Versão Online ISBN 978-85-8015-038-4
Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Produção Didático-Pedagógica

2007

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

PROCESSO DE PRODUÇÃO DO OAC

IDENTIFICAÇÃO

Autora: Ivanise Zem de Morais

Estabelecimento: Colégio Estadual Costa Viana

Ensino: Fundamental

Disciplina: Matemática

Conteúdo Estruturante: Números e Álgebra

Conteúdo Específico: Potenciação

1- RECURSO DE EXPRESSÃO

Problematização do Conteúdo

Chamada: “Diversificar e conduzir de modo diferente a aprendizagem da Potenciação, buscando a compreensão necessária.”

Título: As cores e as formas no ensino de Potenciação

Texto: No ensino de Matemática, os recursos visuais e manipulativos facilitam a compreensão.

O conteúdo Potenciação, ensinado a partir da 5ª série e utilizado durante os anos escolares seguintes, parece fácil de ser compreendido. Mas, se isso não acontece, será um obstáculo para o aluno, que apresentará muitas dificuldades, desde a mais simples, como elevar um número ao quadrado, bem como compreender a utilização da potência na representação de números grandes, como por exemplo, nas áreas de Biologia, Física, Geografia e da própria Matemática.

Nessa direção, Fiorentini e Miorim afirmam que, mesmo um aluno que sempre é aprovado apresenta dificuldades em utilizar o conhecimento obtido, em resumo, não consegue fazer o uso efetivo desse saber. (FIORENTINI E MIORIM, 1990)

O ensino da Potência, neste OAC, será enriquecido com o recurso da Escala Cuisenaire, além de outros elementos diferenciados que venham contribuir com a aprendizagem.

Segundo Kishimoto, o uso de materiais manipuláveis, que subsidiam a ação docente, têm levado muitos professores a se utilizarem desses recursos, entre eles, as Réguas de Cuisenaire. (KISHIMOTO, 2005, p. 83)

A Escala Cuisenaire é constituída por dez réguas (prismas de base quadrada) de 1 cm^2 de seção, com um comprimento que vai de 1 a 10 cm. Cada régua está associada a uma cor diferente e simboliza um número.

Utilizando este material, pode-se visualizar o quadrado de um número até dez, ou até mesmo maiores, o cubo de alguns números e o quadrado da soma.

As cores de cada uma das réguas funcionam como um elemento chamativo na aprendizagem, como na construção das potências, fazendo com que, quando da necessidade de sua utilização prática, o aluno recorde os conceitos aprendidos através da manipulação.

Busca-se, dessa maneira, não permitir que o aluno, ao calcular uma potência, caia no erro de multiplicar a base pelo expoente.

Por que utilizar este recurso? Para dar significado ao que o aluno está aprendendo, fazer ele pensar, compreender, deixando mais prazerosa a aprendizagem.

Referências:

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática. Boletim SBEM – SP, Ano 4, n° 7 (1990). Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos_didaticos.asp?aux=C>, acesso em 04/07/07.

KISHIMOTO, T. M. (org.). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. São Paulo, Cortez, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica. Curitiba, 2006.

2 – RECURSOS DE INVESTIGAÇÃO

2.1 Investigação disciplinar

Título: A Potenciação e a Escala Cuisenaire (método das cores)

Texto: Segundo *Georges Cuisenaire Hottelet*, educador belga, criador do Método Cuisenaire, as cores neste material tem o papel de despertar o parentesco com as relações de quantidades, acelerar o conhecimento do número, facilitar a fixação e propiciar liberdade ao aprendiz. (MÁRQUEZ, 1964, p. 81)

Os prismas retangulares com suas cores e respectivos valores, que fazem parte da Escala, são compostos da seguinte maneira: madeira natural (1), vermelho (2), verde-claro (3), lilás (4), amarelo (5), verde-escuro (6), preto (7), marrom (8), azul (9) e laranja (10).

