Versão Online ISBN 978-85-8015-038-4
Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Produção Didático-Pedagógica

2007

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

CONCEITOS POR MEIO DE PLANIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS

OswaldoBulla[1]
João Roberto Gerônimo[2]

QUAL A IMPORTÂNCIA DE SE APRENDER POLIEDROS?

O mundo físico em que vivemos é um espaço tridimensional. Por exemplo, uma caixa de sapatos, uma piscina ou um edifício têm três dimensões: comprimento, largura e altura (ou profundidade).

Os animais, as plantas e o próprio homem, como parte do mundo físico, são entes tridimensionais. No entanto, a representação de um objeto tridimensional sobre o papel ou no quadro de giz é uma figura plana. Assim, é interessante abordar aspectos da geometria espacial para em seguida enfocar a Geometria plana.

A melhor forma de compreender os poliedros é construí-los, e seguidamente observá-los, compará-los e modificá-los. Um poliedro, quando é observado, é visto como porção de espaço limitada por polígonos, daí que seja proceder à sua construção utilizando polígonos em papel ou cartolina, unindo os seus lados com dita-cola e formando assim as embalagens preferidas.

O recurso a modelos geométricos no ensino da Geometria é universalmente reconhecido. É importante conhecer e utilizar alguns materiais produzidos pela própria indústria com este objetivo, mas também convém valorizar o papel formativo da própria construção de alguns modelos de bons materiais utilizados.

Essas embalagens são construídas com polígonos na maioria das vezes com material de papelão com encaixes para a construção de poliedros. É um material potencialmente motivador, que permite a manipulação individual e que é matematicamente apropriado para representar certos conceitos, tornando-se aconselhável a sua utilização que permitam trabalhar, de diferentes formas, o conceito em estudo.

[1] Professor da SEED/PR. E-mail: bulla@seed.pr.gov.br
[2] Professor Associado da DMA/UEM. E-mail: jrgeronimo@uem.br

Os poliedros tem se destacado na preferência dos industriários, principalmente na confecção de embalagens para proteger os produtos industrializados. As formas preferidas têm sido as embalagens do tipo prismático (cubo e paralelepípedo-reto), simplesmente pela forma apresentada que traz certa comodidade e facilidade de locomoção, comodação, armazenagem e segurança. A escolha desta formas de embalagem, se dá nem sempre visando o lado econômico e sim o aspecto segurança e confiabilidade que as formas oferecem.

POR QUE OS ALUNOS NÃO APRENDEM GEOMETRIA?

A matemática é considerada por muitos como a vilã das disciplinas pertencentes à grade curricular. Talvez por isso, pairam sobre ela as maiores dificuldades durante a vida escolar. Verificando as pesquisas realizadas no decorrer dos anos, e em especial considerando contato pessoal com os alunos que freqüentam as séries do Ensino Médio, ficou em evidência a deficiência da aprendizagem da disciplina nas séries anteriores, ou seja, quase sempre foi trabalhada de forma abstrata. Muitas vezes, ao perguntarmos aos alunos do Ensino Médio qual é a diferença entre perímetro e superfície de um polígono, a grande maioria não saberá responder. O mesmo acontece com as diferenças entre polígonos e poliedros. Não se pode afirmar exatamente se o fato acontece por conta do professor ou do aluno. Porém, não temos como negar que toda aprendizagem requer conhecimentos anteriores que fundamentam a nova aprendizagem.

Quando se estuda a geometria espacial, mais exatamente os poliedros e a relação de Euler, dada por $A + 2 = V + F$, onde A = aresta, V = vértices e F = faces, a falta de conhecimento ainda é maior. Se pedirmos para o aluno construir um sólido geométrico de 21 arestas, 12 faces e 10 vértices, com certeza eles irão tentar descobrir aleatoriamente, tentando adivinhar o sólido, não percebendo que o tal sólido não existe. Lendo o resultado de um levantamento feito com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, constatei que a grande maioria não consegue sequer lembrar, descrever ou citar algumas propriedades de polígonos e sólidos geométricos, quando muito os do Ensino Médio, faz alguma consideração ao cubo ou a pirâmide, lembrando dos monumentos egípcios e os mais aplicados falam alguma coisa sobre os poliedros de Platão. Tudo isso é conseqüência de trabalhar a geometria espacial sem que os alunos manipulem, construam ou vejam objetos, ou seja, "a aprendizagem fica no abstrato e cai no esquecimento” e o tema tende a ser desinteressante desprovido de significados e de desafios.

Um estudo de geometria espacial deveria privilegiar atividades que desenvolvam a intuição especial e habilidades de visualização para a formação do pensamento geométrico, ou ainda, quando se ensina um conteúdo, as explicações deverão ser incisivas, para atingir e despertar no aluno, a curiosidade em querer aprender tal matéria e deixar o professor seguro daquilo que está ensinando.

Assim, sugiro o proposto por Ana Maria Kaleff em seu artigo: “Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos”.

O nosso objeto de estudo vai ser sobre POLIEDROS. Um conteúdo que apresenta suas atividades quase que totalmente concreto que facilita o processo ensino-aprendizagem.

FIGURAS POLIÉDRICAS

Qualquer figura geométrica, ou seja, qualquer subconjunto do espaço é denominado figura geométrica espacial.

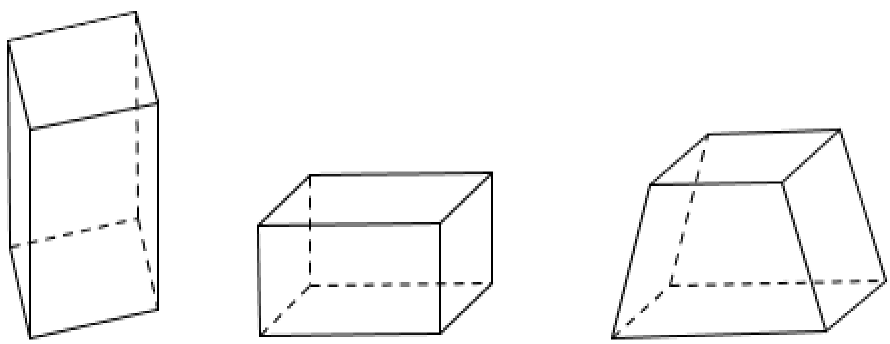
É a reunião de um número finito de polígonos planos tais que:

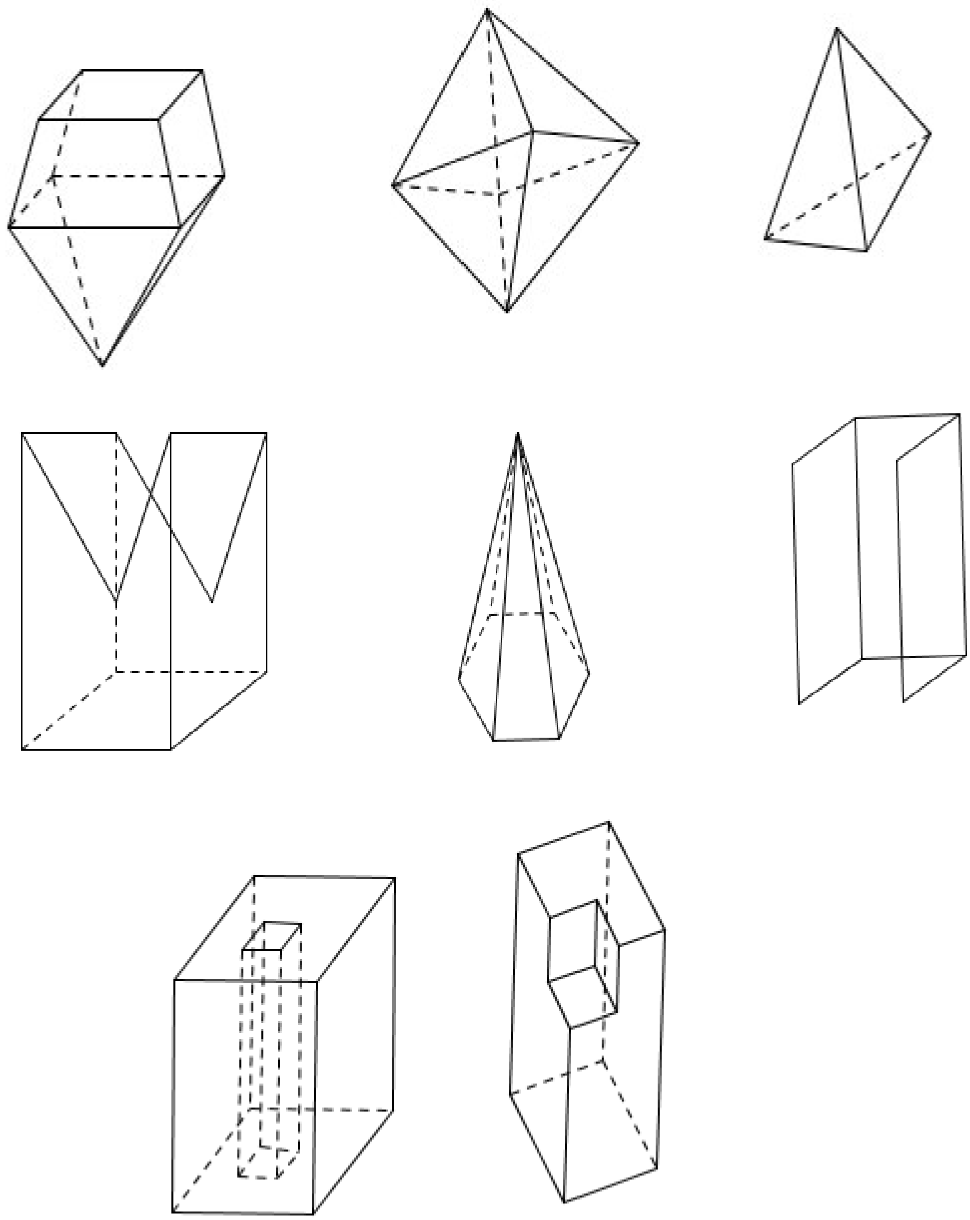
a) A interseção de dois polígonos quaisquer ou é vazia, ou é vértices ou é um dos lados dos polígonos;

b) Dois polígonos contendo um lado em comum não são coplanares;

Os lados dos polígonos são denominados **arestas**. Os vértices dos polígonos são denominados **vértices**. Exemplos:

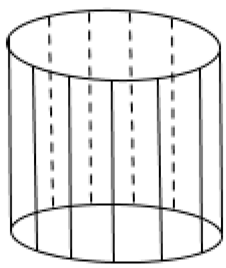
Os seguintes desenhos representam figuras poliédricas.



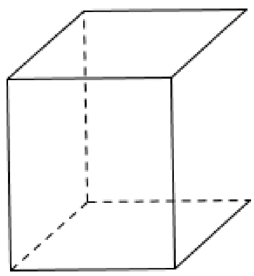


Os seguintes desenhos não representam figuras poliédricas.

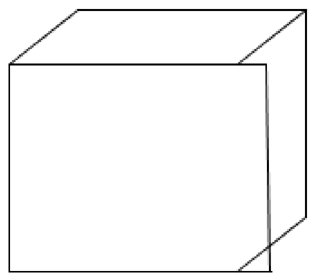
a)



b)



c)



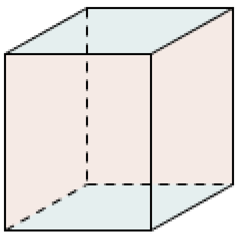
Os desenhos (a) e (b) não são reunião finita de polígonos planos. O desenho (c) não satisfaz o item (a).

