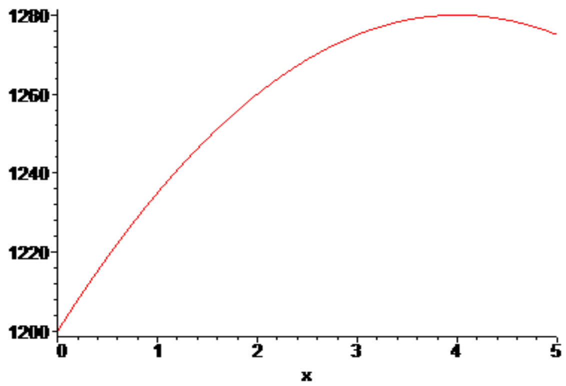
Substituindo obteremos: $x_{máx} = \frac{-40}{2 \cdot (-5)} = \frac{-40}{-10} = 4$

Como o x é o acréscimo no preço do quilo da comida que dá a maior receita, 12 + 4 = 16.
Então o valor do quilo de comida deve ser de R$ 16,00.

4º Retrospecto:
(I): É possível verificar o resultado?
(R.e.): Para efetuar a verificação consideremos x com valor menor e maior que 4.
Para x = 3, como $f(x) = -5x^2 + 40x + 1200$ teremos $f(3) = -5.3^2 + 40.3 + 1200 = 1275$.
Para x = 4, como $f(x) = -5x^2 + 40x + 1200$ teremos $f(4) = -5.4^2 + 40.4 + 1200 = 1280$.
Para x = 5, como $f(x) = -5x^2 + 40x + 1200$ teremos $f(5) = -5.5^2 + 40.5 + 1200 = 1275$.
Confirmamos que a receita máxima é quando x = 4, sendo de 1280 reais.
(I): É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?
(R.e.): Sim, através do gráfico.

Construindo a tabela da função $f(x) = -5x^2 + 40x + 1200$, teremos:

x	F(x)
0	1200
1	1235
2	1260
3	1275
4	1280
5	1275



A tabela nos informa que o $x_{máx}$ é 4 pois f(3) = f(5) e x = 4 é o ponto médio de x = 3 e x= 5. Assim, o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível é acrescentar mais 4 reais ao preço inicial, portanto R$ 16,00.

Além dos problemas sugeridos que utilizam a metodologia da resolução de problemas, o material apresenta alguns problemas seguidos apenas das soluções esperadas que podem ser utilizados como problemas complementares, ou os professores podem lançar como desafio aos alunos para que eles mesmos elaborarem as indagações que acharem necessárias para solucionarem os problemas. Com esse procedimento podemos avaliar o domínio da metodologia atingido pelos alunos e também por nós professores, medindo a capacidade de bem orientar essa atividade. Um desses problemas é apresentado na parte de Função Exponencial sobre cultura de bactérias (Takaki, 2007, pág35) da seguinte maneira:

Enunciado: Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, calcule quantas bactérias existirão depois de: (a) 3 horas; (b) 10 horas; (c) x horas.

Solução esperada (a): Depois de 1 h, teremos 1000.2 = 2000 bactérias.
Depois de 2 h, teremos 2000.2 = 4000 bactérias.
Depois de 3 h, teremos 4000.2 = 8000 bactérias.

Resposta esperada: No final de 3 horas teremos 8 mil bactérias.

Solução esperada (b): Se continuarmos o cálculo de (a) teremos, depois de 4 h, o dobro de 8 mil bactérias = 16 mil bactérias, uma vez que dobra a cada hora.

horas	1	2	3	4
bactérias	2000	4000	8000	16000
	2.10^3	4.10^3	8.10^3	16.10^3
	2.10^3	$2^2.10^3$	$2^3.10^3$	$2^4.10^3$

Seguindo o raciocínio que é indicado na tabela, teremos depois de 10 horas, $2^{10}.10^3$ bactérias, pois percebemos que o expoente de 2 segue de acordo com o tempo em horas consideradas. Então serão $2^{10}.10^3$ = 1024.1000 = 1024000 bactérias.

Resposta esperada: No final de 10 horas teremos 1024 mil bactérias.

