Versão Online ISBN 978-85-8015-038-4
Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2007

Produção Didático-Pedagógica

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

FOLHAS

Sinopse

Este Folhas apresenta um estudo das funções, mais especificamente a função exponencial, tendo como base um jogo conhecido como Torre de Hanói. Este jogo teve origem numa antiga lenda que surgiu na cidade de Benares, na Índia, sobre o final dos tempos. Ele foi desenvolvido pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883. Este jogo consiste em mudar os discos (de tamanhos diferentes) que estão numa haste, para outras duas hastes, sem colocar um disco maior sobre outro menor. Por meio deste jogo é possível abordar conceitos de função exponencial, fazendo uma relação entre o número de discos e o número de movimentos. No desenvolvimento do trabalho serão apresentadas algumas atividades com o objetivo de levar o aluno a conceitualizar, identificar e aplicar funções em outras áreas do ensino, além da Matemática, e também em situações do seu dia-a-dia.

Autor: Evaldo José Drabeski

NRE: União da Vitória

Escola: Colégio Estadual São Mateus

Disciplina: Matemática ( ) **Ensino Fundamental** (X) **Ensino Médio**

Disciplina da relação interdisciplinar 1: Geografia

Disciplina da relação interdisciplinar 2: História

Conteúdo estruturante: Funções

Conteúdo específico: Função exponencial

1. PROBLEMATIZAÇÃO

O FIM DO MUNDO ...

A questão do final do mundo sempre intrigou e preocupou os povos, desde os tempos mais remotos. Muitas crenças, previsões, superstições e até estudos científicos existem em torno deste tema.

Mas, se por um lado todas as previsões do final dos tempos que foram feitas até agora mostraram-se equivocadas, por outro lado, elas continuam a existir, arrastando muitas vezes grandes massas de pessoas que nelas confiam e trazendo muitas vezes resultados de proporções catastróficas, como por exemplo os suicídios coletivos..

Mas afinal, o que tem a ver a crença sobre o final do mundo com o estudo da Matemática? Como poderemos aplicar este tema no estudo das funções ou outros conteúdos?

Para iniciar o estudo das funções, que é o objetivo deste trabalho, vamos nos reportar a uma antiga lenda que surgiu na Índia e que aborda de forma sutil a questão do final dos tempos. A partir desta lenda foi criado o jogo conhecido como Torre de Hanói e que será o ponto de partida para o estudo da função exponencial. Vamos à lenda...

Segundo a lenda da Torre de Brahma, o centro do mundo encontrava-se sob a cúpula de um templo situado na cidade de Benares, na Índia. Neste templo havia uma grande placa onde estavam fixados três pinos, cheios de diamantes. Num destes pinos Brahma, ao criar o mundo, colocou sessenta e quatro discos, de tamanhos diferentes, em ordem crescente.

Junto a esta torre o criador colocou um grupo de monges cuja função principal era mover os discos da haste original para as duas outras hastes, trabalhando dia e noite, sem parar. Mas para realizar esta tarefa os monges deveriam respeitar duas regras importantes: mover apenas um disco de cada vez; nunca colocar um disco maior sobre outro menor.

Segundo esta lenda, quando os monges terminarem a tarefa e os sessenta e quatro discos estiverem em outro bastão, o templo transformar-se-á em pó e então o mundo acabará.(MACHADO, 1992).

Mas quanto tempo os monges levarão para concluir esta tarefa? Quanto tempo de vida ainda terá o nosso planeta?

Segundo os estudiosos o mundo surgiu a 4 bilhões de anos. Será que viveremos para ver o mundo acabar?

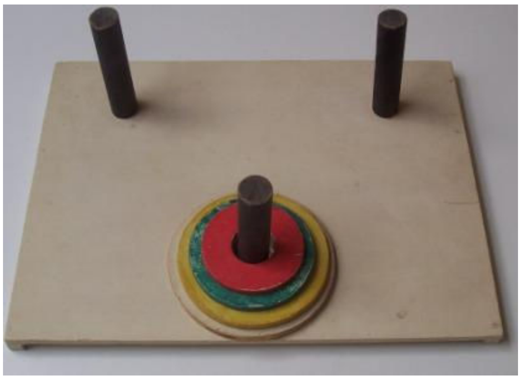
Para esclarecer todas estas dúvidas e descobrir quanto tempo de vida ainda tem o nosso planeta, segundo a lenda, vamos nos valer da Matemática, utilizando o conceito de funções.