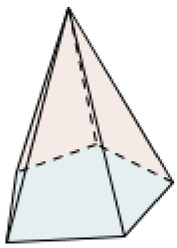
SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS

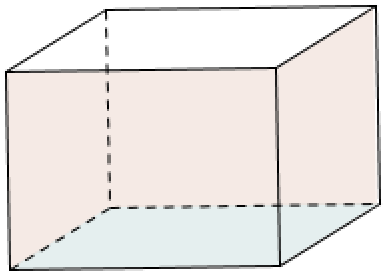
É uma figura poliédrica com as regiões poligonais determinadas pelos polígonos, denominados faces da superfície poliédrica, com as seguintes condições adicionais:

a) Cada aresta pertence à no máximo duas **faces**;

b) Existindo arestas que pertence a uma só face elas deve formar uma única poligonal fechada denominada **contorno**. Uma superfície sem contorno é chamada de **fechada**. Quando tiver contorno é chamada de **aberta.** Exemplos:



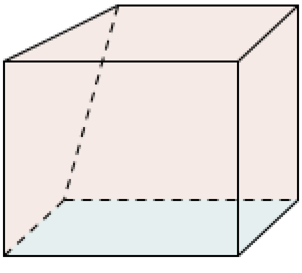


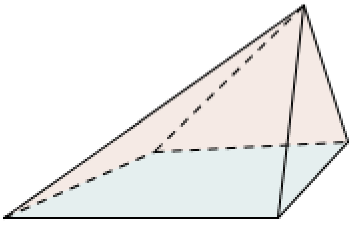


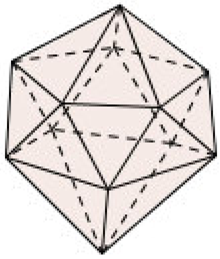
POLIEDROS

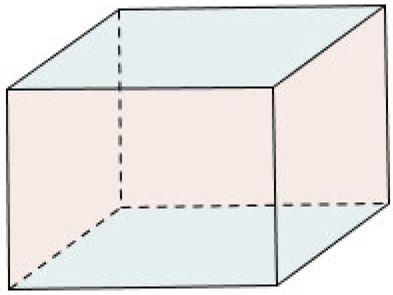
Poliedro é um sólido geométrico determinado por uma superfície poliédrica, fechada juntamente com o seu interior (sólido). Os pontos interiores à superfície poliédrica são chamados interior do poliedro. A fronteira do poliedro é exatamente a superfície poliédrica que o determina.

Exemplos:

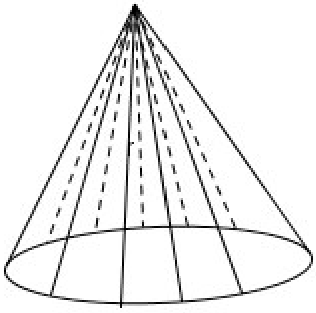


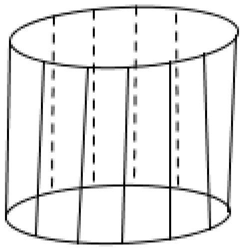


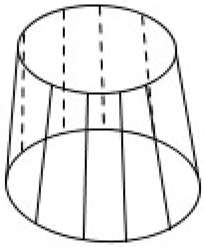




Exemplos de sólidos que não são poliedros.



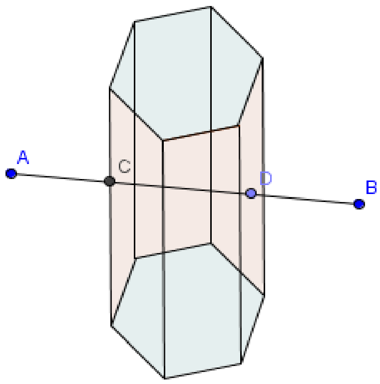


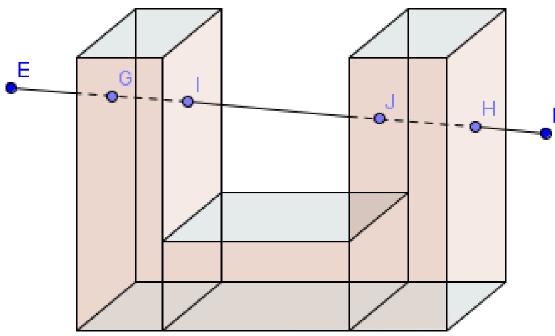


Os poliedros são classificados em **convexo e não convexo.**

Poliedro convexo; Dados quaisquer dois pontos pertencentes a um poliedro, o segmento que os contém deverá estar contido no poliedro. Caso contrário é não convexo.

FIGURA 1 **FIGURA 2**





Na figura 1, podemos observar que o segmento $\overline{AB}$ possui os pontos compreendidos entre C e D totalmente contido no poliedro. Assim podemos afirmar que este poliedro é convexo.

Na figura 2, podemos observar que o segmento de reta $\overline{EF}$ intercepta o poliedro em quatro pontos G, I, J e H, isto é, existem muitos pontos que pertencem ao segmento compreendido entre os pontos G e H, e que estão fora do poliedro, ou seja, todos os pontos compreendidos entre os pontos I e J. Assim sendo, este poliedro é chamado de não convexo.

Os poliedros são constituídos de **faces**, **arestas** e **vértices**.

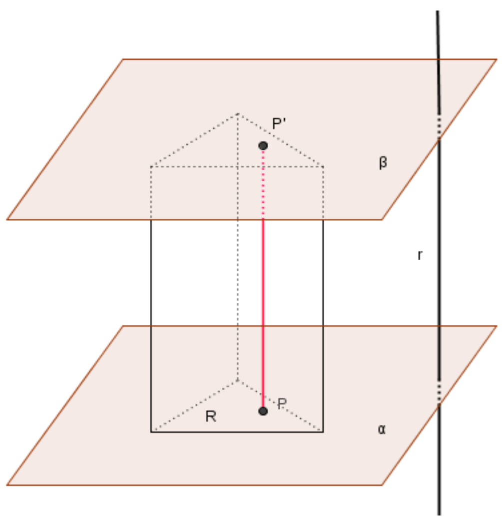
Faces são os lados do poliedro.

Arestas são as interseções de duas faces.

Vértices são interseções de três ou mais arestas.

PRISMA

Dados dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo R contido em α e uma reta r que intercepta α e β, mas não em β. Para cada ponto P da região R, vamos considerar o segmento PP', paralelo à reta r (P'Є β):



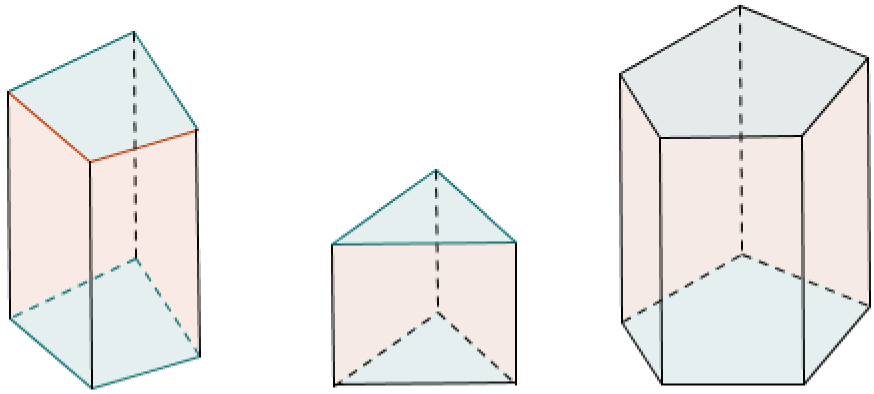
Chamamos de prisma, o conjunto de todos os segmentos congruentes PP' paralelos a r.

PRISMA RETO

O prisma é chamado de reto, quando suas arestas laterais são perpendiculares as bases que são paralelas, suas faces laterais são regiões poligonais denominados paralelogramos retângulos.

O prisma pode ser regular quando as arestas da base forem semelhantes, caso contrário não é regular.

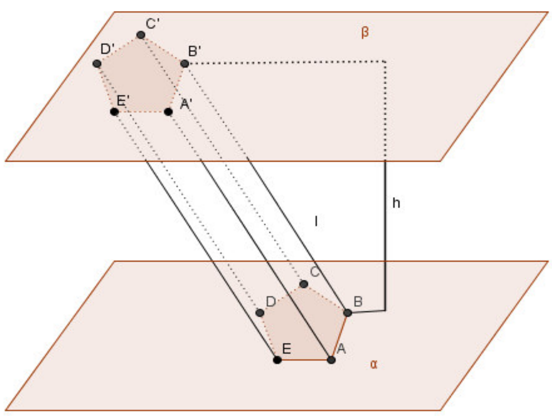
Exemplos:



:

PRSIMA OBLÍQUO

Observe a figura abaixo, onde os planos distintos, α e β, são paralelos e as arestas laterais também paralelas entre si mas não são perpendiculares às bases e suas faces laterais são regiões poligonais paralelogramos.

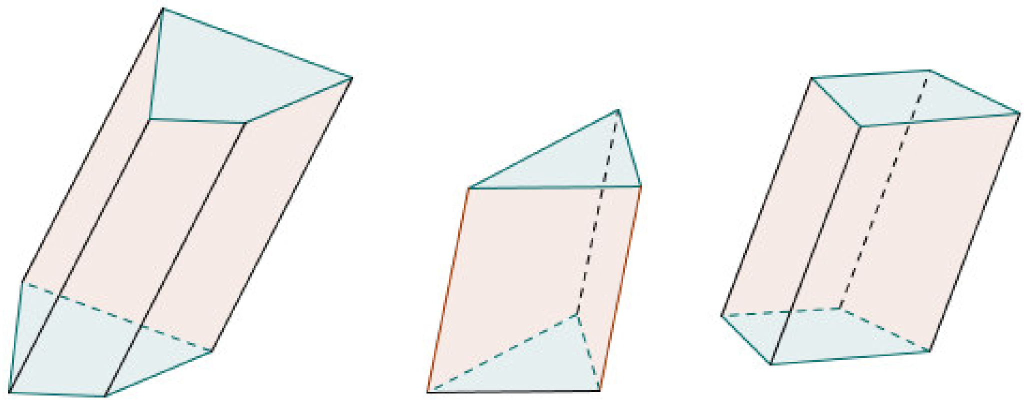


Nesta figura, podemos verificar que:

a) Os polígonos ABCDE e A’B’C’D’E’ são paralelos.

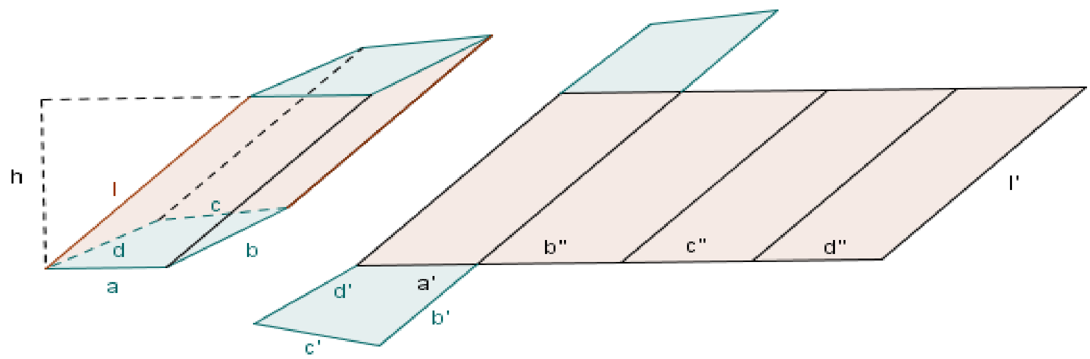
b) A medida da aresta lateral é maior que a medida da altura (menor distância entre os planos α e β).

Exemplos:



Verifique que as arestas laterais não são perpendiculares às bases, mas por sua vez assim como as bases são paralelas e congruentes entre si.