Solução esperada (c): Generalizando, depois de x horas teremos, conforme indica a tabela em (b), 2^x. 10^3 bactérias.

Resposta esperada: Depois de x horas teremos 2^x. 10^3 bactérias.

São apresentados também problemas que no seu enunciado fornecem as fórmulas a serem utilizadas sem se importar com as suas obtenções ou demonstrações, pois, muitas vezes as demonstrações dessas fórmulas envolvem conhecimentos mais aprofundados, ou seja, os nossos estudantes ainda não têm maturidade e preparo suficientes para as compreenderem. A fórmula é simplesmente apresentada e é aplicada apenas com a intenção de mostrar a sua existência e utilização na resolução de problemas que envolvem o uso de conteúdos aprendidos no Ensino Médio. Em Logaritmos temos, por exemplo, o problema da absorção e acumulação de drogas terapêuticas no organismo (Takaki, 2007, pág46). Neste problema percebe-se a necessidade de estarmos atentos às orientações médicas ou à leitura das informações trazidas na bula de remédio para ingerirmos a dosagem certa, no intervalo de tempo indicado entre as doses para que o efeito do medicamento seja conforme o esperado. Esta informação é muito interessante para alertar os estudantes do risco da automedicação.

Enunciado: Quando se administra um remédio, sua concentração no organismo deve oscilar entre dois níveis, pois não pode ser tão baixa a ponto de não fazer efeito (Ce) e não pode ser tão alta a ponto de apresentar efeitos indesejáveis (toxidade) ao paciente (Cp). Quando, após um certo tempo depois de ministrado o remédio, o nível de concentração no organismo atinge Ce, toma-se mais uma dose do remédio a fim de elevar o nível de concentração para Cp. Esse tempo entre as administrações das doses é chamado de tempo interdoses. É importante notar que o tempo interdoses, após a primeira medicação, é o tempo que decorre para concentração máxima tolerada Cp decair até a concentração mínima eficaz Ce.
Lembrando que a concentração de uma droga no organismo, após um tempo t, é dada por C(t) = $=C_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$, em que C_0 é a quantidade inicial ingerida do remédio, t é o tempo decorrido e P é o valor da meia vida da substância no organismo, obtenha em função de Ce, Cp e P:

(a) o valor do tempo interdoses;

(b) a concentração de remédio D nas doses que devem ser administradas ao paciente a cada intervalo interdoses.

Solução esperada(a): A função que relaciona a concentração de remédio no organismo em função do tempo é: $C(t) = C_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$.

Segundo o texto, em cada nova dose administrada, temos uma concentração Cp no organismo e, após o tempo t, essa concentração é Ce. Então:

$$C(t) = C_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}} \Rightarrow \frac{Ce}{Cp} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}} \Rightarrow \log\frac{Ce}{Cp} = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}} \Rightarrow \log\frac{Ce}{Cp} = \frac{t}{P}\log\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{P} = \frac{\log Ce - \log Cp}{\log\frac{1}{2}} \Rightarrow t = P\cdot\frac{\log Ce - \log Cp}{-0,3010} = 3,322\cdot P\cdot(\log Cp - \log Ce)$$

Resposta esperada(a): Então, o valor do tempo interdoses será:

$$t = 3{,}322.P.(\log Cp - \log Ce).$$

Solução esperada(b): Quando a concentração chega a Ce, deve-se administrar o suficiente para que ela atinja o nível Cp novamente, portanto deve-se administrar D = Cp – Ce.
Resposta esperada (b): A concentração de remédio D deve ser de Cp – Ce.

Outro tema muito importante é a obesidade que tem atingido alto índice em todo o mundo. Atualmente sabemos que a má alimentação e o sedentarismo têm prejudicado a saúde de muitos causando a obesidade em todas as faixas etárias acarretando outros males como hipertensão, diabetes, problemas coronários entre outros. É de suma importância conscientizar os nossos estudantes da necessidade de conciliar a dieta com exercícios físicos para ser saudável. Este assunto é tratado em Matrizes com o um problema que relaciona perda de peso com programa de dieta e exercícios (Takaki, 2007, pág59).

