

Versão Online

ISBN 978-85-8015-038-4

Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS
DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE
Produção Didático-Pedagógica

2007

NRE: Pato Branco	Município: Pato Branco
Nome do professor: Ivane Marcarini Simionato	e-mail: ivanes@seed.pr.gov.br
Escola: Colégio Estadual Carlos Gomes. E.F.M.	fone:3223-3875
Disciplina: Matemática	Série: 1ª série E. M
Conteúdo estruturante: Grandezas e Medidas	
Conteúdo específico: Trigonometria no Triângulo Retângulo e Relações Trigonométricas em um triângulo qualquer.	
Título: Salve o Planeta!	
Relação interdisciplinar 1 : História	Colaborador 1: Roseli T. Vendruscolo
Relação interdisciplinar 2 : Geografia	Colaborador 2: Elcio T. Slongo
Colaborador da disciplina do autor: Prof. Dr. Edilson Roberto Pacheco	

SALVE O PLANETA!



Figura 01: Foto retirada do site <http://www.etudo.com.br/tecnologia/apophis-um-gigante-em-rota-de-colisao-com-a-terra/>, Acesso em 15/08/2007/08/2007.

Em 15/08/2007, no site (<http://www.natgeo.com.br/series/misteriosda-ciencia/episodio/1>) foi encontrada a notícia:

“A probabilidade de você morrer por conta do impacto de um asteróide é quatro vezes maior do que de ser atingido por um raio. Você irá conhecer os cientistas que acreditam que podem ter encontrado a solução para evitar esse impacto. O objetivo deste grupo é fazer uma aeronave pousar em um asteróide próximo da Terra e gentilmente dar uma empurradinha neste monstro a fim mudar sua órbita. Espera-se não ser muito difícil transformar este assassino em um inocente pedaço de rocha. Será que irá funcionar? Podemos evitar um desastre mundial? E mais importante: Quando chegará este dia?”

Outra notícia comenta sobre o mesmo asteróide:

“Os Cientistas apontam que se um asteróide for achado, para estar em um curso de colisão com Terra, isso ocorreria entre 30 e 40 anos antes que ele viesse chocar-se com o planeta, portanto haveria tempo para que pudéssemos evitar o impacto. Embora uma tecnologia desse tipo ainda tenha que ser desenvolvida, existe possibilidades que incluem a explosão do objeto ou seu desvio para outra trajetória ou órbita. [...]O possível impacto poderá ser ocasionado por um NEOs, chamado de Apophis, que é um asteróide de 40 milhões de toneladas e 305 metros de extensão, que irá passar tão perto da Terra que passará por baixo de alguns satélites e poderá destruir alguns deles.” <http://www.etudo.com.br/tecnologia/apo-phis-um-gigante-em-rota-de-colisao-com-a-terra/>), acesso em 15/08/2007.

Essas notícias que se referem a este asteróide foram largamente comentadas na mídia criando certa preocupação na população. O Apophis deverá passar a cerca de 35.000 km de distância da Terra. Uma distância extremamente pequena, em termos astronômicos. A NASA estima que um possível impacto do asteróide com a Terra será capaz de produzir uma energia equivalente a 880 “*megatons*” de dinamite.

(<http://pt.wikipedia.org/wiki/99942-Apophis>) consultado em 15/08/2007.

Curiosidade

Megaton é unidade de massa equivalente a 1.000.000 de toneladas (10⁹ kg ou 1 teragrama (Tg)). O símbolo oficial em SI para megaton é Mt, mas MT também pode ser usado (<http://pt.wikipedia.org/wiki/Megaton>) pesquisado em 30/11/2007.



VAMOS PESQUISAR: desenho retirado do site

<http://www.dominiopublico.gov.br>

a) Com auxílio do professor, pesquise qual o significado de NEOS e ASTERÓIDE.

b) Encontre na mitologia grega a história de Apóphis, e verifique se há relação com o Asteróide citado no texto.

c) Você já sabe o que é megaton? Descubra quantos “*megatons*” as Bombas atômicas de Hiroshima e Nagasaki produziram e qual o efeito para a humanidade.

d) Pesquise mais sobre o assunto tratado no texto e comente com seus colegas.

Sugestão: assistir ao filme Armageddon, (1998).