Observe também que a altura do prisma oblíquo é a distância entre os planos que contém as bases do prisma. Portanto diferentemente do prisma reto, é menor que a medida da aresta lateral. Exemplo de um prisma oblíquo como sólido geométrico e na forma planificado.



Prisma oblíquo (poliedro) Prisma oblíquo (planificado)

Obs.: a = a'

b = b' = b''

c = c' c''

d = d' = d''

$l = l'$

Verifique que as arestas laterais (l) são congruentes e maiores que a altura (h) e as arestas da base não são congruentes.

Logo; a área lateral é formada pela união das três faces laterais que são paralelogramos não retângulos, portanto a área do paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura. Logo a área lateral é: $S_l = h.l + h1.l + h2.l$

$S_l = l(h + h1 + h2)$.

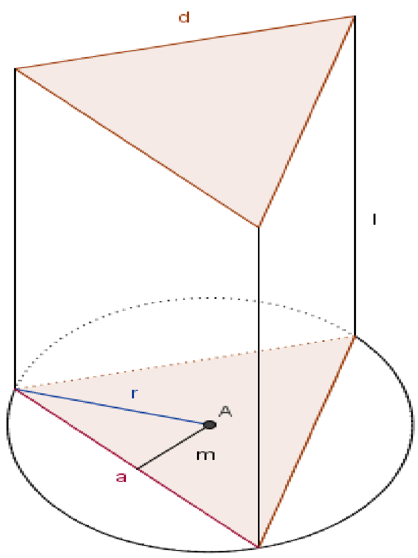
Área total: (St) $St = 2S_b + S_l$, onde S_b = área da base.

Volume (V) $V = S_b.H$

VAMOS ESTUDAR MAIS UM POUCO SOBRE PRISMAS

O nome do prisma é dado de acordo o número de arestas da base. Se a base do prisma for um quadrilátero, o chamaremos de prisma convexo quadrangular, se a base for um triângulo, o chamaremos de triangular, se for um pentágono, o chamaremos de pentagonal e assim por diante. Se as arestas da base tiverem as mesmas medidas , diremos que o prisma é regular.

A base de um prisma convexo regular está sempre inscrito ou circunscrito a uma circunferência, isto quer dizer que o cálculo da área base de um prisma regular, está sempre relacionada a medida do raio desta circunferência que o inscreve ou circunscreve. Se o prisma for dito convexo e triangular regular, esse triângulo é eqüilátero, a área de sua base é $S_b = 3.\dfrac{a.m}{2}$, onde, a = aresta da base e m = a distância do centro do triângulo ao ponto médio da aresta da base, que é chamado de apótema da base.



Onde A = centro da circunferência;

r = raio da circunferência;

a = aresta da base do prisma;

m = distância de **A** até **a;**

l = aresta lateral do prisma.

Verifique que m, r e $\frac{a}{2}$ formam um triângulo retângulo, onde r é a hipotenusa, m e $\frac{a}{2}$ são os catetos.

Como: $r^2 = m^2 + \frac{a^2}{2^2} \Rightarrow \frac{a^2}{2^2} = r^2 - m^2 \Rightarrow \frac{a}{2} = \sqrt{r^2 - m^2} \Rightarrow$ $a = 2\sqrt{r^2 - m^2}$ e $S_b = 3\frac{a.m}{2}$, teremos $S_b = 3.2\frac{\sqrt{r^2 - m}}{2}.m \Rightarrow$ $S_b = 3m\sqrt{r^2 - m^2}$

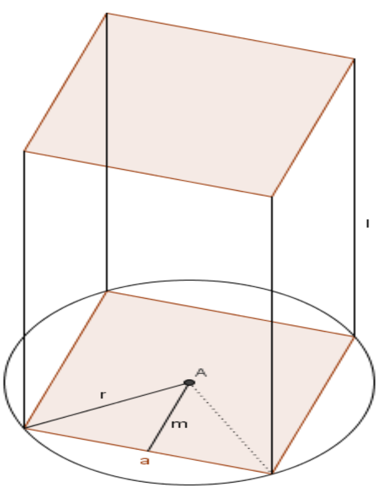
Podemos observar que este cálculo é em função do raio e do apótema da base. Podemos ter o mesmo comportamento em relação à aresta da base e o raio, assim como em relação a aresta da base e o apótema.

Verificamos ainda que as arestas laterais têm as mesmas medidas por prisma ser regular e, assim sendo a área lateral pode ser definida por **S_l = n.a.l**, onde n é o número de faces laterais, a é a aresta da base e l é a aresta lateral.

A área total é a soma das áreas das faces e das bases do prisma. Assim sendo, área total de um prisma convexo regular é dada pela fórmula **$S_t = 2S_b + n.S_l$.** OBS: Temos $2S_b$, porque as duas bases de um prisma devem ser congruentes.

E o volume é o produto da medida da área da base pela altura que no prisma corresponde a aresta lateral, logo **$V = S_b.l$.**

Se o prisma for convexo regular quadrangular, temos uma base quadrada. Assim $Sb = 4\frac{a.m}{2} \Rightarrow S_b = 2a.m$.



Onde: a = aresta da base do prisma.
l = aresta lateral ou altura do prisma.
m = apótema da base do prisma.
r = raio da circunferência que circunscreve a base do prisma.
A = centro da base do prisma

Podemos observar que os segmentos r, m e $\frac{a}{2}$ formam um triângulo retângulo.

Como a base do prisma quadrangular regular é formada por quatro triângulos congruentes, a área da base é $S_b = 4\frac{a.m}{2}$, ou seja, $S_b = 2a.m$.Como $r^2 = m^2 + (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow$ $a = 2\sqrt{r^2 - m^2}$ e cada triângulo contido na base do prisma tem área, $S_b = \frac{a.m}{2}$, teremos, $S_b = 4m\sqrt{r^2 - m}$, em função do raio e do apótema da base do prisma.

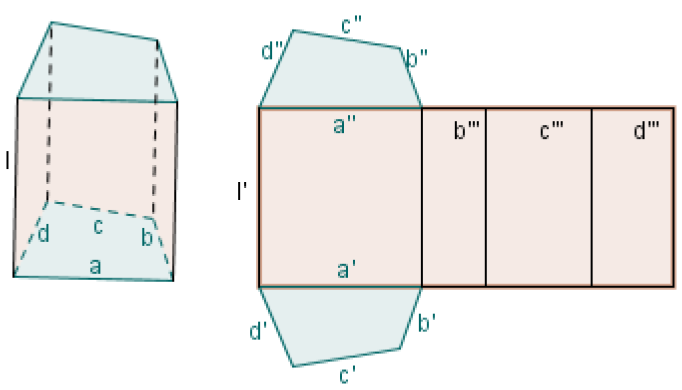
De modo geral para se calcular a área da base usa a fórmula $\mathbf{S_b = n\frac{a.m}{2}}$, onde n é o número de triângulos congruentes existentes na base do prisma e a área lateral (S_l), $\mathbf{S_l = n.a.l}$ e o volume (V), $\mathbf{V = S_b.h}$. Assim:

a) Se a base for um triangular regular, **n** = 3.

b) Se a base for quadrangular regular, **n** = 4.

c) Se a base for pentagonal regular, **n** = 5, e assim por diante.

Para o prisma reto não regular, temos as arestas da base não congruentes, portanto os paralelogramos que formam as faces laterais, também não são congruentes, portanto suas medidas são diferentes. Exemplo:



Prisma (poliedro) Prisma (planificado)

Obs.: a = a’ = a” = a’’’

b = b’ = b” = b’’’

c = c’ = c” = c’’’

d = d’ = d” = d’’’

l = l’

Assim sendo, a área lateral (S_l) $S_l = l(a + b + c + d)$. Genericamente podemos considerar para se calcular a área lateral de um prisma reto irregular, da seguinte maneira: $S_l = l(a + b + c + ...n)$.

Área total (S_t) $S_t = 2S_b + S_l$, sendo S_b = área da base.

Volume (V) $V= S_b.l$.

Agora vamos pensar um pouco:

a) Que tipo de polígono compõe as faces laterais de um prisma oblíquo?

b) Por que a medida da altura é sempre menor que da aresta lateral num polígono oblíquo?

Vamos construir prismas e calcular algumas de suas medidas:

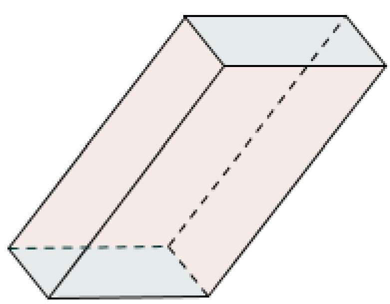
1) Construir um prisma de base hexagonal regular, cuja altura é $\sqrt{3}$ m e está inscrito numa circunferência de raio 2m, calcular sua área total e seu volume.

2) Um prisma pentagonal regular tem de aresta da base 6 cm. Calcule sua altura, área total e volume, sabendo que sua área lateral mede 300 cm^2.

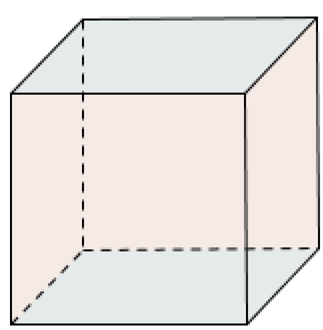
3) Será possível construir um prisma reto, cujas arestas da base medem respectivamente 4, 6, 9 e 5 cm? Qual será sua área lateral sabendo que sua altura mede 10 cm?

PARALELEPÍPEDO

É um poliedro cujas bases são paralelogramos. Eles podem ser **oblíquo ou reto.**



Paralelepípedo oblíquo, bases paralelas, Vértices opostos congruentes, arestas laterais paralelas e não perpendiculares as bases.



Paralelepípedo reto, bases paralelas, vértices todos congruentes e retos, arestas laterais perpendiculares às bases.

Na hipótese de o paralelepípedo reto ter bases retangulares, ele é chamado de paralelepípedo reto-retângulo. Exemplos: figura nº 1

Figura nº1

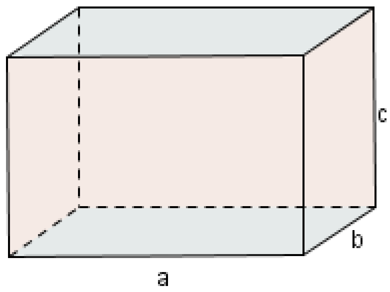
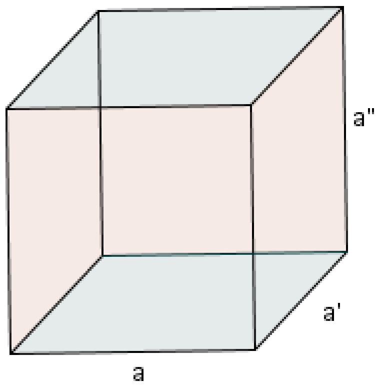


Figura nº2

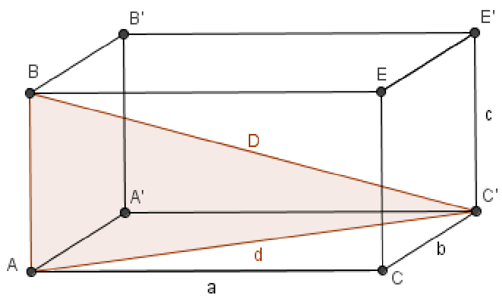


a = a' = a''

Um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas são congruentes recebe o nome de cubo ou hexaedro regular. Exemplo: figura nº2 que estudaremos logo a seguir.

DIAGONAL DE UM PARALELEPÍPEDO RETO–RETÂNGULO

Observe o paralelepípedo de dimensões **a, b** e **c**:



Se considerarmos a face AA'CC' temos:

$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ **$d = \sqrt{a^2+b^2}$**, onde **d** é a diagonal da face.