Enunciado: Antônio pesa 80 quilos e deseja perder peso por meio de um programa de dieta e exercícios. Após consultar a tabela 1, ele monta um programa de exercícios conforme tabela 2.

Tabela 1 – Calorias queimadas por hora

Peso	Atividade esportiva			
	Andar a 3 km/h	Correr a 9 km/h	Andar de bicicleta a 9 km/h	Jogar tênis (moderado)
69	213	651	304	340
73	225	688	321	368
77	237	726	338	385
80	250	760	350	400

Tabela 2 – Horas/dia para cada atividade

Dia da semana	Programa de exercícios			
	Andar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar tênis
Segunda-feira	1,0	0,0	1,0	0,0
Terça-feira	0,0	0,0	0,0	2,0
Quarta-feira	0,4	0,5	0,0	0,0
Quinta-feira	0,0	0,0	0,5	2,0
Sexta-feira	0,4	0,5	0,0	0,0

De acordo com as informações contidas nas tabelas 1 e 2, calcule quantas calorias ele irá queimar em cada dia, se seguir o programa.

Solução esperada: Como o peso de Antônio é 80 kg, pela tabela 1 temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 760 \\ 350 \\ 400 \end{pmatrix}. \text{ Pela tabela 2, temos a matriz A=} \begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar a quantidade de calorias que irá queimar em cada dia, basta multiplicar as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 & 2,0 \\ 0,4 & 0,5 & 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 250 \\ 760 \\ 350 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0.250 + 1,0.350 \\ 2,0.400 \\ 0,4.250 + 0,5.760 \\ 0,5.350 + 2,0.400 \\ 0,4.250 + 0,5.760 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 480 \\ 975 \\ 480 \end{pmatrix}$$

Resposta esperada: Ele irá queimar 600 calorias na segunda-feira, 800 calorias na terça-feira, 480 calorias na quarta-feira, 975 calorias na quinta feira e 480 calorias na sexta-feira.

Implementação do material numa escola

Para concretizar o que foi dito, propusemos utilizar numa escola da Rede Estadual os problemas de aplicação apresentados no material didático produzido “Álgebra do Ensino Médio, quando usamos?” (Takaki, 2007) e verificar a sua eficácia.

Foi no Colégio Estadual “Professor Vicente Rijo”, Ensino Fundamental, Médio e Profissionalizante da cidade de Londrina, Paraná, que realizamos a implementação deste projeto. Infelizmente, por ordem de escolha das aulas, atuo como professora do Ensino Fundamental e não pude ter turmas do Ensino Médio. Desse modo solicitei o auxílio de duas colegas para aplicar comigo, em suas turmas do período matutino, este projeto para que eu pudesse ter continuidade no Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE). As professoras Maria Aparecida Carvalho e Tânia Borreiro Sanches se dispuseram a aplicar em quatro turmas do primeiro ano e em uma turma do segundo.

As atividades foram realizadas nos meses abril e maio de 2008. O conteúdo em estudo no primeiro ano era Logaritmo e foi utilizado o problema do Crescimento Populacional (Takaki, 2007, pág41). O conteúdo no segundo ano era Trigonometria e foi utilizado o problema da Aeronáutica (Takaki, 2007, pág62). A seguir relataremos o que foi proposto e como foi realizado.

O problema do Crescimento Populacional trabalhado nas turmas do primeiro ano tem como enunciado:

> Na América Latina, a população cresce a uma taxa de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina irá dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Em duas turmas foi aplicado como problema desafio introduzindo Logaritmo e em outras duas turmas como retomada de conteúdo. Para isto foram formados grupos de 3 alunos para executarem as atividades propostas.

Nas duas primeiras turmas, iniciou-se com a leitura atenta do problema para compreensão e breve discussão em grupo. Depois, encaminhamos o trabalho efetuando as indagações:

> 1º) Compreender o problema:
> - Qual é a incógnita?
> - Quais são os dados?
> - Qual é a condicionante?
> - A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?
>
> 2º) Estabelecimento de um plano:
> - Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
> - Como proceder para determinar a incógnita?
>
> 3º) Execução do plano:
> -Execute o seu plano.
>
> 4º) Retrospecto:
> - É possível verificar o resultado?