Supondo a possibilidade de podermos auxiliar os cientistas a atingirem o asteróide tocando-o levemente para desviá-lo do curso utilizando-se da estratégia citada no texto, na qual, pode-se pousar uma aeronave em um asteróide próximo ao “*Apophis*” e dar-lhe uma empurradinha. O que você acha, isso é possível? Qual sua sugestão?

Certamente por seus conhecimentos anteriores você deve ter sugerido algum cálculo matemático. Muito bem! Você está no caminho certo! Veja por que. Por meio de estudos históricos descobrimos que sempre nas dificuldades é que surgem as idéias criativas para solucionar os problemas apresentados.

Conheça mais...

Um grande Matemático da antiguidade, Ptolomeu, por volta do ano 125 a.C., usou a TRIGONOMETRIA (a palavra Trigonometria vem do grego TRI - três, GONO - ângulo e METRIEN, medida, significando Medida de Triângulos) para determinar a latitude e a longitude de cidades e de outros pontos geográficos em seus mapas.

Este célebre astrônomo da antiguidade que sucedeu Hiparco¹ (190 a. C, 125 a.C.), escreveu o “*Almagesto*”, documento mais antigo que trata da Trigonometria embasando-se nos trabalhos deste para escrever a obra. Também consta como sua a obra *Sintaxe Matemática*, onde está apresentado o Tratado de Trigonometria Retilínea e Esférica.

¹ Hiparco: considerado o pai da Astronomia, foi quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, por volta de 140 a.C. daí ser considerado o iniciador e pai da Trigonometria.

Na antiguidade, desde os babilônios, até pouco antes de Descartes (1596-1650 d.C.) usava-se a Trigonometria como instrumento puramente prático de agrimensura, Astronomia ou navegação, pois frequentemente precisava-se calcular distâncias que não podiam ser medidas com régua ou trena (GARBI, 2006).

A Trigonometria tornava isso possível pela simples aplicação de certas regras básicas sobre as relações entre os lados e os ângulos de qualquer triângulo, grande ou pequeno, imaginário ou não. Essas relações foram primeiramente estabelecidas pelos gregos, a fim de analisar os arcos de círculo. O primeiro cientista que sabemos ter aplicado tais relações foi o astrônomo Hiparco, por volta de 140 a.C. para determinar distâncias em linha reta através da “*aboboda Celeste*” (GIOVANI, 1988, p. 283).

Inicialmente a Trigonometria foi considerada como uma extensão da Geometria, sabemos hoje que a Astronomia foi uma grande impulsionadora da Trigonometria, principalmente entre os gregos e os egípcios. Foram os astrônomos que estabeleceram os fundamentos da Trigonometria.

A partir da idéia de Hiparco a Trigonometria foi se desenvolvendo por meio de aplicações práticas necessárias às diferentes situações que ocorreram nas antigas civilizações e hoje se pode também calcular distâncias que não podem ser medidas manualmente utilizando-se da Trigonometria além de muitas outras aplicações.

Veja alguns instrumentos utilizados para a navegação na



O ASTROLÁBIO

antiguidade:

Figura 2: <http://pt.wikipedia.org/wiki/astrol%C3%A1bio>, pesquisado em 15/08/2007.

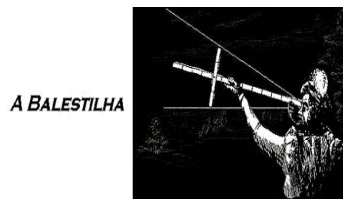


Figura 3: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Balestilha>, consultado em 15/08/2007.



VAMOS PESQUISAR: desenho retirado do site

<http://www.dominiopublico.gov.br>

- a) Existiam outros instrumentos utilizados para a navegação na antiguidade, além do Astrolábio e da Balestilha? Quais? Qual deles foi inventado por uma mulher?
- b) A história mostra muitas situações em que esses instrumentos foram utilizados, cite algumas.

Sugestão: assistir ao filme Donald no país da matemática (parte de Trigonometria)

Você faz e aprende...

- a) Quais os instrumentos utilizados hoje para a navegação e para medições?
- b) Em grupo, reproduza a balestilha e explique demonstrando de forma prática como era utilizada antigamente nas navegações.
- c) Em sua pesquisa você encontrou como instrumento atual para medição, o teodolito. Com auxílio do professor você poderá construir um teodolito, com materiais recicláveis, para auxiliá-lo na resolução das atividades futuras.