Iniciaremos o estudo das funções tomando como base o jogo conhecido como Torre de Hanói. Este jogo surgiu a partir da lenda da Torre de Brahma. Ele foi criado pelo francês Edouard Lucas, em 1883, e vendido como brinquedo. (MACHADO, 1992).

Vamos conhecer esse jogo interessante?

O jogo consiste num tabuleiro com 3 a 5 pinos de madeira e um conjunto de 6 discos de diâmetros diferentes, com uma perfuração no centro. O desafio consiste em transferir os discos de um dos pinos para os outros dois pinos que estão livres. Vence o jogo quem concluir a tarefa em menos tempo e com o menor número de movimentos possível. Para isto devem ser seguidas algumas regras básicas: mover apenas um disco de cada vez; nunca colocar um disco maior sobre outro menor. (RÊGO, 2000).

Este jogo pode ser construído utilizando-se madeira, papelão ou cartolina. Vamos construir nosso próprio jogo? Então mãos à obra. A seguir encontra-se uma figura demonstrando o jogo.



Fonte: Acervo do autor

2- DESENVOLVIMENTO

Aproveitando o jogo, vamos analisar a matemática existente nesta atividade. O conceito de função pode ser entendido quando conseguimos relacionar os objetos de um conjunto com os de outro conjunto, de maneira que possamos obter uma "lei" que os relacione.

Neste jogo poderemos construir uma tabela que relaciona o número de discos com o menor número possível de jogadas.

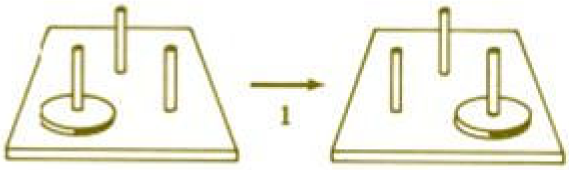
Inicialmente vamos levantar algumas questões:

- Como podemos relacionar o jogo da Torre de Hanói com o estudo da matemática?
- será que existe alguma relação entre o número de discos e o número de movimentos?
- Será que o número de jogadas está em função do número de peças?

Se estas questões forem afirmativas, então poderemos prever o número mínimo de jogadas necessárias para vencer o jogo, independente do número de peças.

Agora vamos analisar os movimentos realizados durante as jogadas:

Iniciamos o jogo com um disco:

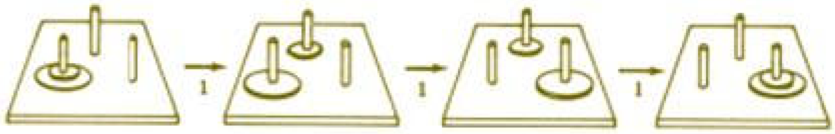


Fonte: Hellmeister, 2004.

Com um disco a transferência se dá com um movimento:

$$\mathbf{m_1 = 1}$$

Dois discos:

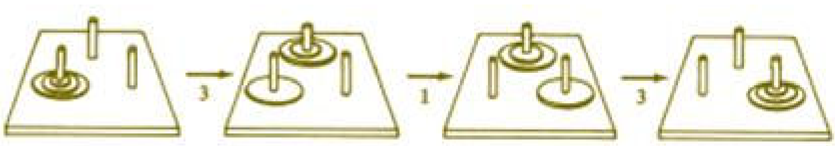


Fonte: Hellmeister, 2004.

Com dois discos a transferência acontece com três movimentos:

$$\mathbf{m_2 = 3}$$

Três discos:

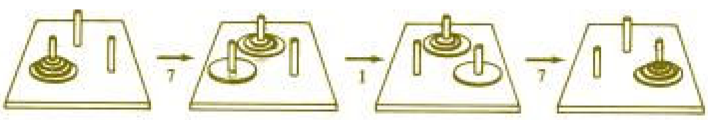


Fonte: Hellmeister, 2004.