As indagações do primeiro item foram satisfatoriamente respondidas, porém, houve dúvida quanto a condicionante ser suficiente para determinar a incógnita,

pois consideraram que faltou o dado com o total da população.
Iniciamos a orientação com essa “falta de dado” e propusemos uma simulação: caso a população total fosse de 100 habitantes, como se comportaria esse crescimento? A maior parte dos alunos chegou à solução através de cálculos sucessivos utilizando a taxa de crescimento. Durante os cálculos da simulação foi lembrado por um dos alunos um problema correlato estudado nas aulas anteriores (função exponencial), o de juros compostos. Tomando como base essa relação com os juros compostos e os cálculos sucessivos efetuados foi proposto às equipes que encontrassem uma generalização a fim de obter uma fórmula para qualquer população, ou seja, considerando a população como incógnita. Ao perceberem a semelhança entre o problema de juros compostos e os cálculos efetuados, tornou-se um desafio para os alunos que normalmente se destacam na sala encontrar a generalização e envolverem os colegas do seu grupo. Nesse momento percebeu-se que a sala como um todo estava empenhada em encontrar a solução e notou-se que até os alunos pouco produtivos foram tomados pelo desafio e houve participação, até certo ponto, surpreendente. Encontrada a generalização, percebeu-se que não há como se resolver potências com expoente literal tendo bases diferentes. Nesse ponto foi explanada que para solucionar esse tipo de equação é preciso o conhecimento do Logaritmo. Na seqüência, introduziu-se o Logaritmo e suas propriedades, dando condições de seguir adiante na solução do problema de forma tranqüila demonstrando assim que houve compreensão da turma na solução desse problema. Foram utilizadas três aulas para esta atividade. Para as outras duas turmas em que o conteúdo Logaritmo havia sido ministrado, apesar de terem idéia que se tratava de um problema envolvendo Logaritmo, nenhuma equipe solucionou por meio desse conteúdo. A maioria resolveu por tentativa, pois, como nas turmas anteriores, acreditaram que faltava dado no problema pela ausência do valor da população e seguiram a sugestão da simulação para 100 habitantes. Solicitamos que transformassem os cálculos efetuados para uma população p qualquer a fim de obter uma generalização. Lançado como desafio aos alunos, foram trocando a população

inicial de 100 habitantes para p e seguiram transformando cálculos numéricos em símbolos algébricos. A representação do primeiro ano foi tranqüila, porém, ao transformar os cálculos efetuados para o segundo ano, alguns alunos não conseguiram ir em frente necessitando de uma intervenção para compreenderem como fazer essa "conversão". Explanada a notação e a obtenção da equação que representa o segundo ano, conseguiram obter a equação do terceiro e do quarto ano o que permitiu obter a generalização. Nesse ponto os alunos que não conseguiram, buscaram apoio dos colegas e puderam atingir o objetivo. Após obterem a equação generalizada, solucioná-la através de Logaritmo não foi problema, pois todos já dispunham do conhecimento necessário. Foram utilizadas duas aulas para essa atividade.

A solução esperada deste problema é apresentada no material, da seguinte maneira:

1º Compreender o problema:
Indagação (I): Qual é a incógnita?
Resposta esperada (R.e.): A quantidade de anos que levará para a população dobrar.
(I): Quais são os dados?
(R.e.): Apenas a taxa de crescimento anual de 3%.
(I): Qual é a condicionante?
(R.e.): A taxa de crescimento continua a mesma, isto é, 3% ao ano
(I): A condicionante é suficiente para determinar a incógnita?
(R.e.): Sim.

2º Estabelecimento de um plano
(I): Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
(R.e.): A cada ano a população cresce de 3%. O crescimento populacional num certo ano é calculado acrescentando-se à população do ano anterior seus 3%. Com esta idéia, será necessário calcular quantos anos leva para dobrar a população inicial.
(I): Como proceder para determinar a incógnita?
(R.e.): Com a população inicial calculam-se os 3% de acréscimo para determinar a população do ano seguinte. Com a população obtida calculam-se novamente seus 3% para determinar a população do ano seguinte e assim por diante. Determinando uma expressão que represente o crescimento populacional ano a ano, poderemos encontrar uma expressão generalizada que relacione a população em função do tempo. Assim através dessa expressão encontrar o tempo que se leva para dobrar a população inicial.