Essas cores estão associadas em famílias: a madeira (1) e a preta (7) representam uma classe singular; a vermelha (2), lilás (4) e a marrom (8) pertencem à família de cores "vermelha"; a amarela (5) e a laranja (10) pertencem à família de cores "amarela"; a verde-clara (3), a verde-escura (6) e a azul (9) pertencem à família de cores "verde". Observe que, em cada família de cores, podemos estabelecer algumas relações elementares do sistema de numeração.

A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais. Se colocarmos duas réguas vermelhas lado a lado, formamos um quadrado. Obtemos, então, um quadrado de lado 2. Este quadrado é constituído de 4 unidades: 2 vezes 2 réguas vermelhas.

Do mesmo modo formaremos um quadrado com três réguas verde-claras. Ele é constituído por 9 unidades: 3 vezes 3 réguas verde-claras.

Igualmente para quatro réguas lilases, cinco réguas amarelas, seis réguas verde-escuras, e assim por diante.

O quadrado de 2 é o produto 2 x 2 e escrevemos 2^2.

O quadrado de 3 é o produto 3 x 3 e escrevemos 3^2.

O quadrado de 4 é o produto 4 x 4 e escrevemos 4^2.

A régua que representa o lado do quadrado é a *base.* As dimensões da figura formada representa o *expoente.* O número de unidades contidas no quadrado é a *potência*.

Como parte desta investigação sugerir aos alunos outras formações, permitindo a eles, tirarem suas próprias conclusões.

Um conteúdo que geralmente é ensinado na 7ª série, pode ser introduzido utilizando-se para isso números naturais e as réguas coloridas: o quadrado da soma.

Uma situação é a seguinte: $(3 + 5)^2$.

Formamos por meio de 8 réguas verde-claras e 8 réguas amarelas, um quadrado.

Observando a formação temos um quadrado formado por réguas amarelas: $5 \times 5 = 5^2$ e um outro quadrado formado por réguas verde-claras $3 \times 3 = 3^2$, restando dois retângulos. Um deles é composto por 3 réguas amarelas (3 x 5) e o outro por 5 réguas verde-claras (5 x 3).

Portanto, o quadrado total $(3 + 5)^2$ é igual a $5^2 + 3^2 + 2x\ (5 \times 3)$.

Geralmente, é ensinado que o quadrado da soma é igual ao quadrado do primeiro número, mais duas vezes o produto do primeiro número pelo segundo, mais o quadrado do segundo número. É só comparar e comprovar.

O quadrado da diferença pode ser trabalhado com a sobreposição das peças, para visualização.

Propor aos alunos formarem cubos com réguas de mesma cor. Por exemplo: só com réguas vermelhas, só com réguas verde-claras, só com réguas lilases, etc.

Teremos, então:

Cubo de 2: produto 2 x 2 x 2 = 8 unidades. Escrevemos: $2^3 = 8$.

Cubo de 3: produto 3 x 3 x 3 = 27 unidades. Escrevemos: $3^3 = 27$.

Cubo de 4: produto 4 x 4 x 4 = 64 unidades. Escrevemos: $4^3 = 64$.

Que outras formações utilizando a Escala podemos obter? Sugira aos alunos, para que eles experimentem e obtenham mais resultados.

Referências:

MÁRQUEZ, Á. D. Didática das Matemáticas Elementares. Rio de Janeiro, Letras e Arte, 1964.

2.2 Perspectiva interdisciplinar

Título: O ensino da Potenciação e sua relação com outras disciplinas

Texto: O conteúdo em questão tem a possibilidade de ser abordado no Ensino Fundamental pela disciplina de Ciências, quando é utilizada a Notação Científica (onde representam-se números grandes ou pequenos), no ensino da Astronomia, de doenças causadas por vírus e bactérias, em que muitas vezes pode-se indicar o tamanho. Posteriormente, aplicações na Física e Química.

