Versão Online ISBN 978-85-8015-038-4
Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Produção Didático-Pedagógica

2007

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

Autor: Antonio Osny Gaiowski

NRE: Toledo

Escola: Colégio Estadual Presidente Castelo Branco

Disciplina: Matemática

Disciplina interdisciplinar 1: História

Disciplina interdisciplinar 2: Geografia

QUANDO A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO É DIFERENTE DE 180º

Antonio Osny Gaiowski

Muitas vezes você ouviu ou estudou que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Essa proposição é conhecida por Lei Angular de Tales e nega o título deste texto. Afinal, por que e quando a soma dos ângulos internos de um triângulo não é 180º?

As primeiras idéias geométricas foram abstraídas da natureza pelo homem nos primeiros dias da civilização e influenciaram o desenvolvimento da humanidade. Inicialmente, essas idéias contemplavam as necessidades que o homem teve de buscar uma agricultura intensiva, em virtude de mudanças climáticas e aumento da população. Ao longo dos rios Nilo no nordeste da África, Tigre e Eufrates no ocidente asiático, Indo e Ganges no centro sul asiático, Howang Ho e Yangtze na Ásia Oriental surgiram as primeiras civilizações do mundo antigo. Drenando pântanos, controlando inundações e irrigando o solo ao longo destes rios o homem foi capaz de fertilizar as terras de suas margens. Concomitantemente, surgiram os primeiros palácios, templos e as pirâmides. Projetos dessa natureza necessitavam de conhecimentos tecnológicos de engenharia e matemática. Deste modo, em diferentes lugares do planeta produziu-se conhecimento geométrico para atender as necessidades do homem.

PESQUISA

- Você sabe que povos da Antiguidade viviam ao longo destes rios?

- Como era sua escrita e forma de governo?
- Que países são, atualmente, banhados por estes rios?
- Quais são as principais atividades econômicas desses países?
- Quais são as principais formas de governo desses países?
- Existem, ao longo destes rios, países desenvolvidos? Quais?
- Existem, ao longo destes rios, países em desenvolvimento? Quais?
- Existem, ao longo destes rios, países subdesenvolvidos? Quais?
- Qual é a forma de governo existente nesses países?
- Quais são as principais religiões professadas por seus habitantes?
- Todos os países vivem em paz ou existem guerras na região?
- Aponte os principais problemas dos povos que vivem nesses países.

A maioria dos conhecimentos geométricos dos primeiros povos era oral. Com o surgimento da escrita, criou-se a classe sacerdotal dos escribas. A eles coube o registro dos primeiros conhecimentos geométricos do homem. Esses registros eram feitos em papiros (Egito), tábuas de argila (Mesopotâmia) e até em bambus (China). Acredita-se que muitos documentos, com o passar dos anos, se perderam ou foram destruídos. Porém, alguns papiros notáveis e muitas tábuas de argila foram resgatados, decifrados e encontram-se guardados nos principais museus ou bibliotecas das universidades da Europa ou dos Estados Unidos.

PESQUISA

- Você sabe qual era a escrita do povo egípcio antigo? Quem a decifrou? Em que ocasião?
- Qual era a escrita dos povos antigos que viveram na Mesopotâmia? Quem a decifrou? Em que ocasião?

Ao término do segundo milênio antes de Cristo, os povos do Egito e da Mesopotâmia foram suplantados econômica e politicamente pelos hebreus, assírios, fenícios e gregos. O homem aprendeu a lidar com armas e ferramentas produzidas em ferro. Inventou o alfabeto e a moeda. Fez o comércio crescer e novas regiões foram descobertas. Estava por surgir uma nova civilização que estenderia seus limites desde o litoral italiano, passando pela Sicília, pela parte continental da Grécia, até as costas da Ásia Menor: a civilização grega.

No campo da Matemática, os gregos foram os primeiros a não se importar com o como as coisas aconteciam e, sim, em indagar porque as coisas ocorriam. Surge, assim, a Geometria Demonstrativa. Credita-se a Tales de Mileto o seu surgimento, por volta de 600 anos antes da era cristã. Conta a tradição que Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o suficiente para viver viajando e estudar. Atribui-se ao sábio grego o cálculo da altura de uma pirâmide egípcia por meio de sua sombra.

Cinco verdades elementares de Geometria são atribuídas a Tales:

- Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
- Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
- Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Muitos outros matemáticos gregos sucederam Tales nos próximos trezentos anos. Um deles, a tradição registra, é Pitágoras de Samos. Talvez tenha sido discípulo de Tales. Embora, documentos provem que, egípcios e mesopotâmicos, muitos séculos antes, já fizessem uso de triângulos retângulos, ao sábio grego é creditada a demonstração do teorema que leva o seu nome.