3º Execução do plano
(I): Execute o seu plano.
(R.e.): Considerando a população inicial P_0; em 1 ano P_1; em 2 anos P_2; ...

Início: P_0

1º ano: $P_1 = P_0 + 3\%\ P_0 = P_0 + \frac{3}{100} P_0 = P_0 + 0{,}03P_0 = 1{,}03P_0$.

2º ano: $P_2 = P_1 + 3\%\ P_1 = 1{,}03.P_0 + \frac{3}{100}.1{,}03.P_0 = 1{,}03.P_0(1+0{,}03)$

$P_2 = 1{,}03.P_0.1{,}03 = P_0.(0{,}03)^2$.

3º ano: $P_3 = P_2 + 3\%.P_2 = P_0.(1{,}03)^2 + \frac{3}{100}.P_0.(1{,}03)^2 = P_0.(1{,}03)^2.(1+0{,}03)$

$P_3 = P_0.(1{,}03)^2.(1{,}03) = P_0(1{,}03)^3$.

Analogamente para P_4, P_5, P_6, ...

Generalizando, para y anos à taxa de 3% ao ano, temos $P_y = P_0.(1{,}03)^y = P_0.(1 + 0{,}03)^y$ ou seja, $P_y = P_0.(1 + 3\%)^y$. Para uma taxa i qualquer, podemos escrever: $P_y = P_0.(1 + i)^y$.
Utilizando dessa generalização e considerando que a população dobrará em x anos, tem-se $P_0.(1{,}03)^x = 2.P_0$, dividindo ambos os termos por P_0 temos $(1{,}03)^x = 2$.
Aplicando logaritmo obtém-se $x.\log 1{,}03 = \log 2 \Rightarrow x = \log 2 : \log 1{,}03$.
Como $\log 2 \cong 0{,}30103$ e $\log 1{,}03 \cong 0{,}01284$ obtemos $x \cong 23$ anos.
Resposta esperada: A população da América Latina dobrará em 23 anos, aproximadamente.

4º Retrospecto
(I): É possível verificar o resultado?
(R.e.): Podemos verificar utilizando a fórmula encontrada: $P_y = P_0.(1 + i)^y$. Para que seja correto, $P_y = 2P_0$ para y = 23 e i = 3%.
Substituindo temos: $P_y = P_0.(1 + 3\%)^{23} = P_0.(1{,}03)^{23} \cong P_0.\ 1{,}97358 \cong 2P_0$.

Para a turma do segundo ano utilizamos o problema da Aeronáutica com o seguinte enunciado:

> É experiência corriqueira ouvir um avião a jato se aproximando, especialmente se está voando baixo, e, ao olhar na direção de onde vem o ruído, descobrir que ele está num ponto do céu muito diferente. Suponha que um avião voando a 330 km/h e a uma altitude de 915 m é ouvido por um observador quando está a 20º acima do horizonte. Se o avião passa diretamente sobre o observador, para onde este deve olhar a fim de ver o avião quando ouve o seu ruído? (Tome a velocidade do som como 335 m/s) (Takaki, 2007, pág.62).

Foram formadas equipes de 3 alunos e solicitada a leitura atenta e discussão no grupo para compreensão do problema e pensar numa estratégia de solução. Para auxiliar na atividade, foram lançadas as mesmas indagações para:

1º) Compreender o problema
2º) Estabelecimento de um plano
3º) Execução do plano
4º) Retrospecto