Em Artes, por se tratar de um conteúdo ensinado com o auxílio da Escala Cuisenaire, pode-se explorar tanto formatos bidimensionais (figuras planas) como tridimensionais (prismas retangulares). Além disso, a percepção das cores, tons e matizes: cores primárias, secundárias e terciárias; cores quentes e cores frias; harmonia das cores, e até mesmo fatos curiosos, como significado de cada cor para as pessoas.

A história “O jogo de xadrez”, encontrada na íntegra no livro “Contando a História da Matemática”, de Oscar Guelli (Editora Ática, 1992), pode ser utilizada em Língua Portuguesa. Como sugestão, após a leitura, criar uma história em quadrinhos.

Outra idéia é a de produção de histórias em quadrinhos, utilizando os personagens representados por réguas da Escala Cuisenaire, simulando a explicação do conteúdo Potências.

Referências:

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes curriculares de artes para a educação básica. Curitiba, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes curriculares de ciências para a educação básica. Curitiba, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes curriculares de língua portuguesa para a educação básica. Curitiba, 2006.

2.3 Contextualização

Título: A potência e o juro composto. O que eles têm em comum?

Texto: Vamos supor que eu faça um empréstimo de R$ 100,00 a um juro de 6% ao mês. Quanto terei que pagar ao final de 10 meses?

No 1º mês a sua dívida aumenta devido ao juro. Quanto?

6% de R$ 100,00 = $\frac{6}{100}$ x R$ 100,00 = 0,06 x R$ 100,00 = R$ 6,00

Você estará devendo R$ 100,00 + R$ 6,00 = R$ 106,00.

No 2º mês a sua dívida será maior ainda. E aí, você soma mais R$ 6,00?

Vejamos! O juro do 2º mês incide sobre aquele cobrado no 1º mês, e assim sucessivamente, portanto:

6% de R$ 106,00 = $\frac{6}{100}$ x 106,00 = 0,06 x R$ 106,00 = R$ 6,36

No 2º mês você deverá ter R$ 106,00 + R$ 6,36 = R$ 112,36 de dívida.

Ou seja, basta você multiplicar o valor do empréstimo por 1,06, a cada mês.

No 1º mês: R$ 100,00 x 1,06.

No 2º mês: R$ 100,00 x 1,06 x 1,06

No 3º mês: R$ 100,00 x 1,06 x 1,06 x 1,06

A conclusão que se chega é que no 10º mês a dívida final é obtida assim:

R$ 100,00 x $(1,06)^{10}$ = R$ 179,08

O valor a ser devolvido quase dobrou! Portanto, é importante ficar atento ao tipo de juro cobrado, quando se faz um empréstimo ou qualquer tipo de compra a prazo.

Observe que o valor do juro, composto neste caso, será calculado como potência, de acordo com o período do empréstimo.

Referência:

GENTIL, N.; GRECO, S. E.; SANTOS, C. A. M. Matemática – Série: Novo Ensino Médio. São Paulo, Ática, 2003.

3 – RECURSOS DIDÁTICOS

3.1 Sítios

3.1.1 Título do sítio: Portal dia-a-dia Educação: Matemática

Disponível em: <http://matematica.seed.pr.gov.br/>, acessado em 25/10/2007.

Comentários: Neste sítio há um **Catálogo,** todos muito interessantes. Dentre eles destaco o <http://www.zmais.com/> e <http://www.somatematica.com.br/index2.php>, que apresentam o conteúdo Potenciação com números inteiros, cálculo com Browser e curiosidades.

3.1.2 Título do sítio: Laboratório de Matemática - UNESP

Disponível em: < http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/labmat.htm>, acessado em 25/10/2007

Comentários: Possui sugestões de jogos para o Ensino Fundamental e Médio. Dentre elas, algumas podem ser adaptadas para a Potenciação. É o caso da Gincana de Matemática.

3.1.3 Título do sítio: Mathematika

Disponível em: <www.mathematika.pop.com.br/index.html-3k>, acessado em 29/10/2007

Comentários: Este sítio contém um artigo sobre Potenciação intitulado: *Uma análise algébrica e geométrica para o Ensino Fundamental*. O significado da palavra Potenciação é apresentado com vários exemplos, e o ensino através da concreticidade.

