

Versão Online    ISBN 978-85-8015-037-7  
Cadernos PDE

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS  
DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2007

VOLUME I

## **Uma proposta para desenvolver o conteúdo Pirâmides em Geometria Espacial**

Marcelo Turkiewicz

**Resumo:** Pretende-se com este trabalho, discutir o ensino da geometria espacial no Ensino Fundamental e Médio, buscando-se uma alternativa metodológica e construção de material didático para o ensino deste conteúdo, que oportunize ao aluno uma “maneira” mais agradável e compreensiva de aprendizagem, através de uso de material concreto o qual o aluno possa manipular, utilizando-se conceitos matemáticos conhecidos e pré-estabelecidos. Para tanto, serão apresentados, inicialmente, alguns dados históricos acerca da disciplina da matemática e como vem se dando seu ensino até os dias de hoje, principalmente quanto ao conteúdo geometria espacial, além de discutir alguns pressupostos teóricos que embasam este trabalho. Por fim, será descrita e analisada a oficina teórico-prática realizada durante o ano de 2008. Cabe ressaltar que o conteúdo proposto para este trabalho: Geometria Espacial, em particular o estudo das pirâmides, faz parte do currículo do Ensino Médio, de acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática para Educação Básica da Rede Pública Estadual de Ensino do Paraná.

**Palavras chave: Matemática - Geometria Espacial – Pirâmides - Oficina.**

**Abstract:** It is intended with this work, to discuss the teaching of Spatial Geometry in Primary / Secondary Education, is seeking an alternative methodology and construction of didactic materials for teaching this content, which nurtures the student a more pleasant and considerate "way" of learning through use of concrete material which the student can handle, using known and pre-established mathematical concepts. For both, will be presented, initially, some historical data about the discipline of Mathematics and has been giving its teaching until the days today, mainly to the Spatial Geometry content, and discuss some theoretical assumptions that base this work. Finally will be described and analyzed the theoretical and practical workshop carried during the 2008 year. It is worth emphasizing that the content proposed for this work: Spatial Geometry, in particular the study of pyramids, is part of the curriculum in high school, according to the Curriculums Guidelines for Mathematics for Basic Education Network of Public Education of the State of Parana.

**Keywords: - Mathematics -Pyramids -Spatial Geometry- Workshop**

## 1-Introdução

Durante muito tempo, e não muito distante (séc XX), muito se foi discutido sobre as formas de atuação do professor em sala de aula, como buscar um relacionamento melhor com o educando, como apresentar de forma mais eficaz os conteúdos. Podemos observar que surgiram propostas direcionadas para a formação de um aluno crítico, capaz de compreender a relação entre a teoria e a prática, deixando assim de buscar exclusivamente a memorização.

Apesar de muitas discussões, ainda uma grande parte de profissionais que lecionam a disciplina de matemática no ensino médio não concordam com estas reflexões. Acreditam ser mais uma maneira de “perda de tempo”, pois muitos ainda carregam a formação oriunda das Instituições do 3º grau, dos cursos técnicos.

Mas por que a matemática é ainda considerada uma das disciplinas que mais atemoriza os alunos?

Podemos levar em conta alguns fatores:

- Professores que utilizam a sala de aula apenas como um “bico” (profissionais sem compromisso com a educação);
- Má qualificação dos profissionais da educação;
- Educandos sem estímulo, desmotivados em relação à aprendizagem (geração imediatista, sem tempo para pensar e analisar);
- Relacionamento conflituoso entre educando e educador;
- Influência positivista do século XIX que privilegiava determinadas ciências em detrimento de outras;
- Má formação no Ensino Superior (Instituições que não dão conta de preparar o professor para trabalhar com o ser humano);
- Professores com excesso de carga horária, sem “disponibilidade de tempo para preparar seus conteúdos”
- Material e metodologias inadequadas.

Ao falarmos em matemática, não devemos nos esquecer de sua importância para o “homem” servindo como ferramenta para outras disciplinas, ou para compreender o mundo em que vivemos. Também através da Matemática foi possível o homem desenvolver suas habilidades, como na construção (ponto notável o caso das pirâmides do Egito).

Com este trabalho pretendemos apresentar aos professores e acadêmicos do curso de Matemática ou afins, um material didático para ser analisado e discutido em sala de aula, como suporte para o aprendizado da Geometria Espacial, abordando o conteúdo Pirâmides. Para tanto, utilizamos oficinas desenvolvidas para dois grupos. O primeiro(I), turma regular do ensino médio/diurno do Colégio Estadual Polivalente de Goioerê/2008 e a segunda(II), alunos da oficina (8 hs) FERA/COMCIÊNCIA - Etapa Campo Mourão/2008 (distribuídas em 2 turmas compostas por alunos de 7ª e 8ª séries do ensino Fundamental, e alunos do 1º, 2º e 3º (ensino noturno e diurno) da modalidade regular e supletiva.

Tomaremos como estrutura, uma breve passagem pela história da matemática em especial da geometria, e como tem sido “apresentada” no Brasil; a formação do professor de matemática, metodologias, proposta de material utilizado na oficina, conclusão da oficina, e referências bibliográficas

## **2- Um pouco da história da matemática**

A matemática tem sua origem à medida que o homem começa ter a necessidade de contar (quantificar). A partir daí, surge a necessidade de elaborar estratégias para facilitar seu “trabalho”. Logo, podemos compreender que a matemática surge na necessidade do homem em resolver os seus problemas.

A literatura nos traz os babilônicos como um dos primeiros registros do uso da matemática por volta de 3500 a.C., para registrar o gado, ou outros bens, com marcas ou traços em paus, pedras, etc, já aplicando o princípio da correspondência biunívoca[19].

Por volta de 3200 a.C., os egípcios no vale do rio Nilo (noroeste da África) apropriaram-se muito da matemática. Utilizaram-se da matemática desenvolvida para os cálculos das grandes construções (pirâmides), bem como procuravam compreender a relação da astronomia. Através da relação da inundação do rio

Nilo com o levantar a leste logo antes do sol da estrela Sírius (a estrela do cão), o que tomavam como sinal de inundação, que acontecia de 365 em 365 dias. Também através da observação do conhecimento da astronomia, estabeleceram um bom calendário solar, feito de doze meses de 30 dias cada e mais cinco dias de festa no final do ano. Foi através de dois documentos que pôde-se compreender a ligação dos egípcios com a matemática. Estes documentos, papiros, mostram textos que contém textos matemáticos. Ao total são 110 problemas direcionados a estudantes, relacionando questões sobre a distribuição de pães e cerveja, sobre balanceamento de ração para gado e aves domésticas, e sobre o armazenamento de grãos. Também constam questões envolvendo progressões aritméticas e geométricas, de uma forma não muito aplicável. Estes documentos (o Papiro de Rhind e o de Moscou) trazem 110 questões, das quais decorrem fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terra e volume de grãos. Também constam, nestes, problemas; 26 questões que envolvem o conhecimento geométrico, além de fórmulas para o cálculo de área de triângulos retângulos e volume do cilindro reto e do tronco de pirâmide de bases quadradas e a área de um triângulo qualquer [14].