Se considerarmos o triângulo ABC', temos:

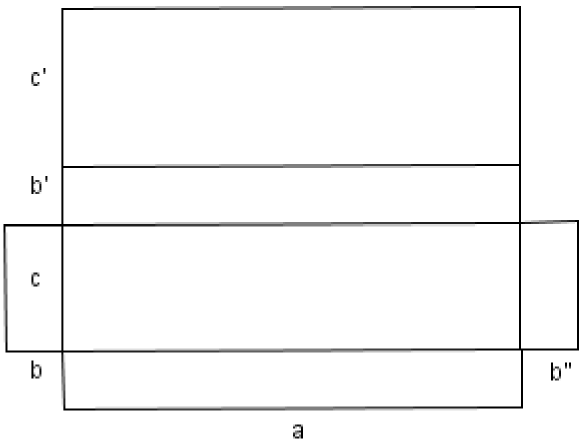
$D^2 = d^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$ **$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$**, onde **D** é diagonal do paralelepípedo.

ÁREA TOTAL DO PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO

Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas. Assim temos:

$A_t = 2(ab + ac + bc)$, onde A_t = área total.

O paralelepípedo reto-retângulo planificado corresponde justamente a sua superfície poliédrica.



Lembre-se que: **b = b' = b"** e **c = c'**

A área lateral **$A_l = 2(bc + ac)$,** onde A_l = área lateral.

Volume do paralelepípedo reto-retângulo**: $V_{paral} = a.b.c$**, onde V_{paral} = volume.

Agora vamos pensar um pouco:

a) Há outras planificações de paralelepípedo reto-retângulo?

b) No máximo quantos tipos de retângulos podem ter em um paralelepípedo reto-retângulo? E qual a quantidade mínima de tipos de retângulos pode ter em paralelepípedo reto-retângulo?

c) Por que as fórmulas da área e de volume só funcionam em paralelepípedo reto-retângulo e não em paralelepípedo oblíquo?

d) Podemos colocar dois retângulos congruentes juntos e depois outros dois juntos? Por quê?

e) Que denominação recebe um paralelepípedo reto-retângulo cujas suas faces são quadrados?

Vamos resolver os exercícios abaixo:

1) Qual é o volume de concreto que se gasta para fazer 10 degraus, sabendo que cada degrau tem 1 m de comprimento, 12 cm de altura e 30 cm de largura?

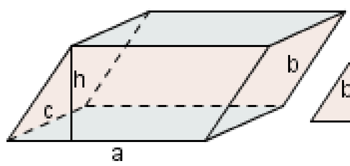
2) O quintal de uma casa tem forma retangular cujas medidas são 10 m de largura por 14 m de comprimento. Se for feito um revestimento com uma mistura de areia e cimento de 3 cm de espessura. Qual é o volume da mistura utilizada nesse revestimento?

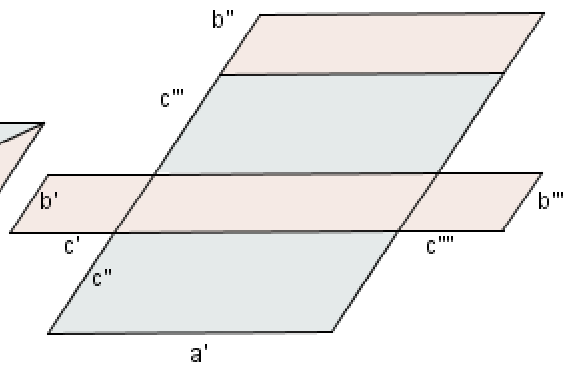
PARALELEPÍPEDO OBLÍQUO

Temos na figura nº2, o paralelepípedo oblíquo planificado. Observe que todos os lados dos polígonos que formam seus lados possuem lados e ângulos opostos congruentes.

Na figura nº1, temos a figura de um paralelepípedo oblíquo. Observe que todos as suas faces, arestas são paralelas e congruentes e seus vértices opostos também são congruentes.

FIGURA Nº1 **FIGURA Nº2**





Obs.: **a = a'** - **b = b' = b'' = b'''** e **c = c' = c'' = c''' = c''''**

e **h** é igual a altura do paralelepípedo obliquo, que neste caso não corresponde a aresta lateral como no caso do paralelepípedo reto, a altura do paralelepípedo obliquo é distância entre as duas bases como podemos observar na figura nº1.

Na forma planificada, observamos que cada face do paralelepípedo oblíquo tem uma altura diferente, portanto temos que trabalhar com todas as diferentes alturas, assim sendo, $\mathbf{h \neq h' \neq h'' \neq \dots h^{n'}}$.

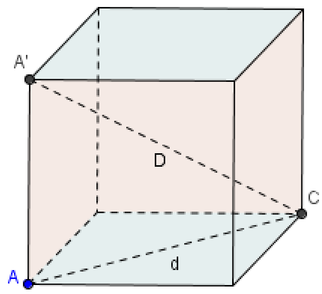
Área total é igual; **$A_t = 2(a.h + a.h' + b.h')$.**

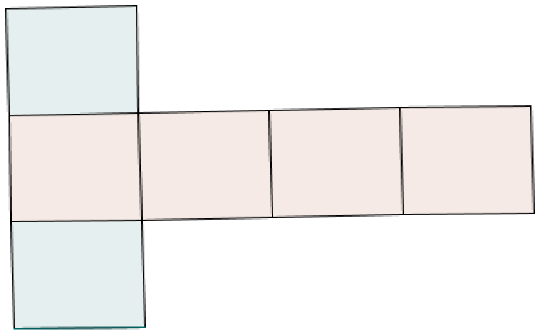
Área lateral é igual; **$A_l = 2h'(a + b)$.**

Volume é igual; **$V_{paral} = a.h.h''$**, onde **a = aresta da base, h = altura da base** (distância entre as arestas paralelas da base), **h'' = altura do paralelepípedo oblíquo.**

CUBO OU HEXAEDRO

CUBO é um poliedro convexo regular, onde suas arestas são congruentes e perpendiculares entre si, seus vértices são retângulos, possui seis faces, oito vértices e doze arestas. É um caso especial de prisma.





Cubo (poliedro) Cubo (planificado)

OBS: a) Todas as arestas têm as mesmas medidas (a).

b) A distância de AH = diagonal da base (d).

c) A distância de EH = diagonal de cubo (D).

Podemos verificar que:

a) Todas as suas arestas têm as mesmas medidas, logo a área da base é: **$S_b = a^2$.**

b) A área lateral é: $S_l = 4.S_b$, pois cada face tem a mesma área , então: **$S_l = 4.a^2$.**

c) O volume é: $S_b.a$, logo, **$V = a^3$.**

e) A diagonal da base é: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow$

$d = a\sqrt{2}$

f) A diagonal do cubo é: $D^2 = d^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2 \Rightarrow$

$D = a\sqrt{3}$

Agora localize:

a) demais diagonais da base.

b) demais diagonais do cubo

Atividades

1) Construa um cubo cuja soma de suas arestas é igual a 72 cm e calcule seu volume.

2) Deseja-se construir 28 caixas de madeira em forma de cubos com arestas de 12 cm. Quantos m^2 de madeira serão necessários para realizar o trabalho?

3) Represente uma caixa d'água cúbica que tem 3 m de aresta interna e calcule sua capacidade em litros, sabendo que 1 dm^3 = l litro.

PIRÂMIDE

O Antigo império Egípcio presenciou o surgimento do culto solar, sobre uma pirâmide quando o deus criador apareceu pela primeira vez. Mais tarde o culto solar tornou-se dominante com ele e teve início a construção de templos do sol. Com a terceira dinastia, deu-se o início das construções de pirâmides. O faraó Dsojer mandou construir a primeira pirâmide em Sacara. Imhotep, conhecido por sua inteligência, foi arquiteto e supervisionou a construção da pirâmide. A primeira pirâmide, chamada de pirâmide de degraus, é em essência, seis mastabas, uma sobre a outra, com cada nível menor que o anterior. Até hoje, ninguém sabe dizer o que uma pirâmide pretende representar, mas alguns arqueólogos imaginam que a idéia era de que o monumento através de seus degraus os levava ao céu.

Muitas outras pirâmides foram construídas em forma de degraus. Snefru, o primeiro faraó da Quarta Dinastia, terminou a construção da pirâmide de seu pai Huni em Meidum. A pirâmide começou como a de degraus, mas Snefru acabou alisando suas laterais, dando estilo do formato de pirâmide nos dias de hoje.

Snefru deu início a outros projetos, sendo que o primeiro desabou sobre seu próprio peso. O segundo, "a pirâmide inclinada", existe até hoje em Dashur. O ângulo das laterais a partir de sua metade muda, ninguém sabe ao certo o por quê, mas Alguns arquitetos tinham como teoria, o medo de desabamento, conforme a primeira pirâmide. Porém é de conhecimento de todos que Snefru morreu durante a construção desta pirâmide, por isso o ângulo foi reduzido para acelerar os trabalhos. Outra teoria é que a pirâmide inclinada seria um gigantesco obelisco, projetado para representar um dos raios do sol. De qualquer forma, a pirâmide inclinada exibia as laterais lisas, que iriam distinguir as pirâmides verdadeiras das pirâmides de degraus. Também localizada em

Dashur, está a pirâmide vermelha, também lisa e revestida de pedra polida, que as outras pirâmides viriam a copiar. O nome desse monumento se dá, devido à cor que ele adquire ao por do sol.

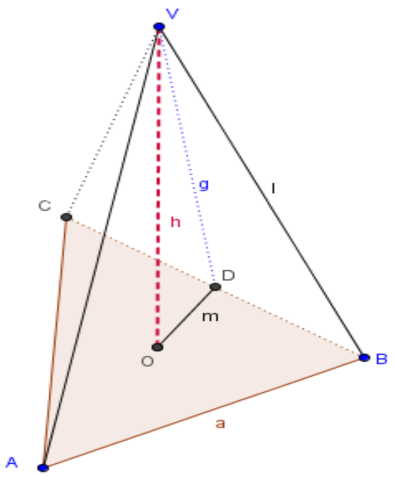
O ápice destas construções se dá com a construção da pirâmide de Khufu (Kheops) em Rostja (Gizé). A maior que ainda resiste tinha originalmente cerca de 145 metros de altura com laterais de 2.300.000 blocos de calcário. Inteiramente revestida de calcário de Tura trazido para a construção a partir de On (Heliópolis). A construção de pirâmides continuou por todo o Antigo Império e por alguns dos primeiros faraós do Médio Império. Existem no Egito cerca de 50 pirâmides reais e muitas outras de menores portes construídas para a nobreza secundária.

Alguns historiadores relatam que a maior parte da riqueza do Egito era destinada a construções de pirâmides. Assim a grandiosidade das pirâmides marcava a posição do poder de cada faraó sobre a terra e representava o poder de riqueza que eles tinham. Mas as verbas destinadas a construções de pirâmides foram diminuindo aos poucos, até serem substituídas por templo do sol.

Agora vamos estudar um pouco sobre as pirâmides no ponto de vista geométrico.

A exemplo do prisma acontece com a pirâmide, ou seja, a denominação da pirâmide está diretamente relacionada ao número de arestas da base. Se as faces laterais tiverem as mesmas medidas, diremos que a pirâmide é regular.

As faces laterais de uma pirâmide sempre têm o formato de um triângulo, ou seja, as faces laterais de uma pirâmide são triangulares. A base de uma pirâmide regular está sempre inscrita ou circunscrita numa circunferência.



onde: V = vértice da pirâmide.
h = altura da pirâmide.
O = centro da base da pirâmide;
m = apótema da base da pirâmide.
g = apótema da pirâmide.
a = aresta da base da pirâmide.
l = aresta lateral da pirâmide.