ATIVIDADE

- Como você procederia para calcular a altura de um edifício, de uma torre, de um poste ou de uma árvore? Discuta com seus colegas.
- Você acredita que os cinco resultados atribuídos a Tales são verdadeiros? É capaz de demonstrar algum deles? Experimente.
- Como você verifica se três números indicam lados de um triângulo retângulo?
- Enuncie o Teorema de Pitágoras.

Cerca de 300 anos antes da era cristã, em Alexandria, Euclides sistematizou o conhecimento geométrico do mundo considerado civilizado a época, na obra os Elementos. O caráter lógico e formal de Euclides, construído em cima de termos primitivos, axiomas, postulados, teoremas, hipóteses e teses, influenciou o desenvolvimento de outras ciências físicas. Usando como termos primitivos as noções de ponto, reta e de plano, Euclides definiu novos termos e construiu seu sistema formal alicerçado em cinco postulados, a saber:

- É possível traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
- É possível prolongar um segmento de reta indefinidamente para a construção de uma linha reta.
- É possível traçar um círculo a partir de um centro e um raio.
- Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- Se uma reta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se interceptarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois retos.

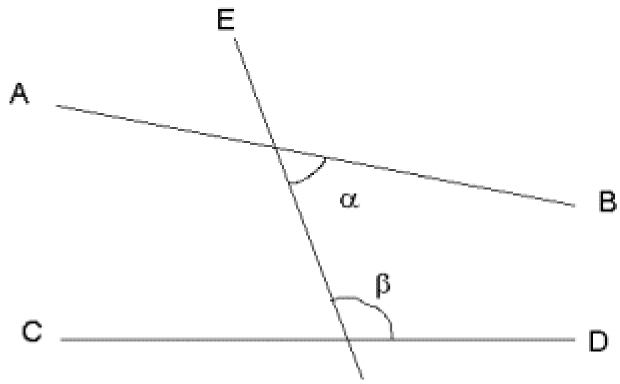


Figura 1

Além dos cinco postulados, o sábio grego acrescentou cinco outras verdades de caráter universal, os axiomas, com o intuito de sistematizar os conhecimentos geométricos da sua época. São eles:

- Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
- Adicionando-se quantias iguais a coisas iguais, as somas são iguais.
- Subtraindo-se quantias iguais de coisas iguais, as diferenças são iguais.
- Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.
- O todo é maior que cada uma das partes.

A simples leitura dos enunciados dos postulados e dos axiomas mostra que eles são tão evidentes que nenhum leitor deles duvida. Deles é feita toda a construção da teoria geométrica e todas as proposições são demonstradas. Assim, a proposição “A soma dos ângulos de um triângulo qualquer equivale a dois ângulos retos” é uma das muitas verdades que pode ser demonstrada a partir de postulados, axiomas e proposições anteriormente demonstradas.

Basta traçar uma paralela ao lado BC do triângulo em A. A figura 2 ajuda a mostrar $\alpha + \beta + \gamma =$ 180º em A e, aceitando como verdade o fato que os ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal são iguais, fica demonstrado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

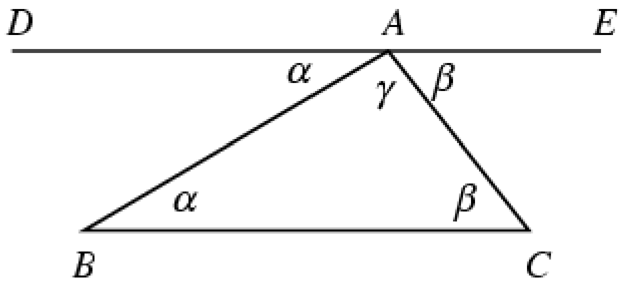


Figura 2

ATIVIDADE

- Numa folha de isopor recorte uma região triangular. Marque, a partir dos vértices, sobre os lados, uma medida constante (que tal 5 cm). Recorte as três regiões angulares obtidas. Verifique que juntando-as forma-se um semicírculo. Que lei da Geometria você acaba de verificar.
- Usando a proposição que o ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes de um triângulo como verdade, demonstre que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180º.

Por cerca de dois milênios a Geometria sistematizada por Euclides pouco progrediu. Inicialmente, a civilização grega foi submetida pelo Império Romano. Os romanos não tinham a preocupação dos gregos com a Matemática. Tinham por ela um interesse de caráter prático voltado para as conquistas militares e para a construção de palácios, monumentos e aquedutos. Com a queda do Império

Romano do Ocidente inicia-se o período histórico conhecido como Idade Média. Este período durou cerca de um milênio. Foi um período de muitas guerras, de pouco progresso nas ciências. Somente três séculos antes de seu término a Europa experimenta a criação das primeiras universidades. Ao findar o período, a Europa toma contato com as invenções da bússola, da pólvora e da imprensa. Surgem as grandes navegações e a descoberta das Américas por Cristóvão Colombo.