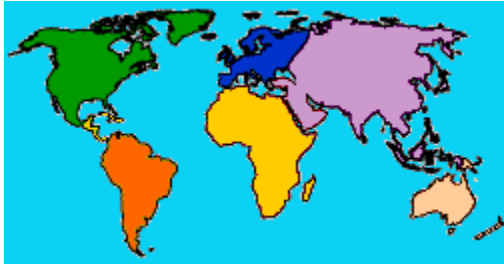


Figura 4: disponível

<http://www.dominiopublico.gov.br> . Acesso em 04/04/2008

Do mundo grego, a Trigonometria passou para a Índia, onde era usada, a partir do século V. No ano 800, aproximadamente, ela chega ao mundo islâmico, onde foi muito desenvolvida e aplicada à Astronomia e à Cartografia.

Alcança, com livros de Ptolomeu, a Europa Cristã em torno do ano 1100. Com os portugueses encontra uma aplicação de enorme valor econômico na Navegação Oceânica, (<http://www.uniandrade.br./simposio/pdf/mat.116.pdf>, em 15/08/2007). Somente no século XV, Purback , um matemático nascido na Baviera, procurou restabelecer a obra de Ptolomeu, introduzindo o *seno*² e a *tangente* na Trigonometria e construiu a primeira tábua trigonométrica.

Você faz e aprende...

* Vamos pesquisar sobre os povos da Índia, Grécia, Egito? Sua cultura, economia, religião , localização no mapa, contribuições históricas, etc...

1) Você consegue construir uma tábua trigonométrica?

a) Comece desenhando em uma folha de papel milimetrado ou quadriculado um triângulo retângulo OAB, reto em B, com AO medindo 10 cm.

b) Trace os segmentos $A_{\pi}B_{\pi}$, $A_{\leq}B_{\leq}...$ paralelos ao lado AB, com extremidades sobre AO e OB.

² Seno: conhecido inicialmente como "*jiva*". Chegou até nós pelo texto de 400 d. C. chamado Surya Siddhanta, que quer dizer Sistemas do Sol e é um texto épico , escrito em versos e em sânscrito. Os hindus diziam que o autor do texto foi Surya, o deus do Sol No Surya a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles Jiva. $Jiva \theta/2 = \text{cateto oposto/hipotenusa}$.

- c) Meça os segmentos AO_{π} , AO_{\leq} , AO_{\geq} ... e OB_{π} , OB_{\leq} , OB_{\geq} ...
- d) Calcule as razões AB/AO , AB_{π}/OA_{π} , AB_{\leq}/OA_{\leq} ...O que elas têm em comum? Dica: Para cálculos como este é aconselhável usar calculadora.
- e) Repita a atividade anterior em outra folha de papel milimetrado, com ângulo AOB medindo 10° , 20° , 30° e continue preenchendo a tabela abaixo com os valores encontrados para os ângulos até 80° .

Ang. AOB	O	AB/A	O	OB/A	B	AB/O
10°		0,174		0,985		0,176
20°		0,342		0,940		
30°		0,500				

Com certeza você observou que, independente dos triângulos considerados, as razões entre os lados do triângulo se mantêm constantes, e as possíveis diferenças observadas devem-se a imprecisões nas medições e ao arredondamento dos números obtidos. As razões AB/AO , OB/AO , AB/OB que você obteve são tão importantes que os matemáticos lhes atribuíram nomes especiais: seno, cosseno e tangente, respectivamente. Assim temos as razões trigonométricas, e você poderá demonstrá-las facilmente a partir de seus desenhos anteriores.

Lembre-se:

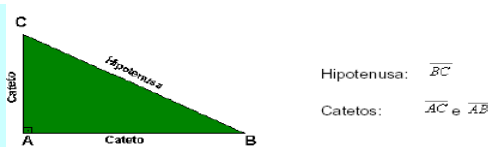


figura 5 - desenho do autor

Catetos e Hipotenusa : Em um triângulo chamamos o lado oposto ao ângulo reto de hipotenusa e os lados adjacentes de catetos.

Você faz, e aprende...

1) Construir um triângulo retângulo e identificar as razões trigonométricas a partir dos elementos catetos e hipotenusa (sugestão: utilize os triângulos da atividade 2)

2) Tomando por base os elementos desse triângulo, defina as razões Trigonométricas encontradas e represente-as por desenho.

Conheça mais...