3.2 Sons e vídeos

Vídeo

Título: A Corrente do Bem
Direção: Mimi Leder
Produtora: Warner Bros. Pictures
Duração: 2:03
Ano: 2000

Sinopse: Apenas imagine: você faz um favor que realmente ajuda alguém e diz para ele ou ela não pagar de volta, mas passar adiante para três pessoas que, em troca, devem pagar para mais três – e sem parar em uma abundância global de generosidade e decência. Impossível? O estudante ginasial Trevor McKinney não aceita isso.

Haley Joel Osment interpreta Trevor, que inicia uma reação em cadeia de bondade para o seu projeto de Estudos Sociais, nessa doce e grandiosa história dirigida por Mimi Leder, baseada na obra de Catherine Ryan Hyde, e também estrelando os vencedores do Oscar Kevin Spacey e Helen Hunt. Quanto impacto pode ter uma idéia sincera? Faça um favor a você mesmo e descubra.

Comentário: Um professor solicita aos alunos uma idéia para mudar o mundo. Seu aluno, Trevor, cria o "passe para frente", ajudando três pessoas. Essas três pessoas fazem o mesmo para mais três, e assim, a corrente se expande. Traz a idéia de Potenciação.

3.3 Proposta de atividades

3.3.1 Título: "Corrente em favor do Meio Ambiente"

Texto:

Objetivo - Arrecadar o maior número possível de garrafas Pet dentro do ambiente escolar, envolvendo: alunos, direção, equipe pedagógica, professores e funcionários, demonstrando a funcionalidade da corrente (noção de potência).

Como proceder - O professor faz o sorteio de um aluno na turma (se houver mais de uma turma, faz o sorteio da turma primeiro) que será responsável em iniciar a Corrente. Este aluno solicita a duas outras pessoas através de uma mensagem escrita uma garrafa Pet, guardando-a. Cada uma dessas pessoas solicita à outras duas, as mesmas duas garrafas Pet.

É muito importante explicar o objetivo do trabalho para todos os segmentos dentro da escola, e que a participação só ocorre uma vez, ou seja, uma pessoa não poderá fornecer mais de duas garrafas Pet.

Ao final do processo, contam-se as garrafas, faz-se um esquema do processo, visualiza-se a utilização de uma potência de base 2.

Destino das garrafas - Reciclagem.

Referência:

BIGODE, A. J. L. Matemática hoje é feita assim. São Paulo, FTD, 2006.

3.3.2 Título: "Arroz multiplicado, da Ásia"

Texto: Esta atividade encontra-se no livro "Jogos e Atividades Matemáticas do Mundo Inteiro", de Claudia Zaslavsky (página 84).

Trata-se de uma lenda contada na China e outros países da Ásia: um ancião sábio, após ser questionado pelo rei sobre como este poderia mostrar gratidão por ter-lhe prestado um favor, solicitou um grão de arroz no primeiro dia, dois grãos de arroz no segundo dia, quatro grãos de arroz no terceiro dia, e assim sucessivamente, até o trigésimo dia.

O rei ficou surpreso com tamanha simplicidade no pedido. Não imaginava ele, que não poderia cumprir o pedido do velho ancião.

Esta atividade pode ser desenvolvida pelos alunos, fazendo com que eles percebam a quantidade de grãos no trigésimo dia.

Algumas questões para responder:

Quantos grãos o sábio receberia no décimo dia? E no vigésimo?

Seria possível produzir esta quantidade de arroz?

Referência:

ZASLAVSKY, C. Jogos e Atividades Matemáticas do Mundo Inteiro. Porto Alegre, Artmed, 2000.

3.3.3 Título: Exposição para aprender Potenciação

Texto: Propor a construção dos prismas da Escala Cuisenaire. Em grupo, solicitar que construam quadrados e cubos de diversos números. Fazer uma exposição das construções.