Apenas na Idade Moderna e na Contemporânea ocorreram progressos que permitiram o surgimento de novas geometrias. Fixemo-nos na França do século XVII. O início deste século, período em que a Europa vivia uma transição política e econômica, é premiado com novas idéias em Geometria. Desargues e Pascal abriam espaço para a geometria projetiva, enquanto Descartes e Fermat concebiam as idéias da geometria analítica. Posteriormente, ao término do século XVIII e início do XIX, trabalhando de modo independente, Gauss, Lobachevski, Bolyai e, um pouco mais tarde, Riemann estabeleceram novas geometrias consistentes, conhecidas por não-euclidianas.

Na geometria do russo Lobachevski é lícito que por um ponto fora de uma reta sejam conduzidas mais do que uma paralela; a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é inferior a dois ângulos retos. Já para a geometria de Riemann ficou estabelecido que por um ponto fora de uma reta é impossível conduzir paralelas e que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é superior a dois ângulos retos.

PESQUISA

- Qual foi a primeira universidade fundada na Europa durante a Idade Média? Em que ano isso ocorreu?
- Qual foi a principal razão do surgimento das grandes navegações ao término da Idade Média?
- Com o início da Idade Moderna, que países despontaram como potências colonizadoras das Américas, da África e da Ásia?
- Que fatos históricos determinam o fim da Idade Média e o início da Contemporânea?

As geometrias não-euclidianas existem quando, diferentemente de Euclides, sua construção deixa de acontecer no plano e passa a existir numa superfície curva.

A superfície de uma esfera é um exemplo de superfície curva. Cabe aqui uma distinção entre esfera e superfície esférica. Vejamos suas definições:

Esfera

Consideremos um ponto *O* e um segmento de medida *r.* Chama-se esfera de centro *O* e raio *r* ao conjunto dos pontos *P* do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a *r.*

A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

Superfície

Chama-se superfície da esfera de centro *O* e raio *r* ao conjunto dos pontos *P* do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja igual a *r.*

A superfície de uma esfera é também a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo.

Trazendo para o mundo físico, podemos dizer que uma melancia é a esfera enquanto que a sua casca representa a superfície.

Uma esfera tem como elementos: pólos, equador, paralelos e meridianos. O nosso planeta tem formato esférico. Possui pólos (Norte e Sul), linha do Equador, paralelos e meridianos. Os elementos que visualizamos no globo terrestre podem ser transferidos para qualquer esfera.

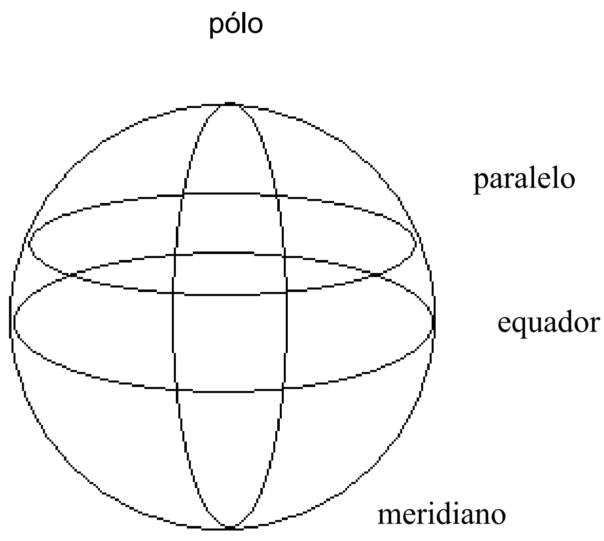
Considerando a superfície de uma esfera de eixo *e* temos:

Pólos: são as intersecções da superfície com o eixo.

Equador: é a secção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

Paralelo: é uma secção (circunferência) perpendicular ao eixo. É “paralela” ao equador.

Meridiano: é uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.



pólo

Figura 3

Tomemos uma esfera e marquemos na sua superfície dois pontos distintos A e B. Para ligar esses pontos, sobre sua superfície, necessitamos de uma linha (pode ser uma fita ou um elástico). Tomando depois um ponto C na superfície, não pertencente à linha traçada, ligando-o com os pontos A e B, enxergamos na superfície esférica uma figura fechada com formato de triângulo. Usando um transferidor podemos medir os ângulos internos da figura. Verificaremos, experimentalmente, que a soma dos ângulos é superior a 180º.

À medida que aproximamos os vértices do triângulo, construído na superfície esférica, a soma dos ângulos aproxima-se de 180º. É que aproximando os vértices, a área da figura diminui e a calota da esfera difere pouco de uma superfície plana

À medida que afastamos os vértices do triângulo, construído sobre a esfera, a soma dos ângulos aumenta,afastando-se de 180º.