Consta na literatura que a relação dos egípcios com a matemática tem registros até os primeiros séculos da era cristã.

Não podemos esquecer o registro dos romanos, que sem dúvida, para muitos, é considerada a civilização mais importante, pois seu centro foi a cidade de Roma, e desde sua fundação, 753 a.C., até ser ocupada por povos estrangeiros em 476 d.C., seus habitantes enfrentaram muitas guerras e de todos os tipos. E, aos poucos, conquistaram a península Itálica e o resto da Europa. Foi nesta Roma que se desenvolveu o número concreto, não inventando números novos, mas usando as próprias letras do alfabeto.

Os hindus utilizavam para cálculos, apenas nove sinais até o final do século VI e após, “introduziram” o zero como décimo sinal.

Os árabes também tem grande participação na construção do saber matemático. Foi na época do califa al-Mamun, que um dos mais brilhantes matemáticos árabes Mohamed Ibn Musa Alchwarizmi compreendeu o tesouro matemático que os hindus haviam deixado e resolveu escrever um livro chamado “sobre a arte hindu

de calcular”, onde explicava com detalhes como funcionava os dez símbolos. Logo os símbolos - 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 – ficaram conhecidos como indu-arábicos

Em 1202, Leonardo de Pisa, matemático italiano, conhecido como "Fibonacci", apresenta a obra intitulada “Leber abaci” na qual apresenta soluções de equação do 1º, 2º e 3º graus [15].

Nesta época, começa-se a utilizar o sinal de + (mais) e - (menos) sob a forma das letras “p” (plus = mais) e “m” (minus = menos).

No século XVII, a matemática toma nova forma, destacando-se de início René Descartes e Pierre Fermat. A grande descoberta de Descartes foi sem dúvida a "Geometria Analítica" que, em síntese, consiste nas aplicações de métodos algébricos à geometria.

Pierre Fermat, um advogado que nas horas de lazer se ocupava com a matemática, desenvolveu a teoria dos números primos e resolveu o importante problema do traçado de uma tangente a uma curva plana qualquer, lançando, assim, sementes para o que mais tarde se iria chamar, em matemática, teoria dos máximos e mínimos. Vemos assim no século XVII começar a germinar um dos mais importantes ramos da matemática, conhecido como Análise Matemática.

A Análise começa a tomar “forma” com o matemático francês Louis Cauchy (1789 - 1857), professor catedrático na Faculdade de Ciências de Paris, o qual deixou mais de 500 obras escritas, entre elas: "Notas sobre o desenvolvimento de funções em séries" e "Lições sobre aplicação do cálculo à geometria".

Paralelamente, nesta época, surgem geometrias diferentes da de Euclides, as denominadas Geometrias não euclidianas.

Por volta de 1900, o método axiomático e a Geometria sofrem a influência dessa atitude de revisão crítica, levada a efeito por muitos matemáticos, dentre os quais destacamos D. Hilbert, com sua obra "Fundamentos da Geometria" ("Grudlagen der Geometrie" título do original), publicada em 1901.

A partir do século XIX, a matemática começa então a se ramificar em diversas disciplinas como cálculo, aritmética trigonometria e geometria. E é a esta última que iremos no deter.

Não podemos deixar de citar, no século XX, o movimento da Matemática Moderna, que *influenciou o ensino da matemática em muitos países. Esse movimento nasceu como reação de uma política de modernização econômica que considerava a matemática e as ciências naturais como fundamentais para atingir o desenvolvimento científico e tecnológico.* (Brandão et all)

### **2.1-A Matemática no Brasil**

Como temos conhecimento, Pedro Álvares Cabral, chegou ao Brasil no dia 22 de Abril de 1500, tomando posse em nome de Dom Manuel I, rei de Portugal. Celebraram a primeira Missa, reconheceram a terra e, seguiram viagem para a Índia. A carta que Pero Vaz de Caminha, documento que fala sobre a nova terra empossada, não remete ao conhecimento matemático utilizado pelos nativos que aqui residiam, o que não nos dá uma real dimensão da cultura existente, apenas sabe-se da dizimação da população indígena e da imigração proveniente da África do Sul(involuntária) e da Europa (voluntária).

Durante o início da fase colonial, temos os Jesuítas, como referência na educação, como o padre José de Anchieta (1534-1597) que escreveu a primeira gramática e dicionário Tupi-Guarani. Também durante este período, temos informações da fauna e flora, e sobre a preocupação de ensinar poucos nativos e crioulos a língua portuguesa, o catecismo e a aritmética, vigentes de Portugal. Todo o que se “ensinava” era oriundo da Europa[2].

Muito a escola jesuítica contribuiu para a colonização do Brasil. Segundo D`Ambrosio, não podemos esquecer o excelente matemático Padre Valentin Stancel S.J., formado em Ormuz e Praga, e que permaneceu no Brasil de 1663 até sua morte em 1705. Stancel teve os resultados de suas observações de cometas mencionados no Principia de Isaac Newton. A considerável obra de Stancel começa agora a atrair atenção de historiadores do Brasil e da Europa.

Com o passar dos anos, surgiu a necessidade das construções de grandes igrejas e edifícios públicos, a urbanização e o traçado das estradas, construções de pontes e outras atividades que revelavam considerável grau de matemática. A partir deste momento, podemos dizer que teve início o desenvolvimento

comercial, o surgimento de cidades na costa e no interior do país. Não podemos deixar de observar que tudo tinha um propósito, o da defesa, que em 1744, José Fernandes Pinto Alpoim (1700-1765) elabora o primeiro livro de matemática do Brasil, com o objetivo de preparar jovens ao ingresso do Exame de artilharia, impresso em Lisboa, e em 1748 um segundo livro voltado ao preparatório ao ingresso do Exame de Bombeiros.

Durante este período, devemos observar a não existência de instituições de ensino superior, onde quem poderia, deveria ir para a faculdade de Coimbra, em Portugal, onde não havia oportunidade para os menos abastados.

Com a vinda da família real ao Brasil, em 1808, criou-se a Imprensa Régia, o Jardim Botânico, o Museu Real, a Biblioteca Real, o Observatório Astronômico, o Banco do Brasil e inúmeras outras instituições. Também por volta de 1808, criou-se as primeiras escolas superiores, as Escolas de Cirurgia do Rio de Janeiro e da Bahia, e logo em seguida da Academia Real Militar[2].