Referências:

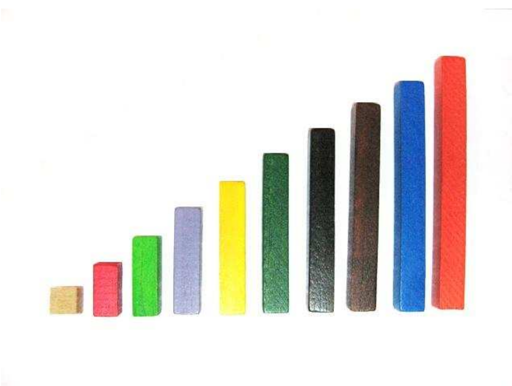
MÁRQUEZ, Á. D. Didática das Matemáticas Elementares. Rio de Janeiro, Letras e Arte, 1964.

3.4 Imagens

3.4.1 Imagem: Caixa Cuisenaire

Comentário: Jogo completo de réguas que integram uma “Caixa Cuisenaire”.

3.4.2 Imagem: Escala Cuisenaire

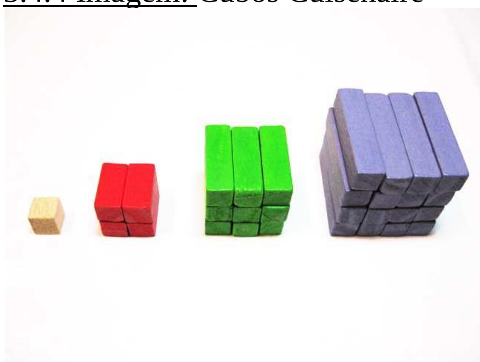


Comentário: Material constituído por réguas de 1 cm² de seção e de um comprimento que vai de 1 a 10 cm. Cada comprimento está associado a uma cor e simboliza um número.

3.4.3 Imagem: Quadrados Cuisenaire

Comentário: Quadrados de números de 1 a 10, utilizando a Escala Cuisenaire.

3.4.4 Imagem: Cubos Cuisenaire



Comentário: Cubos de alguns números, utilizando a Escala Cuisenaire.

4 – RECURSOS DE INFORMAÇÃO

4.1 Sugestão de leitura

4.1.1 Livro:

Título do Livro: Contando a história da matemática: história de potências e raízes

Referência:

GUELLI, O. Contando a História da Matemática: história de potências e raízes. São Paulo, Ática, 1992.

Comentários: É um livro acessível às crianças, a partir da 5ª série. O assunto é potenciação: traz a "História do Xadrez", curiosidades, notação científica, uso de potência na astronomia, expoente zero, potências negativas e outras histórias.

4.1.2 Livro:

Título do Livro: Descobrindo a Geometria Fractal

Referência:

BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal – Para a sala de aula. Belo Horizonte, Autêntica, 2005.

Comentários: Os Fractais, como recurso visual da arte, estabelece uma conexão com o ensino de Matemática. A criação, exploração e manipulação de fractais com material concreto, onde o conteúdo Potenciação é visualizado em vários fractais, como o Triminó.

4.1.3 Internet:

Título: Laboratório Virtual de Matemática

Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/>, acesso em 15/10/2007.

Comentários: Apresenta diversos projetos com o uso de Informática no ensino da Matemática na Educação básica. O conteúdo Potenciação é apresentado em várias séries do Ensino Fundamental, de modo diversificado e interessante.

4.2 Notícias

Revista on-line

Título da Notícia: Nos confins do tempo

Referência: Nos confins do tempo. Disponível em: <http://super.abril.com.br/super2/superarquivo/1988/conteudo_111373.shtml>, acesso em 01/10/2007.