Na atualidade encontram-se aplicações para a trigonometria nas telecomunicações, na música, na determinação de distâncias entre estrelas e planetas, na medicina, na física, na sociologia, na engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, e em muitas outras áreas científicas. Como tal, o seu estudo é indispensável para engenheiros, físicos, informáticos e praticamente para todos os cientistas.

Agora, como tomamos conhecimento de algumas aplicações históricas da Trigonometria, vamos detalhar nosso problema para também encontrar uma solução para o mesmo. Você já conhece as relações trigonométricas, vamos utilizá-las então para resolver problemas. Começemos pelo nosso problema, visto no início do texto.

Quando perguntados sobre como desviar o Neos, cada pessoa pensou de uma forma diferente, mas buscando uma mesma solução. Então vamos sistematizar o problema para que de uma maneira uniforme possamos pensar e encontrar uma solução.

Você faz e aprende...

01) Problema Proposto inicialmente:

Um Neos é localizado a 35.000 km de distância da Terra, em linha reta. Para evitar uma colisão com o planeta este terá que ser desviado da sua rota. Para isto será utilizado um míssil. Sabendo que o alcance do míssil é de 160 km e que este precisará ser lançado de um asteróide próximo ao

Neos formando com este e com a terra um ângulo de 90° , calcule qual o ângulo que o missel deverá formar com o Neos quando atingí-lo para desviá-lo da rota da terra. Compare os resultados e faça questionamentos sobre as possíveis soluções.

Sugestão: observe as demonstrações anteriores, relembre o que já aprendeu e veja qual delas melhor se adapta na resolução do problema. Comece fazendo o desenho de um triângulo retângulo. Marque os pontos A, B e C, o ângulo reto em A, a distância da Terra ao Neos e deste ao missel. (obs. Nesta atividade é importante o uso da calculadora científica para determinar o inverso da medida encontrada e assim obter o ângulo).

Conheça mais...

Quando Tales de Mileto, filósofo e grande matemático grego, considerado pai da Geometria demonstrativa (c.546 a.C.), mediu a altura da Pirâmide de Quéops sem escalá-la, ele fez uso da sombra da pirâmide provocada pelos raios de sol e de uma grande idéia, idéia de razão. Tales sabia que a razão entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes era a mesma. Somente depois de passados muitos anos é que se iniciaram os cálculos utilizando-se as razões trigonométricas. Essas razões se tornaram fundamentais na resolução de problemas de topografia, Astronomia e Física, ou problemas atuais como estes:

Você faz e aprende

Está sendo construído em Dubai (Emirados irabes), o "*Burj Dubai*", o maior prédio do mundo e estará pronto entre 2008 e 2009. Acredita-se que ao final do projeto o edifício terá entre 700 e 900m de altura. Dados encontrados em: <http://rodrigoborba.com/blog/2007/10/09/burj-dubai-o-maior-predio-do-mundo>, acesso 12/02/2008.



figura 6 retirada do site

<http://rodrigoborba.com/blog/2007/10/09/burj-dubai-o-maior-predio-do-mundo>,
 acesso 12/02/2008

1) Imagine que, depois do edifício pronto, os raios de sol estejam inclinados 20° em relação ao plano em que o edifício está assentado. Qual é a medida d da sombra desse edifício, considerando a altura de 900m?

02) Sabemos da aplicação da trigonometria em várias profissões. Veja outro exemplo de uso na Engenharia: O ângulo de inclinação de um telhado depende do tipo de cobertura (IMENES & LELIS, 1999). Os carpinteiros usam esta linguagem: "Num telhado com inclinação de 40%, avançando 1 m na horizontal, sobe-se na vertical 40% de 1 m, isto é, 0,40 m ou 40 cm".

Supondo que a inclinação do telhado é de 40%, responda:

a) Avançando 2 m na horizontal, sobe-se quanto na vertical?

b) Qual é o valor da tangente θ ?

c) O ângulo de inclinação θ é maior, menor ou igual a 20° ? Maior, menor ou igual a 25° ? d) Qual é aproximadamente o valor de θ ?

03) Para instalar um teleférico, os engenheiros mediram o ângulo α (35°) no pé da montanha e o desnível entre os pontos A e B, (B, topo da montanha) que deu 114m:

a) Calcule a medida da distância da base ao topo da montanha (AB)

b) O cabo de aço do teleférico, na verdade, é curvo devido ao seu peso. Os engenheiros calcularam que essa curvatura torna o comprimento do cabo 2% maior que o segmento de reta AB. Qual é o comprimento do cabo?