Podemos considerar um dos primeiros artigos, o problema isoperimétrico do sólido de maior volume, escrito na revista *O Patriota*, por José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852), que havia feito o curso de Matemática na Universidade de Coimbra, que demonstra conhecimento de matemática avançada.

Com a vinda da família real, criou-se Academia Real Militar, em 1811, com os cursos de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de quatro anos. Os livros adotados eram de Euler, Bézout, Monge, Lacroix e outros destacados textos franceses. Dentre seus professores estava José Saturnino da Costa Pereira.

Segundo D`Ambrósio[2], a Academia Militar foi transformada em Escola Militar da Corte em 1839. Em 1842 foi instituído o grau de Doutor em Ciências Matemáticas. O primeiro doutorado foi concedido a um jovem maranhense, Joaquim Gomes de Souza (1829-1863), o "Souzinha". Sua dissertação, apresentada como tese de doutoramento na Escola Militar em 1848, trata de estabilidade de sistemas de equações diferenciais.

Com a dita "independência" brasileira, devemos compreender que ao escapar da invasão napoleônica, a família real portuguesa viaja ao Brasil para buscar um refúgio, e encontra uma colônia incomparavelmente pior que as colônias das



Américas. Não havia Universidades, produção industrial, infra-estrutura cultural, nem imprensa.

Em 1821, à família real retorna a Portugal, deixando claro que apenas a independência poderia ser o objetivo dos que optassem em ficar no Brasil, e no próximo ano (1822), por intermédio do príncipe herdeiro de Portugal Dom Pedro Alcântara, o Brasil proclama sua independência em 7 de setembro de 1822.

Com a necessidade de retornar a Portugal, Dom Pedro abdica do trono do Brasil em nome de seu filho, brasileiro, que foi coroado como imperador do Brasil em 1842, como D Pedro II.

Este período, conhecido como segundo império: um período de muito progresso econômico e intelectual, com forte presença das idéias positivistas de Augusto Comte.

Com a Proclamação da República, em 1889, do ponto de vista matemático e científico pode ser considerada como de pouca inovação, Como o império floresceu do positivismo de Comte, a república foi proclamada sob seu paradigma. Matematicamente, a consolidou as propostas positivas já em vigor nas Escolas de Engenharia.

Podemos citar alguns matemáticos, seus estudos e produção textual como importantes traduções da Geometria de Legendre, a Álgebra de Clairaut, e alguns escritos de brasileiros, como a Álgebra de Almeida Lisboa e os cursos de Cálculo e Geometria Analítica de Trompowski.

No início do séc XX, a escola de Engenharia começa a receber impulsos de modernização através de jovens graduados como Otto de Alencar Silva (1874-1912) com questões de Análise Matemática e Manuel de Amoroso Costa (1885-1928) com alguns trabalhos sobre astronomia, fundamentos e convergência.

Em 1918, Theodoro Augusto Ramos, representante do “novo pensar científico” na Escola de Engenharia-RJ doutora-se com a tese "Sobre as Funções de Variáveis reais" que apóia as tendências europeia. Também devemos citar o seu colega Lélío Itapuambyra Gama (1892-1981), professor da Universidade do Distrito Federal (fundada em 1935 e fechada em 1938). Também foi fundador e diretor do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) até o ano de 1965. Gama foi

responsável pela introdução de cursos rigorosos de Análise Matemática, partindo da definição de números reais por cortes de Dedekind e de uma definição rigorosa de limites e continuidade.

Também lembramos matemáticos das décadas de 20 e 30 como Luis de Barros Freire (1896-1963) em Recife; Christóvam Colombo dos Santos (1890-1980) em Belo Horizonte. Temos em São Paulo, a transferência de Theodoro Augusto Ramos para a Escola Politécnica, em 1919.

Com a influência do positivista, com a quantidade de imigrantes europeus no final do século XIX, começa-se a discutir a contestação das idéias positivistas.

Com a chegada do século (XX) “surge” um novo pensar científico na Escola de Engenharia do Rio de Janeiro, onde está Theodoro Augusto Ramos (1895-1935), que em 1918 se doutorou com uma tese "Sobre as Funções de Variáveis reais", trabalho moderno que se apoiava nas tendências então correntes na matemática européia.

1921-intelectuais ligados à Sociedade Brasileira de Ciências a transformaram em Academia Brasileira de Ciências - ABC.

Na década de 1920 a ABC inicia um programa de intercâmbio com cientistas e instituições científicas estrangeiras. Durante este período vieram ao Brasil dentre outros os cientistas: Jacques Hadamard, Émile Borel e Albert Einstein. Em 1922 “acontece” a Semana de Arte Moderna em São Paulo. Em 1924, no Rio de Janeiro foi fundada a Associação Brasileira de Educação – ABE, que agregava vários intelectuais brasileiros preocupados com a qualidade e o futuro do ensino nas escolas do país (surgimento do Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova), dentre eles Anísio Teixeira. Com a falta de política educacional para o país e Faculdades de Ciências, a ABE promove cursos de extensão e conferências sobre diversos temas voltados aos professores da época, estimulando seus membros a publicarem jornais nos jornais da cidade, artigos expositivos, falando sobre temas educacionais e científicos, dedicados aos leitores leigos. Também promove a 1ª Conferência Nacional de Educação, durante a presidência de M. Amoroso Costa, onde apresentou o trabalho: A Universidade e a Pesquisa Científica. O qual continha as conclusões, onde as universidades deveriam formar pesquisadores, que deveriam pertencer ao corpo docente, com obrigações

didáticas reduzidas, assegurando-lhes recursos materiais, laboratório para pesquisa, seminário matemáticos bibliotecas especializadas, e assegurando uma remuneração suficiente para dedicar todo tempo a esses trabalhos.

Na década de 20, começam a “surgir” novos livros de Cálculo Vetorial, representando grande inovação com relação aos cursos tradicionais de inspiração positivista. Segundo D’Ambrósio, um golpe considerado mortal para a corrente positivista, foi a visita, em 1925, de Albert Einsteins, que pronunciou uma conferência na Academia Brasileira de Ciências, durante sua viagem à Argentina, que provocou uma reação da corrente modernizadora, decisivo para iniciar uma nova era da “ciência brasileira”. Começa uma nova fase para os estudos matemáticos no Brasil, dando um intenso relacionamento com a França que nos 20 anos já se impunha a influência de Fréchet, Hadamard e Cartan. Enquanto isso, na Polônia, desenvolvia-se a teoria dos funcionais analíticos e a topologia e a lógica.