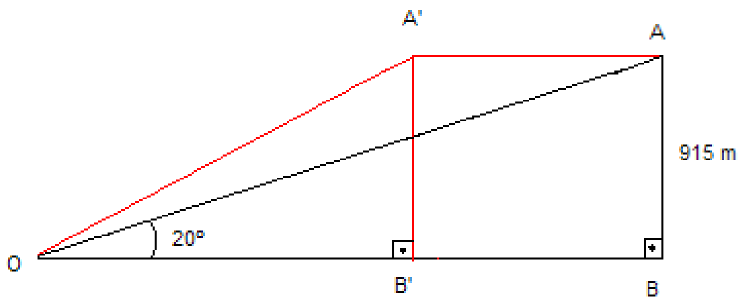
Às indagações referentes ao primeiro item, compreender o problema foi acrescido a seguinte pergunta: é possível traçar uma figura? Todas foram respondidas plenamente o que indicou que a maioria dos alunos compreendeu com clareza o enunciado. Foi então solicitado para que as equipes traçassem a figura e fizessem o levantamento dos dados. Ao analisar a posição do avião quando o observador ouve o ruído, muitos tiveram dificuldade em perceber que o tempo de deslocamento do som até o observador e da aproximação do avião são iguais. Interviemos então, iniciando o traçado da figura, localizando a posição do avião com o ângulo em relação à horizontal e a altitude. Determinaram assim, com facilidade, utilizando-se da função seno, a distância percorrida pelo som. Além disso, os alunos souberam relacionar o problema com a Física utilizando-se da noção de velocidade média. Com o final da aula, os alunos levaram o problema para casa com o compromisso de desenvolvê-lo. Na aula seguinte alguns deles apresentaram o que conseguiram resolver, porém apenas um trouxe a solução correta. Enquanto este aluno apresentava a solução encontrada por ele ao seu grupo, explicando e esclarecendo as dúvidas, os demais continuaram a trabalhar nas equipes com a supervisão mais constante das professoras. Dois outros grupos chegaram à solução procurada. Ao final da aula, apesar de algumas equipes não terem terminado a atividade, foi apresentada, na lousa, a solução encontrada pelas equipes. A primeira mostrou uma solução incorreta que foi analisada e comentada. Para não dispersar demais, foi solicitada a apresentação do aluno que trouxe a solução correta. Sua apresentação foi muito boa demonstrando conhecimento e domínio. Porém, alguns alunos ficaram com dúvidas e solicitaram à professora que explicasse com mais calma a solução na aula seguinte. Foram utilizadas, portanto pouco mais de duas aulas para essa atividade.

A solução esperada deste problema é apresentada no material, da seguinte maneira:

1º Compreender o problema:
Indagação (I): Qual é a incógnita?
Resposta esperada (R.e.): O ângulo de visão para se ver um avião quando se escuta o seu ruído.
(I): Quais são os dados?
(R.e.): A velocidade do avião, sua altitude, sua posição em relação ao horizonte e a velocidade do som.
(I): Qual é a condicionante?
(R.e.): O avião passa diretamente sobre o observador.
(I): A condicionante é suficiente para se determinar a incógnita?
(R.e.): Sim, junto com os dados.
(I): É possível traçar uma figura?
(R.e.): Sim para melhor visualizar e compreender o problema.

2º Estabelecimento de um plano
(I): Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.
(R.e.): Em primeiro lugar traçar a figura localizando o observador com o ângulo visual de 20º acima do horizonte, o avião e a sua altitude. Com os dados e sabendo que a velocidade da luz é maior que a velocidade do som, pois sempre nos dá a impressão que barulho vem "atrás" do avião, precisamos calcular a sua posição real quando ouvimos o seu barulho. Para determinar a incógnita devemos levar em conta que o tempo é o mesmo para o deslocamento do avião e o deslocamento do ruído produzido pelo avião até os nossos ouvidos.

3º Execução do plano
(I): Execute o seu plano.
(R.e.): Iniciaremos traçando a figura e localizando os dados:



Quando o avião produz o ruído que o observador ouve, em linha reta, ele está a uma distância $\overline{OA}$ do avião. A distância $\overline{OA}$ é a hipotenusa do triângulo OAB, retângulo em B e AÔB = 20º então sen20º = $\dfrac{915}{\overline{OA}}$, como sabemos que sen20º = 0,3420, encontramos $\overline{OA} \cong 2675$ m.

No solo, o observador está a uma distância $\overline{OB}$ da linha vertical de onde está o avião. A distância $\overline{OB}$ é o cateto adjacente ao ângulo AÔB = 20º do triângulo AOB, então

cos20º = $\dfrac{\overline{OB}}{2675}$ e como sabemos que cos20º = 0,9397, substituindo encontramos

$\overline{OB} \cong 2514$ m.