Texto: Através dos números, os cientistas conseguem estabelecer quando se formou o Universo e, ainda, imaginar quando e como tudo acabará. O texto completo está disponível em:< http://super.abril.com.br/super2/superarquivo/1988/conteudo_111373.shtml>

Comentários: As potências de base 10 são utilizadas pela Física para retratar a escada do tempo, do nascimento ao provável fim do Universo. São citadas algumas unidades de tempo, ora grandes, ora pequenas, assinalando as etapas da viagem aos confins do tempo. Possui vários exemplos, tornando a leitura surpreendente.

4.3 Destaques

Título: Curiosidade Matemática - Método de Pitágoras para Calcular a Potência de Grau 2 de um Número.

Texto: A potenciação nos fornece um meio simples, prático e rápido para calcularmos a potência de grau 2 de um número inteiro, comumente conhecida como o quadrado desse número.

Como todos sabem, o meio em questão, corresponde ao produto (multiplicação) do número por ele mesmo, ou seja:

$5^2 = 5 \times 5 = 25$

Mas, Pitágoras, filósofo e matemático grego, século VI antes de Cristo, inventou uma regra diferente (e um pouco mais complicada, convenhamos) para obter o resultado da potência de grau 2 de um número, que consiste em:

O quadrado de um número inteiro **n** é igual a soma dos **n** primeiros números inteiros ímpares.

Para números pequenos vemos, facilmente, que a afirmação é verdadeira, através do uso direto do enunciado. Vejam:

- $1^2 = 1$ (n = 1)
- $2^2 = 1 + 3 = 2 \times 2 = 4$ (n = 2)
- $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \times 5 = 25$ (n = 5)
- $7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7 \times 7 = 49$ (n = 7)

E como saber que a afirmação é válida para o número 5.227? No "braço" é extremamente trabalhoso comprovar, pois teríamos que somar os primeiros 5.227 números inteiros ímpares e, após, verificar que o resultado é igual ao quadrado de 5.227.

No entanto, se observarmos com um pouquinho mais de atenção, veremos que a seqüência formada pelos primeiros **n** números ímpares: (1, 3, 5, 7, …., a_n), é uma Progressão Aritmética (PA) de razão r = 2, onde a_n representa o enésimo termo ou o enésimo número ímpar.

Desse fato é suficiente, agora, utilizarmos das propriedades de uma PA. Mais especificamente das fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma PA finita, para demonstrarmos que Pitágoras está com toda a razão.

Primeiro vamos determinar o valor de a_n em função de **n**:

$a_n = a_1 + (n - 1).r = 1 + (n - 1).2 = 2n - 1$

Para concluirmos, mostrando que a soma S_n é igual a n^2:

$S_n = [(a_1 + a_n).n]/2 = [(1 + 2n - 1)]n/2 = 2n^2/2 = n^2$

Pronto! Não é que o homem tinha razão?

Referência:

HORTA, N. G. Curiosidade Matemática – Método de Pitágoras para Calcular a Potência de Grau 2 de um Número. Disponível em: <http://www.nghorta.com/2006/11/19/curiosidade-matematica-5-metodo-de-pitagoras-para-calcular-a-potencia-de-lgrau-2-de-um-numero/>, acesso em 09/10/2007.

Comentário: A curiosidade é muito interessante! O conteúdo envolvido é ensinado no Ensino Médio (PA), mas enriquece as aulas pela demonstração. Para alunos do Ensino Fundamental, pode ser feita uma amostra através de números, como no início do texto.

4.4 Paraná

Título: A População do Paraná

Texto: O Estado do Paraná ficou conhecido como a "Terra de todas as gentes". A sua população é constituída por descendentes de diversas etnias, como poloneses, italianos, alemães, ucranianos, espanhóis e japoneses, que juntos com os negros, portugueses e índios, contribuíram com a formação da cultura paranaense.

A última contagem da população realizada pelo IBGE, em 2007, aponta como os dez municípios mais populosos do Estado, os que se encontram na tabela 1. Nela, são apresentados os números de habitantes desses municípios (por contagem e estimativa) e a população total do Estado. Através desses números, serão apresentadas as aproximações às dezenas de milhar e a respectiva potência de base 10.