Até 1930, o Brasil manteve as características do império. Mas, em 1930, com a revolução Getúlio Vargas, possibilitou a entrada do Brasil da modernização da matemática, conseqüências das transformações política e cultural.

Em 1933 foi criada a Universidade de São Paulo, reunindo algumas escolas superiores já em atividade, organizada nos moldes da Universidade de Berlim

Até 1930 haviam as disciplinas de geometria, álgebra, aritmética e trigonometria, trabalhadas isoladas nos cursos primários e secundários. Apenas alguns cursos específicos tinham em sua “grade” a disciplina de geometria, como os cursos de navegação, artilharia e fortificação com o intuito de desenvolver conhecimento para a fabricação de projéteis, fabricação de bombas, e nos cursos superiores de engenharia, os quais davam ênfase, aos profissionais da “elite”.

Neste período, no Colégio Pedro II, o professor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, começa a provocar grandes discussões no que se refere a matemática, procurando assim um currículo para a disciplina.

Em 1930, o primeiro ministro do recém criado Ministério da Educação e Saúde, Francisco Campos, com a ajuda do professor Euclides Roxo elabora uma nova proposta curricular. A disciplina matemática agrega a álgebra, a aritmética, a trigonometria e a geometria, o que ocasiona muitos problemas, pois com a

unificação em uma única disciplina, muitos professores se negaram a trabalhar com determinados “campos”.

### **3-Ensino da matemática – o trabalho com o conteúdo geometria espacial**

A questão inicial sobre a qual nos detemos neste trabalho é: Como vem sendo trabalhado nos últimos anos o conteúdo geometria espacial?

Sabemos que o século XX foi alvo de muitas discussões sobre o ensino da matemática. As propostas foram direcionadas para a formação de um aluno crítico, capaz de compreender a relação entre a teoria e a prática, deixando de buscar exclusivamente a memorização. Porém, durante todo este processo, muitas instituições de ensino superior, deixaram de “atualizar” suas propostas e projetos dos cursos de formação docente, não sendo a formação do professor de matemática uma exceção.

Nos dias de hoje nos deparamos, em certos casos, com duas realidades preocupantes em sala de aula:

- a deficiência na qualificação de alguns profissionais da educação, possuindo apenas uma formação superficial do conteúdo da disciplina;
- alunos desmotivados em relação a aprendizagem da matemática, por estar sendo o estudo desta disciplina, em muitos casos, primado pelo uso da memorização e aplicação mecânica das fórmulas, deixando assim, de lado, a compreensão real dos conteúdos estruturantes, como a Geometria.

Além dessas questões nos deparamos com as dificuldades de desempenho dos estudantes quanto ao conhecimento Matemático, evidenciado nas avaliações organizadas pelos governos estaduais e federal como SAEB, INEP e outras.

De acordo com o exposto, percebe-se a necessidade de uma reflexão sobre o ensino da Matemática, em especial da Geometria Espacial, conteúdo geralmente apresentado através de formulários, ou então, relegado a segundo plano.

Assim, questionamos: é possível desenvolver o conteúdo Geometria Espacial, sem priorizar a memorização?

“[...] efetivamente, a Geometria é a ciência do espaço, trabalha com formas e medições. Mas é ingênuo não reconhecer que nos tempos atuais a percepção de espaço é distinta [de outrora] e que se distinguem novas formas [geométricas], assim como se avalia e se quantifica de outro modo e se trabalham as quantidades com uma outra dinâmica. Esse novo situar-se no seu ambiente requer do homem novas maneiras de explicar, de lidar e de desempenhar no seu ambiente natural e social. São outros os fenômenos e os questionamentos que impactam e estimulam o imaginário dos jovens. Ao reconhecer novas teorias de aprendizagem, novas metodologias e novos materiais didáticos, estaremos trazendo professores e educandos ao mundo como ele se apresenta hoje.” [3, p.31)

Pensar o ensino de Geometria no Ensino Médio pressupõe pensar o próprio ensino da disciplina matemática, ainda fortemente marcado pelo ensino tradicional, como na época do ensino Jesuítico, onde o ensino era primado pela repetição de formulários. Hoje ainda, para muitos, a matemática é vista apenas como conceitos, fórmulas e atividades de cálculo, desvinculadas do contexto social no qual o educando está inserido.

A idéia de procurar uma metodologia mais apropriada para o ensino geometria espacial nasce da percepção de que, apesar de muito se ter debatido e escrito a respeito nas últimas décadas, as mudanças em sala de aula vem ocorrendo aos poucos, em algumas regiões de forma ainda muito insipiente.

#### **4-O trabalho Matemático no contexto paranaense**

Com o lançamento do Sputnik, não só o governo americano se preocupou com o êxito russo, mas vários educadores, quanto a formação científica da população. Tomando consciência da necessidade de uma reformulação do ensino da matemática, temos este fato como precursor do Movimento da Matemática Moderna, tentativa esta que nos anos 60 e 70 procurava superar o ensino

tradicional que até aquele momento, privilegiava a matemática clássica, o modelo euclidiano e a visão platônica.

No Brasil, este Movimento foi coordenado pelo grupo paulista GEEM, coordenado por Oswaldo Sangiorgi, incentivando criação de grupos de estudos, visando a modernização do ensino da Matemática Moderna.

No Paraná, o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM), criado e coordenado Osny Antonio Dacol, diretor do então Colégio Estadual do Paraná, maior colégio do estado, trabalha com classes experimentais. O NEDEM elaborou sua proposta de Matemática Moderna, que foi publicada em duas coleções de livros didáticos que passam a ser adotadas pelas escolas paranaenses durante duas décadas. Este trabalho marca o ensino da Matemática no Paraná.

A partir da década de 90, o Paraná, assim como outros estados brasileiros norteou suas propostas educacionais e, conseqüentemente, de ensino da matemática pelos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais).

Muitas discussões foram organizadas. No Paraná, essas discussões resultaram em um referencial teórico, conhecido como Diretrizes Curriculares Estaduais que organizaram o trabalho com a Matemática em conteúdos estruturantes e específicos.

O documento apresenta conteúdos estruturantes e específicos como se segue:

- FUNÇÕES

Função Afim, Exponencial, Função quadrática, Logarítmica, Modular, Polinomial, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e Trigonometria

- TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Análise Combinatória, Binômio de Newton, Estatística, Matemática Financeira e Probabilidade

- GRANDEZAS E MEDIDAS

Media de massa, Medidas de Energia, Medidas de grandezas vetoriais, Medidas de informação, Medidas derivadas: áreas e volume, Trigonometria: relações métricas no triângulo retângulo e a trigonometria na circunferência

- **NÚMEROS E ÁLGEBRA**

Números reais, Equações e inequações exponenciais, logarítmicas e modulares, Matrizes e Determinantes, Números complexos, Polinômios e Sistemas lineares

- **GEOMETRIAS**

Plana, Analítica, Espacial, e Noções básicas de geometria não euclidiana

#### 4.1-Descrição de metodologias

Conforme Pavanello [22], muitos autores apontam a necessidade de rever as metodologias de trabalho em sala de aula com a disciplina em questão. Muitos professores confessam não se sentirem confortáveis com o conteúdo por não dominá-lo bem, por não terem jamais estudado em sua graduação, ou quando visto o foi de modo insatisfatório.