04) Determine a altura de sua escola, utilizando o teodolito que você construiu.

Comece assim: meça o ângulo de elevação da escola e depois a distância da base do prédio até o lugar onde estava o teodolito. Não esqueça de adicionar a altura da pessoa que estava olhando no teodolito.

CONHEÇA UM POUCO MAIS

Foi Eratóstenes (276-196 a.C.), sábio de Alexandria, quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade. Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno para nós, habitantes do hemisfério Sul) os raios solares caírem verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, hoje Assua, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços da cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caíam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de $71/2^{\circ}$ (medida feita com o auxílio do astrolábio) com a vertical, ou seja, $1/50$ do comprimento do meridiano terrestre -que é de 360° (2p) que é uma circunferência completa. Sabendo que os raios de luz provindos de grandes distâncias parecem paralelos ou comportam-se como se fossem, Eratóstenes concluiu que os raios que ligam as extremidades de um arco de 800 Km ao centro da Terra, formam um ângulo de $7\ 1/2^{\circ}$ (800 Km é a distância entre as duas cidades, que já era conhecida pelos funcionários do museu). (< <http://penta.ufrgs.br/edu/telab/mundo-mat/malice3/erast.htm>, pesquisado em 10/04/2008.>)

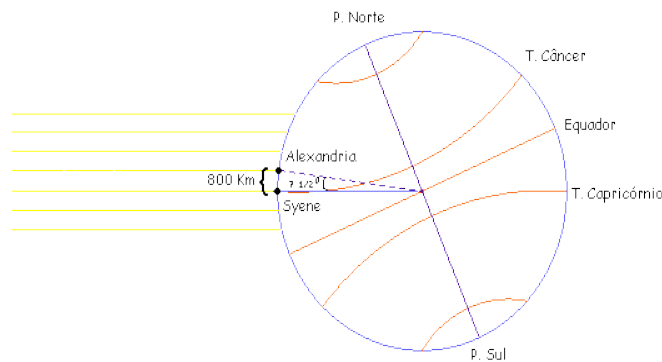


figura 7, disponível no site <http://penta.ufrgs.br/edu/telab/mundo-mat/malice3/erast.htm>, pesquisado em 10/04/2008.

Chegou muito próximo do valor atual que você pode encontrar em qualquer enciclopédia.

Você faz e aprende

Agora faça seus cálculos, use a trigonometria e encontre qual é o valor do Raio da Terra, compare com o valor atual e com o calculado por Eratóstenes que foi de 7365km. Para facilitar utilize o desenho acima.

CONHEÇA UM POUCO MAIS

... POSSÍVEL CALCULAR A DISTÂNCIA DA TERRA AT... AS ESTRELAS?

Os astrônomos utilizam o método de paralaxe para calcular a distância da terra a um astro. A criação da noção de paralaxe é atribuída a Apolônio (HOGBEN, 1970). Paralaxe é a mudança de posição aparente de um objeto em relação ao segundo ponto de referência mais distante, quando esse objeto é visto a partir de ângulos diferentes.

Para você entender de modo mais simples, vamos fazer uma experiência? Levante a ponta do polegar e, com o olho fechado, alinhe a ponta do polegar entre o olho e o objeto sobre uma mesa. Agora, sem mudar a posição, olhe para a ponta do polegar fechando o olho aberto e abrindo o outro olho. A ponta do polegar parecerá estar numa posição diferente em

relação ao segundo plano. O fundo, porém, não parece sofrer esse “deslocamento”.

O aparente movimento varia em função da distância entre a ponta do polegar e o olho. Quanto mais próximo, mais a ponta do polegar parecerá se mover. A metade do ângulo sob o qual é visto um objeto de dois pontos diferentes é chamada de paralaxe desse objeto (SILVA, 2005, apud MUCELIN, 2006).

Para Barros (2001) a paralaxe depende da altura do astro e da distância a Terra, sua aplicação só tem interesse prático no caso de se observar o Sol ou a Lua, Vênus ou Marte; para outros, muito mais afastados, o seu valor é desprezível (BARROS, apud MUCELIN, 2006).

Como funciona isso na prática? Como calcular a distância Terra-Lua?