Podemos verificar, ainda, que:

a) O triângulo VOD é retângulo em O. $\underline{\mathbf{g^2 = m^2 + h^2}}$

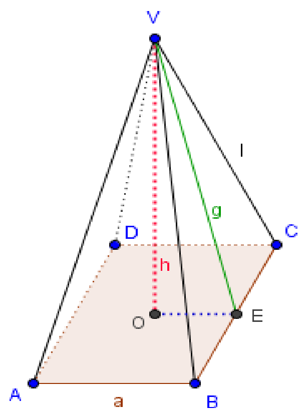
b) O triângulo VDB é retângulo em D. $\mathbf{l^2 = g^2 + (\frac{a}{2})^2}$

c) A distância de AO = OB = OC = raio da circunferência circunscrita.

E para calcular a área lateral (S_l) temos $\underline{\mathbf{S_l = n\frac{a.g}{2}}}$, onde a = aresta da base, g = apótema da pirâmide e n = números de triângulos que formam as faces laterais da pirâmide, área da base (S_b) temos $\underline{\mathbf{S_b = n.\frac{a.m}{2}}}$, onde a = aresta da base, m = apótema da base e n = número de triângulos que O pode formar com os vértices da base. No caso da figura acima, podemos verificar que existem 3 triângulos formados por O. Então vejamos: OAB, OBC e OAC, logo n = 3.

Para calcular o volume(V) de uma pirâmide, usamos a fórmula: $\underline{\mathbf{V = \frac{1}{3}S_b.h}}$, onde S_b = área da base.

Com um quadrado e quatro triângulos podemos construímos uma pirâmide quadrangular e diremos que a pirâmide é quadrangular regular se os triângulos forem congruentes.



onde: h = altura da pirâmide.

l = aresta lateral da pirâmide.

m = apótema da base da pirâmide.

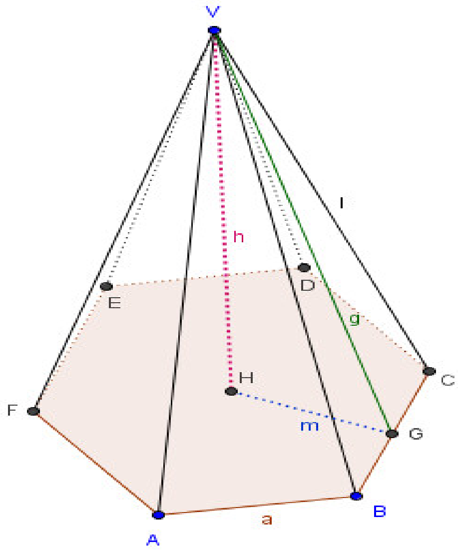
g = apótema da pirâmide.

V = vértice da pirâmide.

O = centro da base da pirâmide.

A = aresta da base da pirâmide.

Com um hexágono e seis triângulos eqüiláteros ou isósceles, construiremos uma pirâmide hexagonal regular e se os triângulos forem congruentes esta pirâmide será regular, conforme figura abaixo.



onde:

V = vértice da pirâmide.

l = aresta lateral da pirâmide.

h = altura da pirâmide.

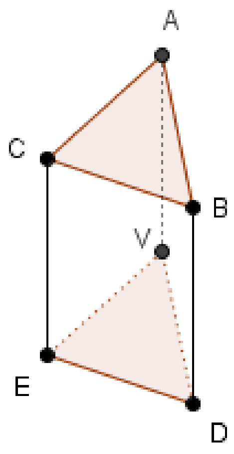
m = apótema da base da pirâmide.

g = apótema da pirâmide.

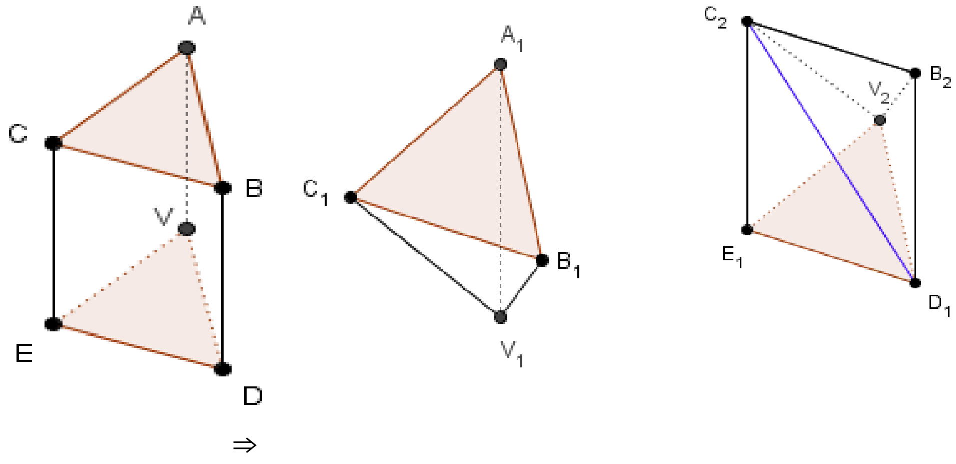
a = aresta da base da pirâmide.

E se a base da pirâmide for um pentágono, a pirâmide será pentagonal, se for octógono, a pirâmide será octogonal, assim por diante.

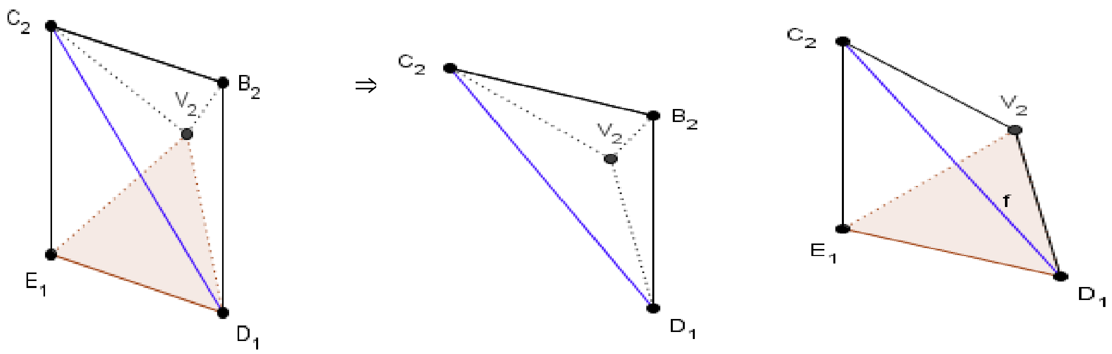
Agora vamos fazer a demonstração do por que o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma. Temos abaixo um prisma regular cujas medidas das arestas da base é igual à medida da aresta lateral, determinado pelos pontos (A, B, C, D, E e V):



Agora através de um corte, dividimos o prisma em duas pirâmides, sendo uma triangular (A_1, B_1,C_1 e V_1) e outro quadrangular (B_2, C_2, E_1, D_1 e V_2).



Verifique que uma diagonal (C_2, D_1) divide o quadrado (B_2, C_2, E_1 e D_1) em dois triângulos congruentes, ou seja, em (B_2, C_2 e D_1) e (C_2, D_1 e E_1). Conseqüentemente, o plano (C_2, V_2 e D_1) divide a pirâmide quadrangular em duas pirâmides triangulares (B_2, C_2, D_1 e V_2) e (C_2, D_1, E_1 e V_2) de volumes iguais, pois ambas tem as bases congruentes e a mesma altura.



Como as bases (superior e inferior) do prisma são congruentes, as pirâmides (A1, B1, C1, e V1) e (E2, D2, V3 e C3) tem o mesmo volume, pois as bases possuem as mesmas áreas e suas alturas são congruentes. Como os volumes da três pirâmides da base triangular são iguais, conclui-se que o volume de uma pirâmide é igual a um terço do volume de um prisma que tenha mesma base e altura, ou seja, o volume de uma pirâmide é $\underline{\mathbf{V_{pirâmide}} = \frac{1}{3}.\mathbf{S_b.h},}$ onde S_b = área da base e h = altura da pirâmide.

OBS: Para se calcular a área da base, segue os mesmos critérios do calculo da área da base de um prisma, (conforme vimos no texto sobre prisma).

Agora vamos pensar um pouco

a) Como ficam as planificações das pirâmides?

b) As pirâmides representavam o poder da época. Na atualidade ainda há tentativa para demonstrar o poder a demais nações ou a posteridade?

Que tal resolver algumas atividades

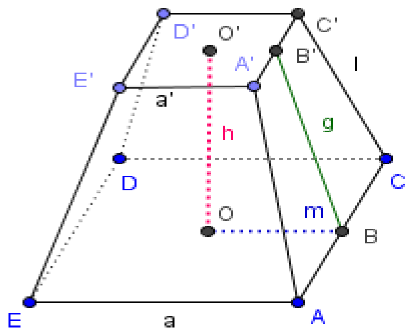
1) Construir uma pirâmide hexagonal regular, sabendo que a aresta da base mede 6 cm e a aresta lateral mede 10 cm e calcule a medida do apótema da base assim como seu volume.

2) Uma pirâmide de base quadrada onde sua altura mede 8 cm, calcule a medida da aresta da base, sabendo que seu volume é 200 cm^3.

3) Uma pirâmide e um prisma têm a mesma base. A altura da pirâmide vale o sêxtuplo da altura do prisma. Sendo V_1 o volume da pirâmide e V_2 o volume do prisma, mostre que $V_1 = 2V_2$.

TRONCO DE PIRÂMIDE

Tronco de pirâmide regular é formado por duas bases paralelas, sendo uma menor e outra maior, e suas faces laterais são formadas por trapézios regulares congruentes. A denominação de um troco de pirâmide é dada conforme o número de arestas da base.



onde: h = altura do tronco de pirâmide.

a = aresta da base maior do tronco da pirâmide.

a' = aresta da base menor do tronco da pirâmide.

AA'CC', CC'DD', DD'EE' e AA'EE' (trapézios semelhantes) = faces laterais do tronco da pirâmide.

OB = metade da medida da aresta da base maior do tronco da pirâmide.

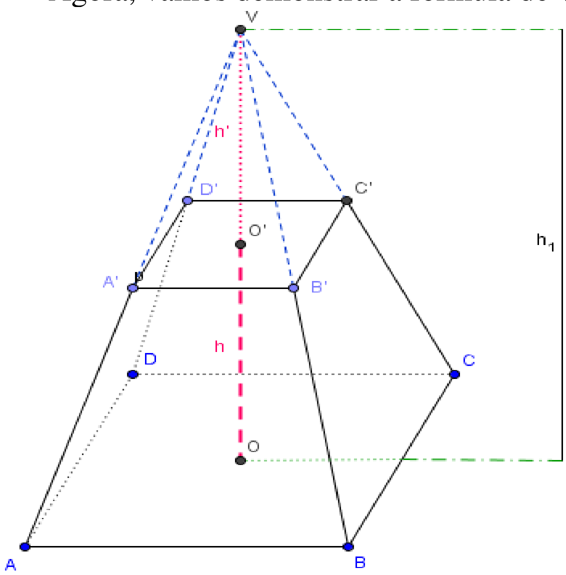
O’B’ = metade da medida da aresta da base menor do tronco da pirâmide.

BB’ =altura da face lateral do tronco de pirâmide.

Podemos, ainda, verificar que cada face lateral de um tronco de pirâmide é um trapézio. Para calcular a área de um trapézio, determinamos o produto da média aritmética das bases pela altura, mas não podemos confundir a altura do trapézio de suas faces laterais com a altura do tronco. Se o tronco de pirâmide for regular, suas bases são proporcionais e suas faces laterais terão medidas iguais, Assim sendo, as arestas da base maior terão as mesmas medidas, assim como as arestas da base menor, e as faces laterais serão constituídas por trapézios congruentes, ou seja, com áreas iguais. Vamos considerar BB’ = g que é a altura da face lateral (trapézio) e assim teremos $\underline{S_l = n\frac{(a+a')g}{2}}$, onde n é o número de faces laterais do tronco de pirâmide, a e a’ são as bases do trapézio e g = altura do trapézio.