Sabendo que a velocidade do som é de 335 m/s, que ela se propaga por 2675 m e como a velocidade é dada pelo quociente entre distância e o tempo, temos 335 = $\dfrac{2675}{t}$, então t $\cong$ 8 s.

O avião em movimento a 330 km/h, nesses 8 s ele já se deslocou de A para A', se distância = velocidade . tempo = 330 km/h . 8s = $\frac{330 \cdot 1000\,m}{3600s} \cdot 8s \cong 733\,m$.

Assim sendo, o ângulo θ segundo o qual o avião será avistado tem como tangente a razão entre $\overline{A'B'}$ e $\overline{OB'}$, então θ será:

θ = arc tg $\frac{915}{2514 - 733}$ $\Rightarrow$ θ = arc tg 0,51375 $\Rightarrow$ θ = 27º.

Resposta esperada: Deve olhar na direção de 27º da horizontal, do seu ângulo visual.

4º Retrospecto

(I): É possível verificar o resultado?

(R.e.): Sim, se no triângulo A'OB', com o ângulo de 27º a medida $\overline{OB'}$ confirmar ser $\overline{OB} - \overline{BB'} =$ 2514 – 733 = 1781 m. Então, nesse triângulo, temos tg 27º = $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$ = 0,51375 = $\frac{915}{\overline{OB'}}$. Assim, por proporção, $\overline{OB'}$ = 915 : 0,51375 o que resulta em $\overline{OB'} \cong$ 1781 m.

Considerações finais

Conforme afirma Gentile (2007), para os professores, os alunos são vistos como desinteressados e indisciplinados e são percebidos, junto com a família, como principais problemas da sala de aula. Realmente o desinteresse é uma das principais queixas de professores em relação aos alunos. Muitos jovens têm mostrado rejeição pelo desafio de aprender, se aborrecem com as aulas e não têm disciplina para os estudos. Porém sabemos que toda criança é curiosa por natureza e que os desafios trazem aprendizagem, os quais valem para toda a vida. Não podemos deixar que, durante a escolarização, alunos curiosos se tornem apáticos. Muito menos permitir que a sala de aula seja um ambiente de apatia. É necessário dar espaço para a participação, permitir que haja conversa, fala, movimentação e argumentação. É aqui que entra a metodologia da Resolução de Problemas auxiliando o professor a por em prática essa necessidade.

Sabemos que a função mais importante da escola é desenvolver o desejo de aprender. A escola precisa ser capaz de motivar os alunos para a cultura e de oportunizar formação para a vida social plena. Como diz Menezes

(2007), a motivação para aprender depende da identificação com o assunto e da expectativa de sucesso. Dar contexto aos conteúdos de aprendizagem e criar espaço onde os jovens sejam protagonistas do diálogo amplia a expectativa de sucesso, conseqüentemente o aluno encontra significado no aprendizado, tornando-o mais motivado, interessado e autoconfiante.

A proposta é que o material didático “Álgebra do Ensino Médio, quando usamos?” seja utilizado como algo motivador que possa despertar curiosidade e questionamento auxiliando no desenvolvimento do desejo de aprender. Uma das sugestões é que se utilize dos problemas deste material como problemas motivadores para iniciar um novo conteúdo, como foi feito na implementação com as duas turmas do primeiro ano. Propõem-se um problema que seja instigante relativo ao conteúdo a ser trabalhado. Analisa-se o problema de forma a traçar uma estratégia de solução e procura-se fazer questionamentos para aguçar a curiosidade na obtenção da solução explorando os conhecimentos já adquiridos pelos alunos. Visto que o seu conhecimento não soluciona o problema, torna-se necessária a introdução de novos conceitos. Isto o professor fará, sempre que necessário, procurando ser claro e objetivo, assim os alunos verão a necessidade de aprimorar seus conhecimentos para dar conta dos desafios do aprendizado. Outra sugestão é que se use dos problemas elaborados com fórmulas nos enunciados apenas como exemplo de aplicação do conteúdo estudado, pois muitas vezes, os alunos apenas querem saber onde é usado o conteúdo que está aprendendo e ainda não têm a maturidade e interesse em descobrir a sua origem ou demonstração. Sugere-se também que sejam propostos problemas que necessitem de investigação para a solução, como forma de desafio ao seu aprendizado, pois na realidade todos somos movidos pelo desafio. Através da investigação matemática nos livros didáticos, na internet, nas revistas ou junto às pessoas que possam auxiliá-los, os alunos se verão diante de vários questionamentos que, na maioria vezes, extrapolarão o assunto que está sendo estudado e, na procura pelas respostas irão adquirir conhecimentos variados que o enriquecerão culturalmente. Desenvolverão a leitura, interpretação, compreensão e argumentação o que os fará adquirir maior autoconfiança para encarar novos desafios, e cada desafio vencido irá mostrar a sua capacidade de adquirir novos conhecimentos.