Segundo a professora Lizia Helena Nagel em palestra no auditório da UNIAMÉRICA no dia 17 de maio de 2007, a queda na avaliação nacional da matemática pelo SAEB: Primeiros Resultados 2005, aponta um declínio do ensino da matemática conforme tabela:

Série	1995	1997	1999	2001	2003	2005
4 <sup>a</sup> . E.F	190,6	190,8	181	176,3	177,1	182,4
8 <sup>a</sup> . E.F	252,2	250	246,4	243,4	245	239,5
3 <sup>a</sup> E.M	281,9	288,7	280,3	276,7	278,7	271,3

Pirola e Proença [23] nos mostram o contexto histórico e desenvolvimento da Educação Matemática, que aparecem como Tendências Pedagógicas na Educação Matemática e nunca tiveram um período próprio, mas aparecem no ensino escolar do Brasil como:

- **Empírico-ativista (década de 1920 – era contra o ensino tradicional):** o professor como o orientador e facilitador da aprendizagem. Ricos materiais didáticos e experiências em ambientes propícios caracterizam o que se pretende nessa tendência: aprender a aprender. O ensino da geometria deveria ser iniciado a partir da experiência dos alunos com os objetivos do mundo físico;

- **Formalista Clássico (década de 1950):** ensino da geometria alicerçado no modelo euclidiano lógico-dedutivo, centrado no professor como transmissor e expositor do conteúdo, onde a aprendizagem do aluno se dava pela reprodução de raciocínio em demonstrações;
- **Formalista Moderna (após 1950 – Movimento da Matemática Moderna):** ênfase nos aspectos lógicos-estruturais tendo como fundamento a implementação das estruturas algébricas. O ensino da matemática (e o da geometria em especial) continuou centrado no professor e, o aluno, em grande maioria, passivo frete a esse processo de ensino
- **Tecnicista (origem norte-americana/após 1964 no Brasil):** ensino baseado em técnicas e em recursos, ou seja, a ênfase dada ao material instrucional o qual trata o conteúdo como informação, regras, macetes, etc, para garantir a fixação de conceitos ou princípios. Nesse caso, a geometria é ensinada a partir de fórmulas prontas e acabadas.
- **Construtivismo (origem com Piaget):** o indivíduo constrói novos conhecimentos na relação com o mundo físico e social. Especificamente, construção do conhecimento geométrico se dá pela interação do sujeito com os objetos, ações e mesmo entre suas próprias idéias já formadas. É uma atividade de construção realizada por abstrações que ocorrem na mente;
- **Etnomatemática (com Ubiratan D’Ambrósio):** toma como ponto de partida os problemas da realidade no processo ensino aprendizagem. Busca entender os modos de explicar e conhecer em diversos contextos culturais aproximando o conhecimento do sujeito do conhecimento formal em Matemática

Com base nestas informações, podemos perceber que muitos ainda primam pelo conhecimento formalista clássico e tecnicista, o que pode ter ainda conseqüências desta tendência, além da valorização da álgebra e conseqüente abandono do ensino da Geometria.

Hoje, as DCEs do Estado do Paraná apontam alguns encaminhamentos Metodológicos para o ensino da Matemática:



- **Resolução de Problemas:** é uma metodologia onde o estudante tem a oportunidade de aplicar os conhecimentos matemáticos já adquiridos em novas situações de modo a resolver a questão proposta;
- **Etnomatemática:** reconhece e registra questões de relevância social que produzem o conhecimento matemático. Essa tendência leva em consideração que não existe um único, mas vários e distintos conhecimentos e nenhum é menos importante que outro;
- **Modelagem Matemática:** é a arte de transformar problemas reais com os problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real;
- **Mídias Tecnológicas:** Os recursos tecnológicos, seja software, televisão, calculadora, aplicativos da internet, entre outros, têm favorecido as experimentações matemáticas e potencializado formas de resolução de problemas;
- **História da Matemática:** é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação de situações problemas, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos “a resolução de problemas”.

Através destas tendências, é possível melhorar a prática metodológica de sala de aula no ensino da Geometria Espacial? Qual a importância do ensinar Geometria? Através da Geometria, podemos desenvolver a capacidade do educando em conjecturar, experimentar, testar hipóteses, comunicar idéias, generalizar, além de desenvolver habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e aplicação em solução de problemas?

Na tentativa de responder estas questões, tomamos como base das discussões para o desenvolvimento deste trabalho, os pressupostos teóricos Metodológicos: Resolução de Problemas, Mídias Tecnológicas e a História da Matemática.

## 5-O Projeto

Com o objetivo de mostrar uma maneira de desenvolver o conteúdo de Pirâmides em Geometria Espacial no Ensino Médio, aplicamos o projeto em duas turmas, as quais serão chamadas de T1 e T2. T1 foi composta por 38 alunos regulares de uma mesma turma do ensino médio no período da manhã durante os meses de maio e junho. Por se tratar de alunos sem vínculo anterior com o professor, propôs-se um período de “adaptação” entre professor x alunos. Já a turma T2, constituiu-se de alunos inscritos no projeto Fera/Com Ciência, Etapa Campo Mourão, no período de 16 a 19 setembro/2008. Oficina nº 12 - “Brincando com Geometria” com duração de 8 horas. Esta última turma foi composta por alunos da região noroeste, composta por três Núcleos Regionais de Educação (Campo Mourão, Goioerê e Pitanga), e 64 alunos das modalidades regular e supletiva, das diversas séries do ensino médio (1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>), bem como alunos de sétima e oitava série do ensino fundamental.

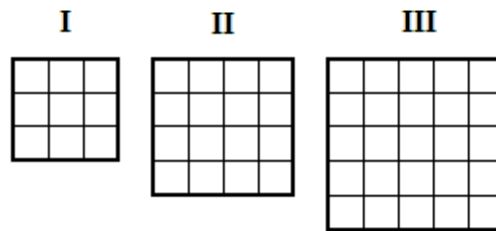
### **5.1-Descrição do trabalho com a Turma 1:**

O projeto foi desenvolvido em 3 ambientes: laboratório de Informática, sala de aula, biblioteca da escola. O laboratório teve por objetivo incentivar o aluno a buscar informações referentes às questões discutidas em sala de aula e também como recurso tecnológico para preparação de material a ser utilizado durante exposição oral de questões propostas. A biblioteca foi também o local utilizado para pesquisa, e discussão sobre questões propostas. A sala de aula foi o espaço onde o aluno pode expressar seu conhecimento através de questões propostas, esclarecimento de dúvidas.