Podemos especular a construção de alguns triângulos interessantes. Com três pedaços de elástico iguais podemos construir um triângulo eqüilátero, com ângulos internos retos. A soma dos ângulos internos perfaz 270º. Temos um triângulo tri retângulo eqüilátero. Este triângulo ocupa um oitavo da superfície da esfera.

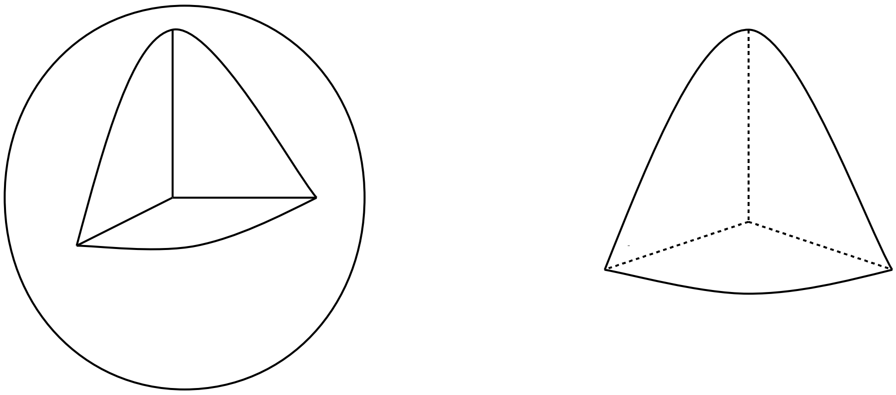


Figura 4

Construindo um triângulo com os três vértices no equador da esfera teremos ângulos internos rasos. Temos, assim, um triângulo cuja soma dos ângulos internos equivale a 540º.

Quando consideramos o triângulo construído na prolongação do hemisfério, temos ângulos superiores a 180º. Na verdade se as linhas demarcatórias são iguais e bem pequenas, temos que os ângulos do triângulo medem 300º. Assim, atingimos o valor máximo para a soma dos ângulos internos de um triângulo construído sobre uma superfície esférica, 900º. Assim, podemos afirmar que sobre uma superfície esférica podemos construir triângulos cuja soma dos ângulos internos está compreendida entre 180º e 900º.

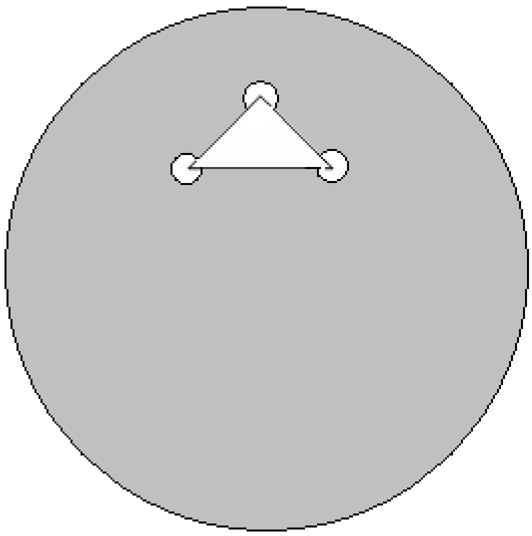


Figura 5

Quando, numa superfície curva, a soma dos ângulos de um triângulo é superior a 180º, dizemos que a curvatura é positiva. Se a soma for inferior a 180º, dizemos que curvatura é negativa. Tamboretes e selas de cavalos são exemplos de superfícies de curvatura negativa.

ATIVIDADE

- Revista uma bola de basquete ou futebol com uma folha de papel apropriada para embalagens. Qual a sua constatação?
- Aproveite para revestir uma sela de cavalo. Qual a constatação?
- Sobre a sela de cavalo construa um triângulo e verifique a soma dos seus ângulos internos.
- Revestindo um cilindro, qual a sua observação?
- Construa um triângulo sobre uma superfície cilíndrica. Meça os seus ângulos internos. O que você pode concluir?

Ao revestir uma superfície com uma folha notamos que as de curvatura positiva fazem pregas na embalagem e as de curvatura negativa rasgam. Quando a embalagem pode ser feita sem problemas, temos uma superfície de curvatura nula ou euclidiana.

Insistindo pela última vez. Em superfícies planas a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º. Nas de curvatura negativa, inferior a 180º. Nas de curvatura positiva, as medidas estão compreendidas entre 180º e 900º.

Referências Bibliográficas

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

LONGEN, A. **Matemática:** Ensino Médio. 1. ed. Curitiba: Positivo, 2004.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade.** 3. ed. São Paulo: Cortez, 1994.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica.** Curitiba, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Matemática:** Ensino Médio. Curitiba, 2006.

PETIT, J. P. **As aventuras de Anselmo Curioso:** Os mistérios da Geometria. Lisboa: Dom Quixote, 1982.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1997.