E área total do tronco da pirâmide é $\underline{S_t = S_B + S_b + S_l}$, onde S_B = área da base maior, S_b = área da base menor e S_l = área lateral do tronco de pirâmide.

Agora, vamos demonstrar a fórmula de volume de tranco de pirâmide (V_t):



Podemos observar que $\underline{h_1 = h' + h}$ e que os triângulos VOA e VO’A’ são congruentes.

Assim, teremos $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{h_1}{h'}$

E, ainda, os pontos VA’B’C’D’ e VABCD formam duas pirâmides, cujo vértice é comum as duas pirâmides, onde h_1 é altura da pirâmide maior e h’ é a altura da pirâmide menor.

Podemos observar, ainda, que os polígonos A'B'C'D' e ABCD são semelhantes, pois pertencem ao planos paralelos e a razão entre as áreas desses polígonos é igual ao quadrado da razão entre as alturas das duas pirâmides, ou seja, $\frac{A'B'C'D'}{ABCD} = \frac{(h')^2}{(h_1)^2}$ e se os polígonos que formam as bases das duas pirâmides forem quadrados, as arestas de cada polígono são congruentes, logo, a área de um quadrado é l^2. Chamando a área da base menor b e a área da base maior B, temos $\frac{b}{B} = (\frac{h'}{h1})^2$.

Assim o volume total do tronco de pirâmide é $V_t = \frac{1}{3}$ [B.h_1 – b.h'] $\Rightarrow V_t = \frac{1}{3}$[B.(h' + h) – b.h'] $\Rightarrow V_t = \frac{1}{3}$[B.h' + B.h – b.h'] $\Rightarrow V_t = \frac{1}{3}$[B.h + (B – b)h'] (1)

E como $\frac{B}{b} = (\frac{h_1}{h'})^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h'} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \Rightarrow \frac{h' + h}{h'} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} \Rightarrow h'.\sqrt{b} + h.\sqrt{b} = h'.\sqrt{B} \Rightarrow$ $h'.\sqrt{B} - h'.\sqrt{b} = h\sqrt{b} \Rightarrow h'(\sqrt{B} - \sqrt{b}) = h\sqrt{b} \Rightarrow h' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$

Substituindo em (1), teremos $V_t = \frac{1}{3}[B.h + (B - b).(\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}})]$ e agora substituindo $(B - b) = (\sqrt{B} - \sqrt{b}).(\sqrt{B} + \sqrt{b})$, teremos $V_t = \frac{1}{3}[B.h + (\sqrt{B} - \sqrt{b})(\sqrt{B} + \sqrt{b}).(\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}})] \Rightarrow V_t = \frac{1}{3}[B.h + (\sqrt{B} + \sqrt{b}).h\sqrt{b}] \Rightarrow V_t = \frac{1}{3}.[B + (\sqrt{B} + \sqrt{b}).\sqrt{b}]$ $\Rightarrow V_t = \frac{1}{3}[h.(B + \sqrt{B.b} + b)] \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{V_t = \frac{h}{3}(B + b\ \sqrt{B.b})}}$

Agora vamos pensar um pouco:

a) Por que no tronco de uma pirâmide regular, as duas bases são semelhantes?

b) Há outra forma para determinar o volume do tronco de pirâmide? Caso afirmativo, como podemos proceder?

Atividades

1) Construa um tronco de pirâmide cuja altura mede 6 cm e suas bases são quadrados de perímetros 56 cm e 32 cm e calcule seu volume.

2) Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem 2.814 cm^3 de volume. A altura do tronco mede 30 cm e o lado do quadrado da base maior mede 20 cm. Então, o lado do quadrado da base menor mede?

Após muitos estudos e trabalhos com poliedros, podemos elaborar uma tabela com vários poliedros e suas propriedades, assim como: número de arestas, número de faces e número de vértices.

POLIEDRO	ARESTAS (A)	FACES (F)	VÉRTICES (V)
Tetraedro	6	4	4
Hexaedro	12	6	8
Octaedro	12	8	6
Dodecaedro	30	12	20
Icosaedro	30	20	12

Podemos verificar uma certa relação constante entre estas propriedades relacionadas na tabela acima. Esta relação é válida para todos os poliedros, menos os que tem furos. $F + V = A + 2$.

Esta relação foi demonstrada por **EULER** por ocasião da apresentação dos poliedros convexos regulares.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER

Segundo Zoroastro Azambuja Filho (revista do professor de matemática 47, 2001)

Para demonstrar o Teorema de Euler começamos escolhendo uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P. Tomamos também um plano H, que não intercepta P e é perpendicular a reta r. O plano H será chamado plano horizontal e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas retas verticais. H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P. Este será chamado o semi-espaço superior; diremos que seus pontos estão acima de H. Para melhor ilustrar nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando à pino sobre o semi-espaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto x do semi-espaço superior corresponde um ponto x em H, chamado a sombra de x, obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x. A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de X.

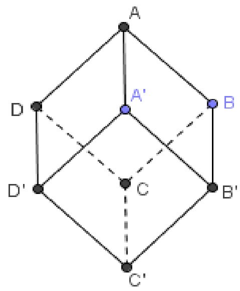
A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazia) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

A observação acima pode ser reformulada do seguinte modo: cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou de dois pontos de P.

Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno γ' é a sombra de uma poligonal fechada γ' formada por arestas de P. Cada ponto de γ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a γ). A poligonal γ é chamada o contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a γ') é sombra de dois pontos de P. dados dois pontos de P que têm mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto iluminado; o mais baixo será chamado sombrio.

Assim, o poliedro P se decompõe em três partes disjuntas: o conjunto dos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente γ.

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces AA', B'B, AA', D'D e ABCD ficarão iluminadas e as outras três sombrias. O contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A'.



Se P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente γ. Cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1. Em outras palavras, a regra que associa a cada ponto x de P_1 sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'. Usaremos a notação P_1 para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em P_1, isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_1, formado pelos pontos sombrios de P mais o contorno aparente γ. A regra que associa a cada ponto γ de P_2 sua sombra γ' também é uma correspondência biunívoca entre P_2 P'. Escreveremos P_2 para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, isto é, contidas em P_2.

Observa-se que se decompusermos cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números F, A e V individualmente, mas a expressão $F - A + V$ permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face os números F e A aumenta cada um de uma unidade e o número V não muda. Na expressão $F - A + V$, os acréscimos de F e A se cancelam. Portanto, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há de generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos. Esta hipótese será feita a partir de agora.

Como toda face tem três arestas e cada aresta pertence a duas faces, segue-se que $3F = 2A$ esta relação será usada logo mais.

Vamos agora calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P.

Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a dois ângulos retos , isto é, a π radianos. Portanto $S = \pi.F$. como $F = 3F - 2 = 2A - 2F$, podemos escrever. $S = 2\pi.A - 2\pi.F$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular S_1, partimos da observação super-evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triângulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T'. Daí resulta que S_1 é igual a soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo P'_1, sombra de P_1. Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértices a vértices, em vez de somá-lo triângulo por triângulo, como acima.

Seja V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente γ. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que V_0 também o número de vértices e de lados da poligonal γ', contorno do polígono convexo P'.

Em P_1 temos V_1 vértices interior (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno γ'. A soma dos ângulos que tem como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos (quatro ângulos retos) A soma de todos os ângulos que tem vértices sobre o contorno γ' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Segue-se que: $S_1 = 2\pi.V_1 + \pi(V_0 - 2)$.

Por um raciocínio inteiramente análogo, obteríamos: $S_2 = 2\pi.V_2 + \pi(V_0 - 2)$.

Somando estas duas igualdades, vem:

$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + v_1 + v_2) - 4\pi = 2\pi.v - 4\pi$.

Comparando com a igualdade $S = 2\pi.A - 2\pi.F$, acima, obtida e dividindo por 2π, resulta que $A - F = V - 2$, ou seja, **$F - A + V = 2$.**

COMO QURÍAMOS DEMONSTRAR.

POLIEDROS CONVEXOS REGULARES

Grandes filósofos e matemáticos dedicaram à vida ao estudo da geometria. Enquanto a escola pitagórica, por exemplo, tinha como lema: "Tudo são números", já a escola de Platão tinha escrito sobre a porta: "Não entre aqui ninguém que não seja geométrico".

Sem dúvida, Platão foi o primeiro matemático a apresentar os cinco e somente cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Todos estes poliedros são chamados por convexos regulares por eles terem todas as faces congruentes, ou seja, com as mesmas medidas e todos os vértices com o mesmo número de arestas convergentes. Portanto, a eles se referiu no seu diálogo e passaram a ser chamados de sólidos de Platão ou sólidos platônicos.

Os sólidos platônicos são assim chamados porque as suas formas causaram uma grande admiração a Platão, filósofo grego, que os usou para descrever, do seu ponto de vista, o mundo perfeito. Deste modo, a natureza de todas as coisas tinha uma explicação. Tudo na natureza era constituído por cinco átomos diferentes, cada um deles com a forma de poliedro regular. Quatro desses átomos era a terra, o ar, a água e o fogo. O quinto era o átomo que constituía o cosmos, as estrelas e os planetas. Assim, Platão associou a cada poliedro regular um dos átomos:

- Se fossem quadradas, teríamos o cubo – elemento terra.
- Se fossem triângulos eqüiláteros, teríamos o tetraedro – elemento fogo; o octaedro – elemento ar e o icosaedro – elemento água.
- Se fossem pentágonos, teríamos o dodecaedro – simbolizava o Universo.

Mesmo que associação feita por Platão não tinha fundamentos, estes sólidos aparecem na arte e na natureza, na forma de cristais, organismos vivos, moléculas, entre outros.

Mais tarde, em 1596 Johannes Kepler, professor de matemática em Gratz (Áustria), publica aos 25 anos, uma das suas obras de referência, o "Mysterium Comographicum". Aí é expressa a idéia de que a posição dos planetas no sistema solar não é aleatória. Kepler, uma pessoa protestante, muito devoto de Deus, filho de uma família muito religiosa, tem uma visão quase pitagórica de um Universo cuja estrutura é de natureza matemática, e para quem era inconcebível um Deus que criava ao acaso (Vigoureux, 1997)

Nessa obra, Kepler apresenta o seu modelo de um sistema solar (heliocêntrico) em que órbitas planetárias, representadas por esferas, inscrevem nos poliedros regulares (os sólidos de Platão): o espaço entre as órbitas de Saturno e de Júpiter é ocupado por um cubo que, inscrito na esfera de Saturno, inscreve a órbita de Júpiter; analogamente o espaço entre as órbitas de Júpiter e Marte é ocupado por um tetraedro; entre Marte e Terra, um dodecaedro; entre a Terra e Vênus, um icosaedro; e finalmente entre Vênus e Mercúrio um octaedro.

Kepler, não desiste e estabeleceu uma conexão entre o Universo e a Geometria. Mas este modelo não reproduz, contudo, as distâncias corretas entre o Sol e os planetas. Mesmo assim Kepler lança-se aos cálculos cada vez mais complicados visando aproximar o seu modelo da realidade, já que acreditava profundamente num Universo organizado que seguia leis matemáticas e por isso divina. Kepler escreveu no seu Misterium Comographycum: "Eu pretendo provar que Deus criando o Universo dando regras à disposição dos Céus, teve em vista os cinco poliedros regulares da geometria, célebres desde Pitágoras e Platão, fixando, tendo em conta as suas dimensões, o número, as suas proporções e a relação entre os respectivos movimentos”.

Poliedros de Platão

Chama-se poliedro de Platão, ao poliedro que satisfaz as três condições:

a) Todas as suas faces possuem o mesmo número n de arestas;

b) Todos os seus vértices possuem o mesmo número m de arestas;

c) Satisfaz à relação de Euler (é euleriano).