Após o conteúdo de Prismas, iniciamos junto aos alunos, conceitos e definições sobre pirâmides. Propomos uma revisão sobre o Teorema de Pitágoras, cálculo de áreas de figuras planas e múltiplos e submúltiplos de unidades de comprimento, área e volume de Pitágoras.

Segue a descrição das atividades desenvolvidas com essa turma:

Iniciamos com o seguinte questionamento: Qual a Relação que existe entre o quadrado I, II e o III?



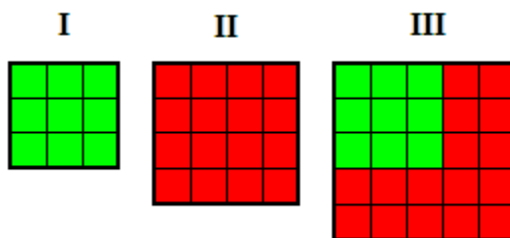
Some a quantidade de quadrados existentes em I, II e III. Observe que se somar a quantidade de “quadrinhos” de I e II, obterá a quantidade de “quadrinhos” de III.

Na verdade, você observa que a quantidade dos quadrinhos (menores) em cada quadrado está relacionado com sua área. Logo podemos concluir que: a área de I + área de II = área de III.

Esclarecemos então, que outra maneira de calcular a quantidade de quadrinhos de cada um é multiplicar a quantidade que se encontra na base, pela quantidade que se encontra na altura, totalizando assim a quantidade total de cada um (área do quadrado). Por ser cada figura um quadrado, ou seja, tanto a base quanto a altura, possuem exatamente a mesma quantidade de quadrinhos, logo, podemos afirmar que em um quadrado, sabendo apenas o valor de um dos lados, temos como calcular sua área.

Assim, procuramos ressaltar que o teorema de Pitágoras está fundamentado nesta idéia. Chamando de “a”, a quantidade de quadrinhos encontrada no lado de III, “b” a quantidade encontrada no lado de II e, “c” a quantidade encontrada no lado de I, então teremos:

Área de III = Área de II + Área de I, isto implica que temos um triângulo retângulo de hipotenusa “c” e catetos “a” e “b”



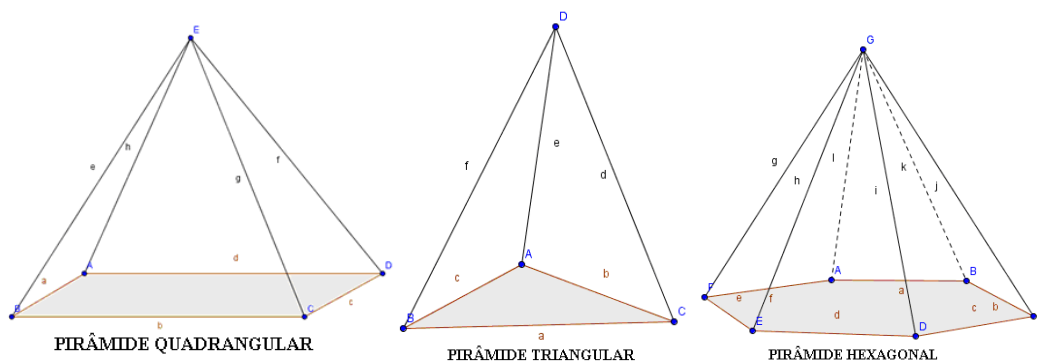
Ou seja:  $a^2 = b^2 + c^2$

### 5.1.2- CONHECENDO UMA POUQUO DE PIRÂMIDE

Depois dessa fase inicial apresentou-se o seguinte material, com proposições de atividades:

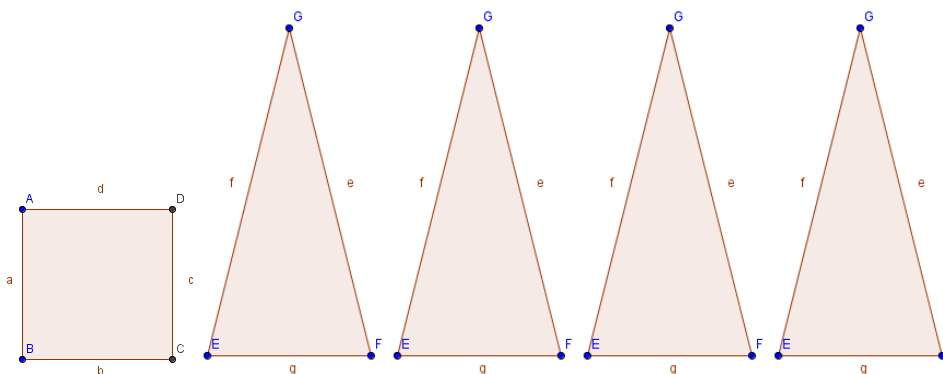
Euclides através de seu livro XI dos Elementos, apresenta a definição XII: “Pirâmide é uma figura formada por diferentes planos, os quais todos, saindo de um mesmo plano, se terminam em um mesmo ponto”.

A pirâmide recebe seu nome de acordo com sua base, por exemplo: pirâmide quadrangular, pirâmide hexagonal, etc...



Também podemos classificar as pirâmides quanto a regularidade de suas bases. Uma pirâmide é dita regular, se sua base é formada por um polígono regular e, as faces laterais, (triângulos isósceles) são congruentes entre si.