Tabela 1 - O Paraná e os dez municípios mais populosos			
Municípios	**População (hab)**	**População aproximada à dezena de milhar mais próxima**	**População aproximada em potência de base 10**
1º) Curitiba*	1.797.408	1.800.000	$1,8 \times 10^6$
2º) Londrina*	497.833	500.000	5×10^5
3º) Maringá*	325.968	330.000	$3,3 \times 10^5$
4º) Foz do Iguaçu*	311.336	310.000	$3,1 \times 10^5$
5º) Ponta Grossa*	306.351	310.000	$3,1 \times 10^5$
6º) Cascavel*	285.784	290.000	$2,9 \times 10^5$
7º) São José dos Pinhais*	263.622	260.000	$2,6 \times 10^5$
8º) Colombo*	233.916	230.000	$2,3 \times 10^5$
9º) Guarapuava	164.534	160.000	$1,6 \times 10^5$
10º) Paranaguá	133.756	130.000	$1,3 \times 10^5$
Estado do Paraná**	10.279.545	10.280.000	$1,028 \times 10^7$

Fonte: IBGE, Contagem da População 2007 e Estimativas da População 2007.
*População estimada.
**O resultado inclui dados dos municípios abrangidos pela Contagem da População e pela Estimativa da População.

O preenchimento da tabela pode ser feito pelos alunos, através de uma pesquisa. Aproveitando a sugestão, apresentar o mapa do Estado do Paraná e localizar os dez municípios citados.

Na tabela 2, são apresentadas algumas cidades do Estado do Paraná e o número de habitantes (urbano), resultado do Censo Demográfico realizado pelo IBGE nos anos de 1970, 1980 e 1991.

Tabela 2 - Taxas Anuais de crescimento das cidades Médias de 70 não Metropolitanas – 1970/91				
Cidade	**Pop. Urb. 1970**	**Pop. Urb. 1980**	**Pop. Urb. 1991**	**Taxa anual de crescimento**
Maringá	100.100	160.689	234.079	4,13
Londrina	163.528	266.940	366.676	3,92
Ponta Grossa	113.074	172.946	221.671	3,26
Paranaguá	52.044	72.066	94.689	2,89

Fonte: O Recente Desempenho das Cidades Médias no Crescimento Populacional Urbano Brasileiro. Disponível em: <http://www.nemesis.org.br/artigos/a0004.pdf.>

Para cada cidade foi apresentada a taxa de crescimento anual. O que isso significa?

A população dessas cidades, ano após ano cresce, de acordo com a taxa de crescimento, sendo que ela é incorporada à população a cada ano.

Para isso, faz-se um comparativo com o juro composto. Num período de 10 anos, tem-se como população estimada, o acúmulo de taxa sobre taxa de crescimento. Por menor que seja a taxa de crescimento anual de uma cidade, isso implicará que ao longo de um período de tempo (10, 20 ou 30 anos), a população pode vir a dobrar.

Baseando-se nessa explicação, e considerando-se a fórmula para cálculo de juros compostos, fica mais prático o entendimento:

$\mathbf{M_t = C.(1+ i)^t}$, onde M = população estimada após um período (t); C = população inicial; i = taxa de crescimento anual da cidade e t = período (em anos).

Fazendo a substituição dos dados na expressão acima, confirma-se a explicação.

Referências:

ANDRADE, T. A.; SERRA, R. V. O Recente Desempenho das Cidades Médias no Crescimento Populacional Urbano Brasileiro. Rio de Janeiro, 1997. Disponível em: <http://www.nemesis.org.br/artigos/a0004.pdf.>, acesso em 13/11/2007.

IBGE. Contagem da População 2007 e Estimativa da População 2007: Paraná. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/contagem2007/PR.pdf>, acesso em 22/10/2007.

PARANÁ. Disponível em: <http://www.brazilsite.com.br/brasil/estados/parana/htm>, acesso em 22/10/2007.