Existem somente cinco tipos de poliedros de Platão.

Cada uma das F faces tem n arestas, e como cada aresta está em duas faces, assim: 2.A = n.F.

Cada um dos seus V vértices tem m arestas, e como cada aresta contém dois vértices, logo: 2.A = m.V

Como o poliedro é Euleriano, na relação de Euler, em função de A, teremos:

$$\frac{2A}{m}\text{-A} + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

Como vimos após a definição de poliedro, m≥3 e da definição de polígono n ≥ 3. Por outro lado m > 3 e n > 3, simultaneamente, sendo m e n inteiros não satisfazem o propósito em questão, visto que o primeiro membro seria menor ou igual a $\frac{1}{2}$ e o segundo é maior que $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{A}$ é positivo). Concluímos então que nos poliedros de Platão um dos números m ou n deve ser 3. Para m = 3, teremos triedros.

$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow$ n < 6. Sendo n ≥ 3 e inteiro, concluímos que n pode assumir os valores 3, 4 e 5. Resumindo temos:

m	n
3	3
3	4
3	5

Para n = 3, as faces são triangulares. Vem $\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$. Por analogia temos:

m	N
3	3
4	3
5	3

Assim sendo, concluímos que os poliedros de Platão são os que tem os pares m e n abaixo. E são portanto, somente cinco tipos.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Como conseqüência, para encontrar A, F e V de cada poliedro de Platão, basta substituir os pares m e n. Em resumo, tem-se:

M	n	A	F	V	NOME
3	3	6	4	4	Tetraedro
3	4	12	6	8	Hexaedro
3	5	30	12	20	Dodecaedro
4	3	12	8	6	Octaedro
5	3	30	20	12	Icosaedro

OBS: nF = mV

Poliedros Regulares

Um poliedro convexo é chamado regular quando:

a) Suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si;

b) Todos os seus vértices possuem o mesmo número m de arestas;

Da definição se conclui que todos os elementos de mesma natureza de um poliedro regular são congruentes entre si.

Como conseqüência da definição, temos somente cinco poliedros convexo regulares.

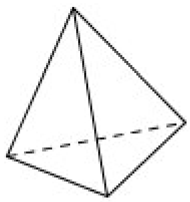
Demonstração:

a) Faces regulares e congruentes entre si, logo cada uma tem o mesmo número n de arestas;

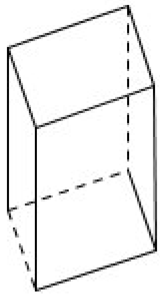
b) os vértices tem o mesmo número m de arestas;

c) Poliedro convexo é Euleriano.

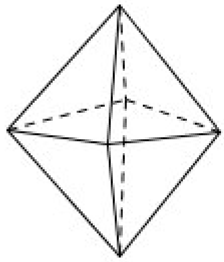
Pelas três conclusões anteriores temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e são somente cinco, ou seja:



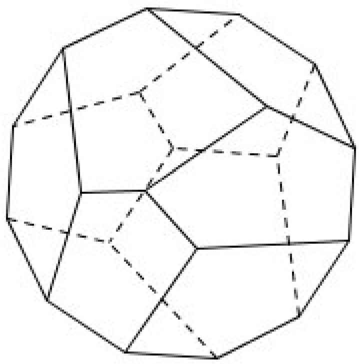
Tetraedro



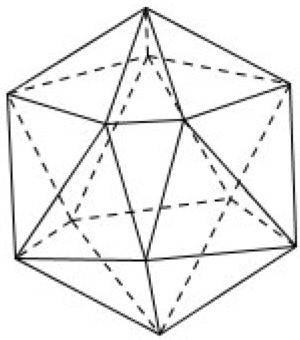
Hexaedro



Octaedro



Dodecaedro

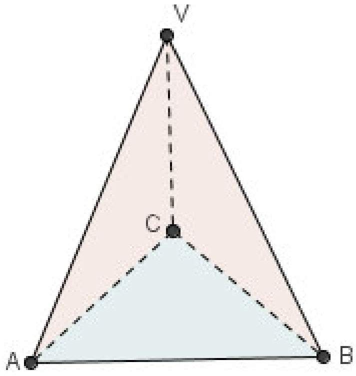


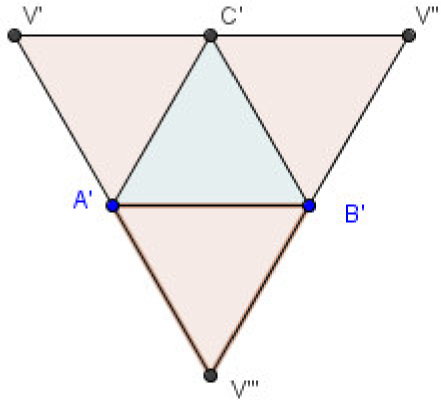
Icosaedro

Nem todos os poliedros de Platão são regulares pois nesses as arestas não precisam ser congruentes.

TETRAEDRO

É um poliedro regular com quatro faces sendo estes triângulos eqüiláteros, quatro vértices e seis arestas. O tetraedro pode formar-se a partir de um molde com quatro triângulos.





Tetraedro (poliedro) Tetraedro (planificado)

Obs: podemos verificar que na figura tetraedro (poliedro), não existem lados, somente arestas.

Na figura tetraedro (planificado), existem três arestas e seis lados.

O vértice V do tetraedro é a coincidência dos três vértices da figura (planificada) V', V'', V'''.

Quanto a sua área, temos:

$S_l = 3\frac{bh}{2}$, onde S_l = área lateral do tetraedro.

$S_t = 4\frac{bh}{2} \Rightarrow S_t = 2b.h$, onde S_t = área total do tetraedro.

E quanto ao volume, temos:

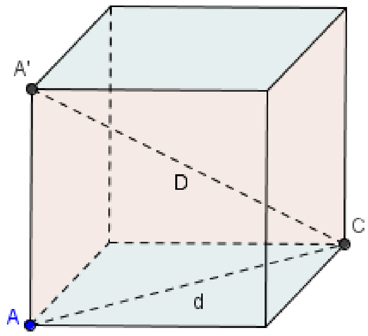
$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} S_{base}.h \Rightarrow V_{tetraedro} = \frac{1}{3}.\frac{bh}{2}h$, onde $V_{tetraedro}$ = volume do tetraedro, S_{base} = área da base.

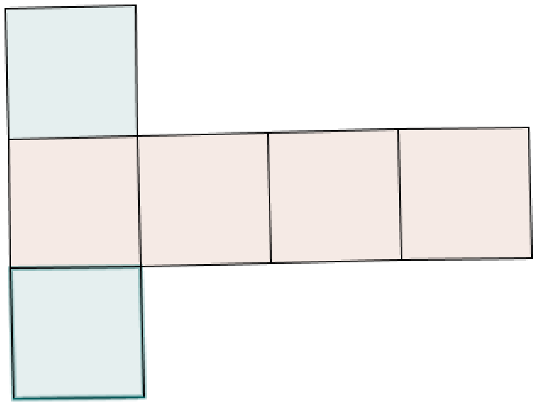
Agora vamos pensar um pouco:

1) Para Platão. O tetraedro representava que elemento da natureza?

2) Para Kepler, a órbita de que planeta está inscrito no tetraedro inscrito na esfera de Júpiter?

CUBO, é um poliedro convexo regular, onde suas arestas são congruentes e perpendiculares entre si, seus vértices são retângulos, possui seis faces, oito vértices e doze arestas. É um caso especial de prisma.





Cubo (poliedro) Cubo (planificado)

OBS: a) Todas as arestas têm as mesmas medidas;
b) A distância de AC = diagonal da base (d);
c) A distância de A'C = diagonal de cubo (D).
d) Se todas as suas arestas têm a mesma medida, logo a área da base é $S_b = a^2$, onde a = aresta.

e) A área lateral é $S_l = 4S_b$, pois cada face tem a mesma área, então $S_l = 4a^2$.

f) A área total é $S_t = 6Sb$, então St = 6a2.

g) O voluma é: $V = S_b \cdot a$, logo, $V = a^2.a \Rightarrow V = a^3$.

h) A diagonal da base é: $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$.

i) A diagonal do cubo é: $D^2 = d^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}$.

Agora localize:

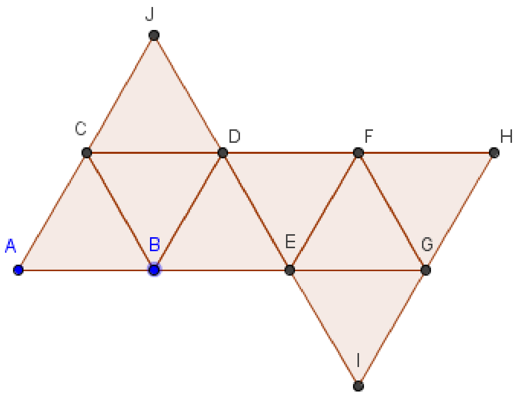
a) demais diagonais da base.
b) demais diagonais do cubo.

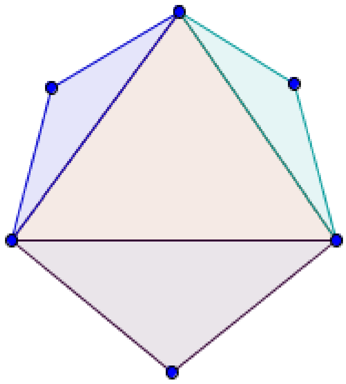
Agora vamos pensar um pouco:

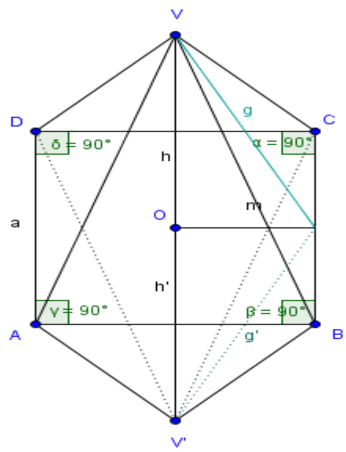
a) Para Platão, o cubo representava que elemento?
b) Para Kepler, o cubo inscrito na esfera de Saturno inscrevia a órbita de que planeta?

OCTAEDRO

É um poliedro regular com oito faces, sendo estes triângulos eqüiláteros, seis vértices e doze arestas. O octaedro pode ser formado a partir de um molde com oito triângulos eqüiláteros.







Verifique que o polígono ABCD é um quadrado, pois todos os triângulos que formam o OCTAEDRO são eqüiláteros, divide o sólido em duas pirâmides congruentes, pois ambas são constituídas por quatro faces laterais congruentes e mesma base.

Assim sendo, sua área lateral é igual a área total, ou seja, $S_l = S_t = 8\dfrac{a.m}{2} \Rightarrow S_l =$ 4.a.m, onde a = aresta e m = apótema da base do pirâmide.

E o volume é dado pela fórmula $V = 2\dfrac{a^2.h}{3}$, onde a^2 = área da base e h = altura de cada pirâmide.