Tomando como base uma pirâmide quadrangular regular, temos 5 figuras que a “compõe”: um quadrado (base) e 4 triângulos isósceles semelhantes:



Logo, para calcularmos a área desta pirâmide, muitos livros nos apontam com a

fórmula: 
$$S_{\text{piramide quadrangular}} = \text{Área da base} + \text{área lateral}$$

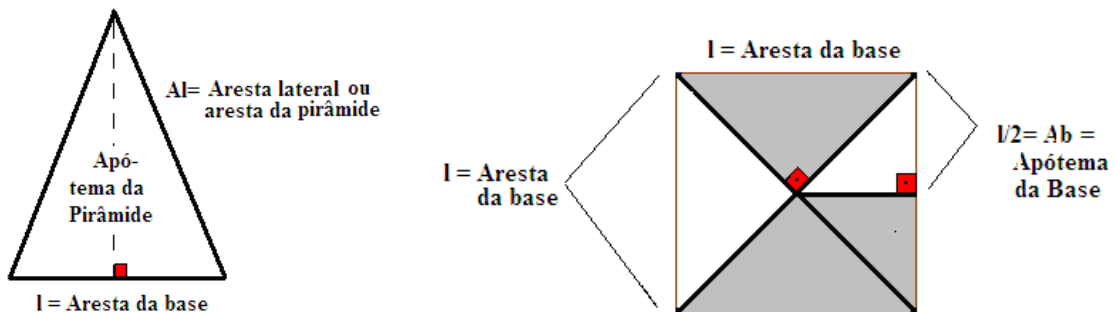
Podemos imaginar a área da base como o quadrado e a área lateral os triângulos, logo temos:

$$S_{\text{pirâmide quadrangular}} = \text{Área do quadrado} + \text{área de 4 triângulos isóceles}$$

Através desta analogia, podemos também calcular a área de qualquer pirâmide regular, pois necessitamos apenas sabermos qual é a sua base (através de seu nome) e a quantidade de triângulos que a compõem (que “saem” da base).

Muitos livros apresentam termos especiais. Podemos perceber como sendo:

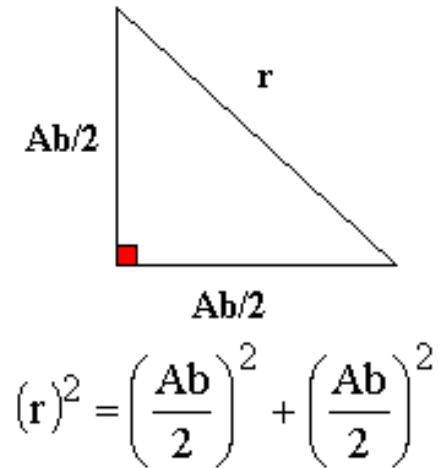
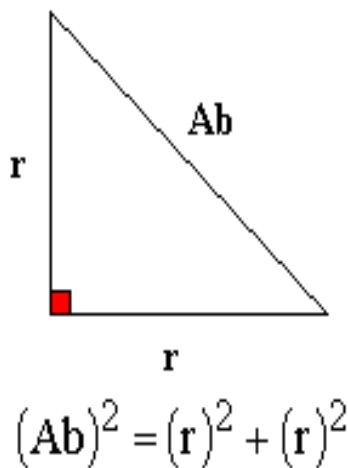
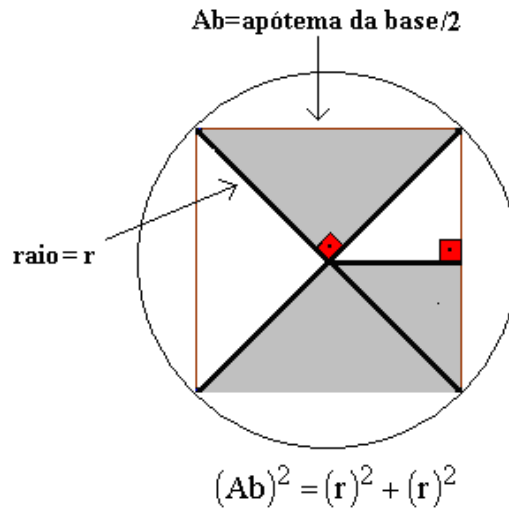
- Lado do Quadrado = Aresta da Base =  $Ab$
- Base do Triângulo = Aresta da Base =  $l$
- Altura do Triângulo = Apótema da Pirâmide =  $Ap$
- Encontro de 2 lados dos triângulos = Aresta Lateral =  $Al$
- Metade do comprimento do lado do quadrado = Apótema da Base =  $Ab$



Podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para “encontrarmos” valores que muitas vezes não estão explícitos nos enunciados de muitos problemas.

$$(\text{Apótema da pirâmide})^2 = (\text{aresta lateral})^2 + \left( \frac{\text{aresta da base}}{2} \right)^2$$

Se considerarmos o quadrado inscrito em uma circunferência teremos a seguinte relação:

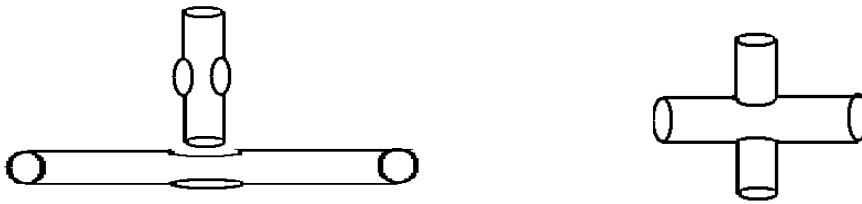


Agora que você já percebeu que as pirâmides estão relacionadas com o Teorema de Pitágoras, você pode construir uma pirâmide de base quadrangular. Para isto, utilize palitos para churrasco, e “garrote” de borracha (utilizadas para a retirada de sangue. Possivelmente, você encontrará este último em uma farmácia). Ao construir a pirâmide, construa também todas as relações possíveis utilizando o Teorema de Pitágoras

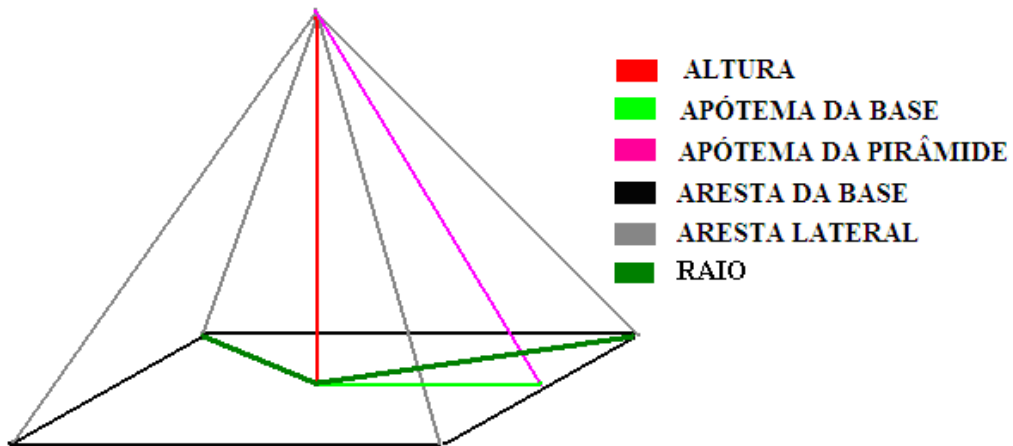
Para a construção, recorte o garrote de 4 cm em 4 cm, conforme a figura



Encaixe os pedaços tantos quantos forem necessários:



Você obterá o seguinte “esqueleto” da pirâmide:



Após os alunos entenderem sobre a necessidade de compreender a relação entre elementos de uma pirâmide, propôs-se a questão: “Mas como calcular o volume da pirâmide?”