Com a implementação realizada pudemos verificar o quanto os problemas de aplicação, com temas que fazem parte da vivência do nosso aluno, despertam interesse permitindo que ele veja uma utilização mais concreta do que estuda na escola. Desse modo auxilia realmente a dar sentido ao estudo tornando-o bastante proveitoso despertando a curiosidade e propondo desafio, principalmente introduzindo um conteúdo, pois ele comprova que o novo assunto a ser estudado surgiu para facilitar a solução de problemas que, com os conhecimentos disponíveis, não se consegue resolver. Observou-se também que a metodologia da Resolução de Problemas aliada ao trabalhado em grupo incentiva a pesquisa e amplia a compreensão do aluno além de criar um ambiente muito mais agradável na sala de aula, de cooperação e coleguismo.

Esperamos que o uso dos problemas de aplicação através da metodologia da resolução de problemas possa ser adotado nas aulas de matemática em todos os níveis de ensino básico. A eficácia da metodologia já foi confirmada e agora foi ratificada por nós através dessa implementação na escola realizada. Esperamos que os professores de matemática que não utilizam dessa metodologia aceitem repensar a sua prática de ensino e se inteirem da Metodologia da Resolução de Problemas, aliem essa metodologia aos problemas de aplicação e utilizem-na. Com certeza, colherão bons frutos.

Agradecimento

Agradeço as professoras Maria Aparecida da Silva de Carvalho e Tânia Borreiro Sanches que utilizaram do material desenvolvido e aplicaram em suas turmas no Colégio Estadual “Vicente Rijo possibilitando a implementação na escola e conseqüentemente a produção deste artigo.

Agradeço a professora Doutora Angela Marta Pereira das Dores Savioli pela sua dedicação e amizade.

Referências Bibliográficas

BOYD, Cindy J. *Algebra 2* handbook for Texas students, integration, application, connections. New York: Glencoe/Mcgraw-Hill, 1998.

BUSHAW, D.; BELL, M.; POLLAK, H. O.; THOMPSON, M.; USISKIN, Z. *Aplicações da matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.

BUTTS, Thomas. *Formulando problemas adequadamente* apud KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (org). *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*. São Paulo: Atual, 1997.

CARVALHO, Paulo C. P.; LIMA, Elon L.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio* volume 1. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARVALHO, Paulo C. P.; LIMA, Elon L.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio* volume 3. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (org). *As idéias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

DANTE, Luis R. *Matemática Contexto e Aplicação* vol 1. 3.ed. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, Luis R. *Matemática Contexto e Aplicação* vol 2. 3.ed. São Paulo: Ática, 2004.

GENTILE, Paola. *A Educação, vista pelos olhos do professor*. Revista Nova Escola, ano XXII nº 207. p. 32 – 39. São Paulo: Abril, 2007. Disponível em www.novaescola.org.br

LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. 6.ed. São Paulo: Papirus , 2005.

MENEZES, Luis C. *De onde vem a tal motivação?* Revista Nova Escola, ano XXII nº 207. p. 90. São Paulo: Abril, 2007. Disponível em www.novaescola.org.br

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE: Proposta Político-Pedagógica, versão preliminar. Curitiba: SEED, 2006.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

TAKAKI, Terezinha Y. *Álgebra do Ensino Médio, Quando Usamos?*. Programa de Desenvolvimento Educacional. Secretaria do Estado da Educação. Governo do Estado do Paraná, 2007.

VALLADARES, Renato J. C. *O Jeito Matemático de Pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.