Com três discos a transferência é realizada com sete movimentos:

$$\mathbf{m_3 = 7}$$

Quatro discos:



Fonte: Hellmeister, 2004.

Com quatro discos são necessários quinze movimentos:

$$\mathbf{m_4 = 15}$$

Concluído o jogo, vamos elaborar uma tabela com os resultados obtidos. Na coluna da esquerda está o número de discos utilizados e na coluna da direita o número de movimentos necessários para realizar a tarefa.

Nº de Discos (n)	**Nº de Mov. (m_n)**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
n	...

Observando a tabela, podemos responder às questões levantadas anteriormente:

- Existe uma relação entre o número de discos e o número mínimo de movimentos.
- O número de jogadas está em função do número de peças.

Mas... agora precisamos descobrir o valor de m_{64}, pois quando os monges mudarem os 64 discos o mundo acabará e nós precisamos saber ainda quanto tempo temos de vida.

3 – CONSTRUINDO CONCEITOS

Para resolver este problema precisamos criar uma nova coluna na tabela anterior, onde serão inseridas potências de base 2, sendo o expoente o número de discos.

Número de Discos (n)	**Nº de Movimentos (m_n)**	**Potência de base 2**
1	1	$2^1 - 1 = 1$
2	3	$2^2 - 1 = 3$
3	7	$2^3 - 1 = 7$
4	15	$2^4 - 1 = 15$
5	31	$2^5 - 1 = 31$
n	...	$2^n - 1 = ...$

Fonte: Gonçalves, 2007.

Agora já se pode visualizar como deslocar n discos, com o menor número de movimentos possível. Primeiramente movem-se **n – 1** discos para o bastão de trás, com $\mathbf{m}_{\mathbf{n-1}}$ movimentos; em seguida, move-se o n-ésimo disco para o outro bastão da frente, com um movimento e finalmente movem-se os **n - 1** discos do bastão de trás para o da frente, com $\mathbf{m}_{\mathbf{n-1}}$ movimentos. Assim obtém - se:

$$\mathbf{m_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 1}$$

Observando a tabela acima podemos concluir que será necessário subtrair uma unidade das potências escritas para se chegar ao número de movimentos. A partir desta constatação podemos definir a fórmula que nos ajudará a definir o número mínimo de movimentos: $\mathbf{m_n = 2^n - 1}$, onde $\mathbf{m_n}$ representa o número mínimo de movimentos e o **n** o número de discos.

Agora já podemos definir quantos movimentos os monges terão que fazer para mudarem os 64 discos.

Vamos supor que os monges gastem um segundo para mudar cada disco. Quantos anos eles levarão para concluir a sua missão?

Antes precisaremos fazer alguns cálculos. Quantos segundos têm um ano?

$$\mathbf{60x60x24x365 = 31\ 536\ 000 < 2^{25} = 33\ 554\ 432}$$

Vamos supor que, exageradamente, os monges façam 2^{25} movimentos por ano. Com estes cálculos e, segundo a lenda, o mundo deverá acabar em:

$$\mathbf{2^{64} / 2^{25} = 2^{39}\ anos}$$

Segundo os estudiosos, passaram-se até hoje 4 bilhões de anos desde a criação do mundo, ou seja, $4.\ 10^9$ anos. Portanto podemos ficar tranqüilos que ainda faltam mais de 508 bilhões de anos para que os monges terminem a sua tarefa e, portanto, que o mundo acabe.

5 – DEBATE

Atualmente um dos grandes problemas que preocupa o nosso mundo são as catástrofes climáticas que tem acontecido com freqüência em várias partes do planeta. Isto se deve em grande parte à poluição e ao efeito estufa que está elevando as temperaturas. Será que diante destes grandes problemas climáticos que estão ocorrendo, o nosso planeta vai durar tanto tempo, como prevê a lenda da Torre de Brahma?

Pesquisar sobre o efeito estufa e em seguida promover um debate com os colegas sobre as suas conseqüências para o nosso planeta.