Após pesquisa realizada pelos alunos apresentamos uma garrafa de litro, um cubo com 10 cm de aresta, relembramos a relação entre o volume do cubo e após utilizamos uma pirâmide com 10 cm de aresta da base e altura, e assim, demonstramos a relação entre o volume do prisma e o volume de uma pirâmide com bases iguais e alturas também iguais, estabelecendo a relação de ser o volume da pirâmide 3 vezes menor que o volume do prisma. Sendo assim estabelecemos a relação

$$3 \cdot V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{prisma}} = S_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{S_{\text{base}} \cdot h}{3}$$

## 5.2- Descrição do trabalho com a Turma 2:

O projeto foi desenvolvido em salas de aula, tendo como recursos midiáticos a TV Pendrive. Por se tratar de um grupo heterogêneo, como se esperava, foi utilizado para a realização desta oficina material de apoio para manipulação. Ao elaborar esta oficina, tomou-se o cuidado de apresentar uma revisão um pouco mais abrangente. Os assuntos abordados foram:

- Ângulo, polígonos regulares e suas áreas, diferença entre figuras planas e espaciais, Teorema de Pitágoras, circunferência e sua área, polígonos regulares inscritos e circunscritos e suas relações quanto ao ângulo, apótema e lado, prismas e nomenclaturas.

Esta oficina foi realizada através de atividades, as quais necessitaram régua, tesoura, papel, lápis, caneta, transferidor, compasso, palitos para churrasco, “garrote” e elástico.

A primeira atividade foi solicitar que recortassem 50 quadradinhos de 1cm x 1cm e, a medida que ia sendo executada a atividade, questionávamos a respeito de ângulo, soma de ângulos internos e externos, soma dos ângulos internos de um quadrado. Após, solicitamos que fosse montado “um quadrado” com 1 peça. Após, apontamos para a tentativa de montar “quadrados” com 2, depois 3, 4,5, até a quantidade de 50 peças, para que pudessem compreender de uma forma lúdica, o que é raiz quadrada, bem como calcular a área de um quadrado.

Após o encerramento desta atividade, solicitamos que fossem montados quadrados com a maior área possível, desde que com quantidade de peças diferentes. Obtivemos três quadrados com lados 3, 4 e 5. A partir daí, procuramos desenvolver o conhecimento básico do Teorema de Pitágoras buscando juntá-los pelos “bicos”.

A terceira atividade foi desenvolvida para que o aluno pudesse ter o contato com as “ferramentas” da geometria (régua, compasso, ...) trabalhando a construção de polígonos regulares inscritos em circunferência e suas relações entre raio, apótema e lado.

A próxima etapa foi construir através de palitos de churrasco e garrote, prismas retos de base quadrangular regular, triangular e hexagonal. Estabelecemos uma relação entre área lateral, área total, área da base, bem como o volume. Foi



possibilitado ao educando a oportunidade de compreender a relação entre  $\text{cm}^3$  e litros e seus múltiplos e submúltiplos. A partir daí, o relato sobre o assunto pirâmides, segue conforme descrito no grupo T1.

## 6-Considerações Finais

A proposta inicial deste trabalho foi desenvolver uma maneira, que pudesse ser mais agradável para o ensino do conteúdo pirâmides ao aluno do ensino médio. Desde o início, sempre pensamos em desenvolver o projeto em sala de aula, com alunos regulares. Porém, com a possibilidade de aplicá-lo também a alunos considerados heterogêneos, conforme o grupo T2, já descrito anteriormente, abraçamos a idéia, por acreditar que enriqueceria este trabalho. Durante a execução do projeto, a maior dificuldade encontrada na turma T1, foi o não comprometimento inicial dos alunos, os quais acreditavam ser apenas mais um conteúdo para se “decorar” fórmulas. O resultado obtido neste grupo foi surpreendente. 85% dos alunos obtiveram um resultado muito bom, acima dos 75%. Já o grupo T2, não foi possível fazer este levantamento, devido ao pouco tempo para a execução, mas ficou muito claro, que é possível ensinar matemática de uma maneira mais agradável aos alunos, deixando aquela “lista de fórmulas”. Também fica muito claro a melhoria do relacionamento entre professor x aluno. Propomos aos que se interessaram pelo projeto, avaliar a necessidade de continuação deste projeto, buscando metodologias que possam tornar a aula de matemática mais “agradável” ao aluno, sem deixar de primar pela qualidade de ensino que tanto buscamos.

## 7-Referências Bibliográficas

- [1] MULLER E NEHRING, Cheila Cristina e Catia Maria. **O Ensino da Geometria Espacial no Período da Republica: 1889 à 1930.**
- [2] D`AMBROSIO, Ubiratan - **História da Matemática no Brasil.**
- [3] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Departamento de Ensino de Primeiro Grau. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**, Curitiba, 2008.
- [4] EUCLIDES-**Elementos de Geometria.**

- [5] LOPEZ, Alvarez – **O Enigma das Pirâmides** – Hemus - São Paulo
- [6] , vários autores. **Matemática** – Curitiba: SEED-PR, 2006. –P.216
- [7] PEREIRA, Luiz H.F -. **Teorema de Pitágoras: lembranças e desencontros na matemática** – UFP - Passo Fundo 2002
- [8] RPM - **Revista do Professor de Matemática n 13**/Artefatos: São Paulo 1988-2 sem/88
- [9] RPM - **Revista do Professor de Matemática n 48**: São Paulo
- [10] GUERDES, P. **Sobre o despertardo pensamento geométrico**. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1992.
- [11] [http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select\\_action=&co\\_obra=15055](http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=15055)
- [12] <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/elemento seuclides.htm>
- [13] <http://www.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/Modulo3PolidrosEuler.html>
- [14] [http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/index\\_h\\_tempo.html](http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/index_h_tempo.html)
- [15] <http://www.lmc.ep.usp.br/people/hlinde/Estruturas/queops.htm>
- [16] <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>
- [17] <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2.html>
- [18] <http://www2.pucpr.br/reol/index.php/DIALOGO?dd1=581&dd99=view>
- [19] <http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2003/hm/page02.htm>
- [20] <http://educar.sc.usp.br/licenciatura/2003/hm/page03.htm>
- [21] SILVA, Clóvis Pereira da. **Sobre a História da Matemática no Brasil após o período colonial**.
- [22] PAVANELLO, Regina Maria. **Por que ensinar/aprender geometria?**
- [23] PIROLA E PROENÇA. **Polígonos e Poliedros: uma análise da formação conceitual de alunos do Ensino Médio-UNESP-BAURU/SP**