O observador A vê a Lua numa posição aparentemente diferente da posição vista pelo observador B. Cada observador tem uma visão ligeiramente diferente do céu. (MUCELIN, 2006). Os dois observadores ao fotografarem a Lua nas suas posições, obterão uma média de ângulo p , que é o ângulo formado na estrela entre o observador e a Terra.

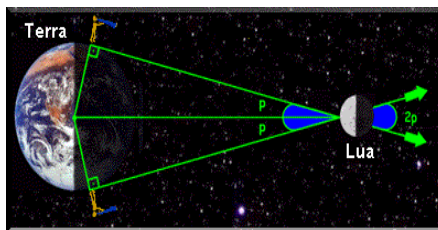


figura 8:disponível no site

<http://www.zenite.nu/> acesso em 10/04/2008.

Você faz e aprende

O M...TODO ANTERIOR ... SIMPLES E VIIVEL, embora o resultado obtido seja sempre um valor aproximado. Procure obter por um outro método, imaginado por você mesmo, tendo como referência o anterior.

Você conhece o raio da Terra, **R**, e está no sul da ifrica, medindo o ângulo **A** que a Lua faz com a vertical do lugar. Um amigo seu faz o mesmo,

medindo **A'** na Europa, sendo que ambos estão sobre um mesmo meridiano terrestre. Apenas com essas informações, construa uma geometria capaz de obter a distância da Terra à Lua.

Este problema não é original. Ele foi solucionado no século XVIII pela dupla Lalande (em Berlim) e Lacaille (no Cabo da Boa Esperança), mas permite algumas variações bastante criativas. Pense um pouco. (disponível no site <http://www.zenite.nu/> , acesso em 10/04/2008.)

QUESTÕES PARA DEBATE:

Seria mesmo possível atingirmos o Neos com um míssil (bomba)? Essas notícias que foram publicadas seriam realmente verdadeiras ou sensacionalistas? Além das atividades sugeridas, você encontra outras aplicações para a trigonometria, quais?

AGORA É COM VOCÊ, CONTINUE ESTUDANDO!

REFERÊNCIAS:

APOPHIS. **Origem.** Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/99942-Apophis>
Acesso em 15 de agosto de 2007.

ASTROLIBIO. **Origem.** Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/astrolibio>. Acesso em 15 de agosto de 2007.

BALESTILHA. **Origem.** Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Balestilha>. Acesso em 15 de agosto de 2007.

BARRETO, M. M. **Como Eratóstenes calculou o raio da Terra.** Disponível em: <http://penta.ufrgs.br/edu/telab/mundo-mat/malice3/erast.htm>, acesso em 10/04/2008.

BORBA, R. **Burj Dubai: O maior prédio do mundo.** Disponível em <http://rodrigoborba.com/blog/2007/10/09/burj-dubai-o-maior-predio-do-mundo>, acesso em 12 de fevereiro de 2008.

CI NCIA. **Mistérios.**
<http://www.natgeo.com.br/series/misteriosdaciencia/episodio1>. Acesso em 12 mar, 2008.

COSTA. J. R. V. **Como medir distâncias no espaço: Astronomia no zênite.** Disponível em <http://www.zenite.nu>. Acesso em 10/04/2008.

ENCICLOP...DIA LIVRE. **Megaton.** Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Megaton>. Acesso em 30 de novembro de 2007

GAMBi, A. (org). **Aplicação da trigonometria na medição da correnteza com flutuadores a deriva.** Disponível em <http://www.uniandrade.br./simposio/pdf/mat.116.pdf>, acesso em 15 agosto, 2007.

GARBI, G. G. **A Rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

_____ **O romance das equações algébricas.** 2. ed. São Paulo: Editora e Livraria da Física, 2007.

GIOVANNI, J. R. **Matemática: teoria, exercícios e aplicações.** v.1. São Paulo: FTD. 1988.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática: influencia e função matemática nos conhecimentos humanos**. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.

_____ **O homem e a ciência: o desenvolvimento científico em função das exigências sociais**. v. 1. Porto alegre: Globo, 1952.

IMENES, L. M. P. (org). **Matemática: Imenes & Lelis**. São Paulo: Scipione, 1997.

MAPA. **Origem**. <http://www.dominiopublico.gov.br> . Acesso em 04/04/2008

MUCELIN, N. I. S. (org). **Matemática: vários autores**. Curitiba: SEED-PR, 2006.

SILVA, L. C. M. **Sala de Física**. Disponível em: <http://geocities>. Acesso em: 12 de outubro, 2005.