6 - CURIOSIDADE

Edouard Lucas, o criador da "Torre de Hanói", demonstrou um teorema conhecido como "teste de Lucas". Através deste teste ele conseguiu provar que $\mathbf{2^{127} - 1}$ é um número primo. Este número foi considerado até 1952 o maior número primo já encontrado. E o interessante é que naquela época não existia computador e nem calculadora para auxiliar nos cálculos.(HELLMEISTER, 2004).

Agora faremos a sistematização matemática do que percebemos até o momento, utilizando o jogo da Torre de Hanói.

Uma função é uma relação entre duas variáveis **x** e **y** tal que o conjunto de valores para **x** é determinado e a cada valor **x** está associado um e somente um valor **y**. O **x** e o **y** são as variáveis da função. O **x** é denominado de variável independente e o **y** variável dependente.

Numa função destacam-se dois conceitos importantes: o **domínio** e a **imagem.**

- O **domínio** é constituído por todos os valores que podem ser atribuídos à variável independente **x.**
- A **imagem** é o conjunto formado por todos os valores que tem correspondência com a variável independente.

O jogo da Torre de Hanói representa um dos tipos de funções que é a **função exponencial**. A lei de formação desta função pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{f(x) = a^x}$$

O que caracteriza uma função exponencial é que a variável **x** está no expoente.

As funções exponenciais são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas têm uma grande importância devido ao seu campo de aplicação nas diversas áreas das ciências, como no comportamento de fenômenos físicos, biológicos e sociais. Na Física, a função exponencial aplica-se à Lei de resfriamento dos corpos. Na Química, o conceito de desintegração radioativa é explicado através desta função. A Geografia busca na função exponencial explicações e previsões sobre o crescimento populacional. Encontramos funções exponenciais também no estudo de taxas de juros e aplicações financeiras.

A função exponencial é definida como sendo a inversa da função logarítmica. Segundo Longen (2004, pág. 86), o conceito de função pode ser definido como sendo: “toda função f: R $\rightarrow$ R tal que y = f(x) = a^x em que **a** é uma constante real e diferente de 1”.

7 – ATIVIDADES PRÁTICAS

Os expoentes desafiaram muitos pensadores em todas as épocas, desde Arquimedes na Antiga Grécia. Mas para chegar à função exponencial, foi preciso desenvolver o conceito de função no que foram muito importantes os trabalhos de vários matemáticos do século XVIII como Euler, D’Alembert, Lagrange e Fourier.

Para ter noção da importância da aplicação do conceito de função exponencial na prática, vamos desenvolver algumas atividades:

a) Crescimento populacional

A população de um país apresenta um crescimento exponencial dado pela função f(x) = 30(1,2)x milhões, em que x representa o número de anos decorridos após o início da pesquisa. Assim sendo, a população atual do país é obtida para x = 0, ou seja, f(0) = $30(1,2)^0$ = 30 milhões.

a) Calcule o crescimento populacional nos 5 próximos anos;
b) Represente graficamente este crescimento ano a ano.

b) Depreciação de um veículo

A depreciação de um veículo é calculada a base de 20% ao ano. Como o valor do veículo diminui 20% ao ano, então após um ano o seu valor será de (1 – 0,2), ou seja, 0,8 menor.

a) Determine qual a lei de formação dessa função.
b) Qual será o valor de um veículo que foi comprado da loja por R$ 25.000,00, daqui a 3 anos?

3) Cálculo de juros compostos

A quantia de R$ 20.000,00 foi aplicada a uma taxa de 2% ao mês utilizando os juros compostos. Pergunta-se:

a) Qual será o saldo ao final de 5 meses?
b) Qual é a lei de formação que relaciona o montante gerado **y** por essa aplicação no tempo **t** ?
c) Construa um gráfico representando os valores obtidos mês a mês.

(SANTOS, 2003, p. 96)

8 - LEITURA

O Aquecimento Global


Fonte: Acervo do autor

Diariamente acompanhamos pela televisão, jornais ou revistas as mudanças climáticas que estão ocorrendo em todo o mundo, causando medo e destruição. Nunca foram vistas mudanças tão rápidas e com efeitos tão devastadores como têm acontecido nos últimos anos.