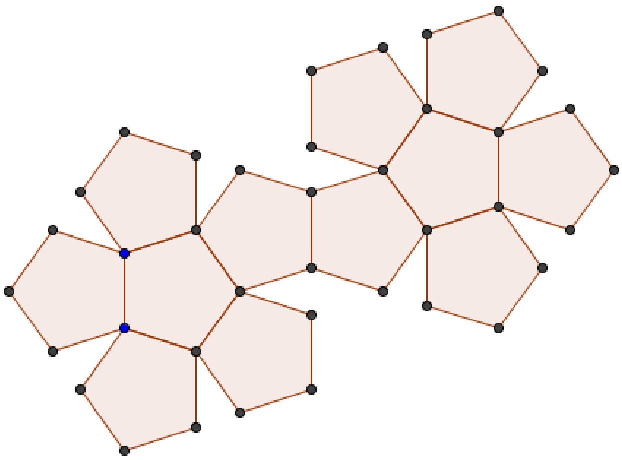
Agora vamos pensar um pouco:

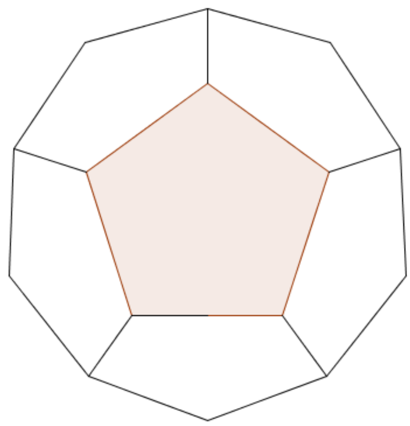
a) Para Platão, o octaedro representava que elemento?

b) Para Kepler, o octaedro inscrito na esfera de Vênus, inscreve a órbita de que planeta?

DODECAEDRO

É um poliedro regular com doze faces que são pentágonos, vinte vértices e trinta arestas. O dodecaedro pode formar-se a partir de um molde com vinte pentágonos.





A área lateral é igual a área total, ou seja, $S_l = S_t = 12.5 \Rightarrow S_t = 30.a.m$, onde a = lado do pentágono e m = apótema do pentágono. Cada pentágono pode ser dividido em cinco triângulos congruentes, que por sua vez multiplicamos por doze pentágonos que constituem o DODECAEDRO.

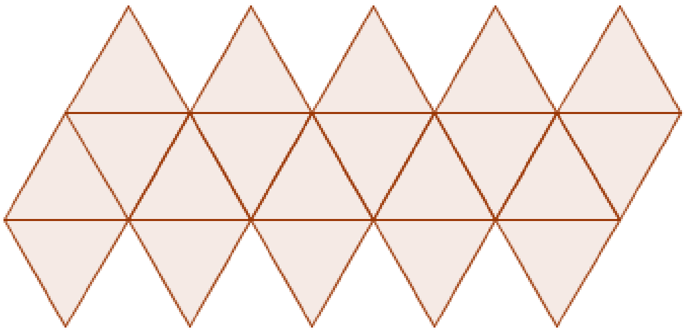
Agora vamos pensar um pouco:

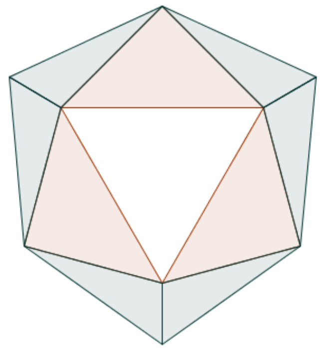
a) Para Platão, o dodecaedro representa o que?

b) Para Kepler, o dodecaedro, inscrito na esfera de Marte, inscreve a órbita de que planeta?

ICOSAEDRO

É um poliedro regular com vinte faces que são triângulos eqüiláteros, doze vértices e trinta arestas. O icosaedro pode ser formado a partir de um molde de vinte triângulos eqüiláteros.





O icosaedro é constituído por vinte triângulos eqüiláteros, logo, sua área lateral é igual à área total, ou seja, $S_l = S_t = 20.\dfrac{a.h}{2} \Rightarrow S_t = 10.a.h$, onde a = lado do triângulo e h = altura do triângulo.

Aplicando a relação de Euler, podemos descobrir o número de vértices, ou seja, $A + 2 = F + V$, onde $F = 20$ e $A = 30$, logo, $30 + 2 = 20 + V \Rightarrow V = 12$.

Agora vamos pensar um pouco:

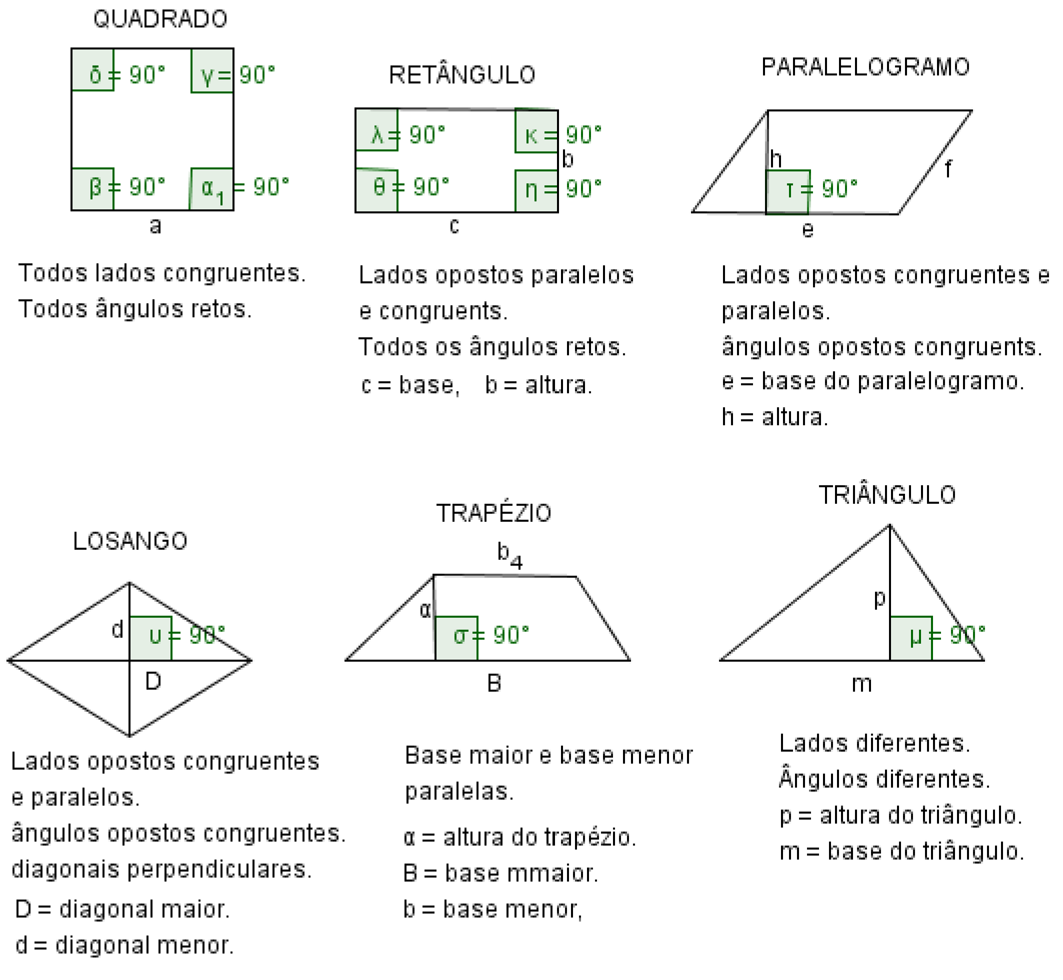
a) O que há de diferenças entre tetraedro, octaedro e icosaedro, se todos estes polígonos possuem triângulos eqüiláteros como suas faces?

b) Por que com os triângulos eqüiláteros consegue construir tetraedro, octaedro e icosaedro, enquanto que com quadrado consegue construir somente o cubo e com o pentágono consegue construir somente o dodecaedro?

c) Para Platão, o icosaedro representa que elemento?

d) Para Kepler, o icosaedro inscrito na esfera da Terra, inscreve a órbita de que planeta?

Para calcular área lateral, área total e volume de POLIEDROS se fazem necessário saber calcular área dos principais polígonos, assim como:



Para calcular área de um QUADRADO: $S = a^2$.

Para calcular área de um RETÂNGULO: S = b.c.

Para calcular área de um PARALELOGRAMO: S = e.h.

Para calcular área de um LOSANGO: S = $\frac{D.d}{2}$.

Para calcular área de um TRAPÉZIO: S = $\frac{B.b_4}{2}$.α.

Para calcular área de um TRIÂNGULO: S = $\frac{m.p}{2}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois de muitas leituras e pesquisas, de vários autores e muitas consultas pela internet, foram feitas muitas comparações das diversas maneiras de pensamentos e conduzir tanto a parte teórica como as atividades práticas. Podemos verificar que todos levam para o mesmo caminho e que as definições e atividades tinham sempre as mesmas finalidades, ou seja, decorar as figuras e sólidos geométricos, assim como as fórmulas para resolver as atividades elaboradas.

Assim sendo, preocupamos no desenvolvimento de um material que leva o aluno a pensar e construir passo a passo atividades que serão desenvolvidas, com as quais os conteúdos vão demonstrando o significado dos conceitos, assim como, as propriedades apresentadas.

Por outro lado, podemos verificar que nossos alunos têm na matemática a maior dificuldade na aprendizagem, não por desconhecer os objetos estudados, mas sim por não conhecer características e os elementos do que estão estudando. Nas construções dos poliedros através das planificações, acreditamos que o conceito da aprendizagem dos conteúdos de matemática sofrerá alterações significativas a partir da aplicação do processo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

ALLAN, N. **Uma Curta História dos Poliedros**, In: Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Águas de São Pedro, 1997, p.301 – 311.

AUSUBEL, D. P. et al. **Psicologia Educacional**. (tradução de Nick, E.). Editora Interamericana Ltda, Rio de Janeiro, 1980.

BRASIL. Secretaria de educação média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília. MEC/SEMTEC. 2002.

BREDA, Ana M.; LOFF, Dina M. S. **Os sólidos geométricos**. Departamento de Matemática de Universidade Coimbra, Coimbra, 1993.

CÂNDIDO, Suzana Laino. Formas num Mundo de Formas,Editora Moderna, São Paulo, 1ª edição, 1997.

KALEFF, Ana Maria M.R. Vendo e Entendendo Poliedros, Editora EdUFF, Niterói-RJ, 2ª edição, 1998

FERNANDES, Silva et al. **Apostila Matemática**. São Paulo, IBEP, 2002.

GENTIL, Nelson et al. **Matemática para o 2º grau**. São Paulo, Ática, 1999.

GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Plana e Espacial, Maringá-Pr., Versão preliminar,** 2004.

GIOVANNI, Bonjorno et al. **Matemática Completa**. São Paulo, FTD, 2002.

JORGE, Ana Maria Brito et al. **Infinito 10A - Parte1**. Areal editores. 2003.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro. Impa e Vitae Comunicação Visual, 1991, 206p.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. 4ª ed. Rio de Janeiro. SBM. 2002, 299p.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria? A Educação Matemática em Revista – SBEM**.

MARCONDES, Carlos Albert et al. **Matemática**. São Paulo, Ática, 2003.

POLIEDROS. Disponível em <http://www.mat-no-sec.org/criar/poliedros/demonstra.htm>. Acessado em 27/07/2007

PIRES, C. M. Carolino at al. **Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries Iniciais do Ensino Fundamental**. PROEM editora Ltda. São Paulo. 2000.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO PARANÁ. **DCE – Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba. SEED. 2006.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DO PARANÁ. DOCUMENTO SÍNTESE – PDE (Programa de Desenvolvimento Educacional). SEED. 2006.

SÓLIDOS geométricos. Disponível em <http://www.ticensino.com/actividades/solidosplat/solidosplat.htm>. Acessado em 27/07/2007)

TAHAN, Malba. **As Maravilhas da Matemática**. Rio de Janeiro, Bloch, 1972.

KALEFF, Ana Maria M.,R.,**Vendo e Entendendo Poliedros,** Niteroi, RJ, EDUFF, Volume 2, 1.998.

CÂNDIDO, Suzana Laino, **Formas num Mundo de Formas,** São Paulo, Editora Moderna, 1ª edição, 1.997.

YOUSSEF, Antonio Nicolau, SOARES, Elizabeth, FERNANDEZ, Vicente Paz, **De Olho no Mundo do Trabalho,** São Paulo, Editora Scipioe, Volume único, 2005.