Na Europa ondas de calor têm feito os termômetros atingirem os 40 graus centígrados. Ciclones, quem imaginaria, estão atingindo o Brasil, principalmente na região sul e sudeste. As áreas de deserto vem aumentando a cada dia, furacões e incêndios têm causado mortes e destruição em várias partes do planeta. As calotas polares estão derretendo o que faz o nível dos mares subir e ocasionar a inundação de várias cidades litorâneas.

Mas afinal qual é a causa destas mudanças tão drásticas em nosso planeta? Os cientistas são unânimes em afirmar que tudo isto é conseqüência do constante aquecimento global.

Segundo pesquisadores do clima mundial, o aquecimento está ocorrendo em função do aumento de poluentes, principalmente de gases derivados da queima de combustíveis pelos carros e pelas indústrias. Outros fatores que também contribuem para este aquecimento são os desmatamentos e a queimada de florestas. Estes gases (ozônio, gás carbônico e monóxido de carbono) formam uma camada de poluentes, de difícil dispersão, que causam o efeito estufa. Os raios do sol atingem a terra e irradiam calor na atmosfera. Como a camada de poluentes dificulta a dispersão do calor, o

resultado é o aumento da temperatura global. Embora este fenômeno tenha aparecido de forma mais evidente nas grandes cidades, suas conseqüências já são sentidas em todo o mundo.
(http://www.suapesquisa.com/geografia/aquecimento_global.htm)

9 - PESQUISA

Pesquisar sobre o matemático francês Edouard Lucas, criador do jogo Torre de Hanói, e sobre suas principais obras.

As funções nem sempre foram assim como as encontramos nos dias atuais. Elaborar uma pesquisa sobre a história das funções.

10 - ATIVIDADES

Um professor de matemática de determinada escola tinha um carro muito bonito que era a sensação da gurizada. Um dia ele chegou na escola fazendo a seguinte proposta para os alunos: eu vendo o meu carro a qualquer um de vocês se aceitarem a minha proposta. Vocês têm um mês para pagar o carro. No primeiro dia vocês me pagam 2 centavos, ou seja, 2^1; no segundo dia vocês me pagam 4 centavos, ou seja, 2^2 ; no terceiro dia 8 centavos, ou seja, 2^3 e assim sucessivamente... até chegar ao final do mês. No trigésimo dia, quem cumprir todos os pagamentos é o dono do carro. Quem topa a parada?

Os alunos se entreolharam e ficaram assustados diante da proposta absurda que o professor havia lhes feito. Mas antes de aceitarem a proposta, resolveram fazer os cálculos. Então ficaram perplexos com o resultado.

a) Calcule o valor final do carro;
b) Determine a lei de formação da função
c) Qual foi a função encontrada?

11 - REFERÊNCIAS

GONÇALVES, A. O. **A Torre de Hanói em Sala de Aula**. Revista do Professor de Matemática Nº 63, p. 16-18. São Paulo: 2007.

HELLMEISTER, A. C. P. (et al.). **Explorando o Ensino da Matemática:** artigos; vol. 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

LONGEN, A. **Matemática Ensino Médio** -1ª série. Curitiba: Editora Positivo, 2004.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação**: Alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo: Cortez, 1992.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do. **Matematicativa**. João Pessoa: Editora Universitária/UFBP, INEP, Compend, 2000.

SINAIS DE VIDA. **Livro Didático do Positivo**. Curitiba: Editora Positivo, 2001.

SANTOS, C. A. M. dos; GENTIL, N. GRECO, S. E. **Matemática**. Série Novo Ensino Médio, 7. ed. São Paulo: Ática, 2003.

AQUECIMENTO GLOBAL. Disponível em: http://www.suapesquisa.com/geografia/aquecimento_global.htm, acesso em 28 outubro 2007.

IMATEMÁTICA. Torres de Hanói. Disponível em: http://www.matematica.br/programas/hanoi/ihanoi4.html . Acesso em 21 janeiro 2007.

MATEMÁTICA ESSENCIAL. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio.htm . Acesso em 06 setembro 2007.