Versão Online ISBN 978-85-8015-040-7
Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2008

Produção Didático-Pedagógica

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
SUPERINTENDÊNCIA DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL – PDE

CLAUDETE APARECIDA ALMEIDA DE GASPARI

O ENSINO DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Material Didático (caderno pedagógico) para Intervenção Pedagógica na Escola, apresentado à Secretaria Estadual de Educação do Estado do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Professor PDE, sob a responsabilidade da Universidade Estadual de Maringá -UEM, tendo como orientador, o Professor Dr. João Roberto Gerônimo.

MARINGÁ/PR
DEZEMBRO/2008

Sumário

Apresentação

Esta produção é resultado do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, desenvolvido como capacitação continuada aos professores da rede pública de ensino fundamental e médio do Estado do Paraná. Refere-se ao material didático que aqui recebe o nome de caderno pedagógico. Esse material foi elaborado no segundo semestre de 2008 e desenvolvido em parceria com a Universidade Estadual de Maringá – UEM, na área de matemática, sob a orientação do Professor Dr. João Roberto Gerônimo, e tem como objeto de estudo o tema: O Ensino de Trigonometria, através de atividades e o uso de materiais didáticos manipuláveis.

O objetivo desta produção é oferecer subsídios teóricos-metodológicos e práticos para o projeto de intervenção pedagógica que será implementado no primeiro semestre de 2009, com alunos do colégio Estadual João Theotônio Netto, em Moreira Sales, núcleo de Goioerê.

A escolha do tema surgiu da necessidade de tornar as aulas mais atrativas, promovendo interatividade entre alunos e materiais didáticos, permitindo manipulação, observação e abstrações. Segundo Arroyo, não estamos em tempos de dar receitas fáceis ou remédios, mas de aguçar o pensamento, de ir à procura, de entender significados ocultos. A produção desse material é um dos meios que pode nos auxiliar nessa grande procura.

Não é uma receita pronta, mas serve como apoio. As atividades aqui desenvolvidas têm o intuito de promover a articulação entre os conteúdos e melhor entendimento dos conceitos trabalhados, auxiliando os alunos na construção dos seus conhecimentos.

Introdução

Observamos através da história que a trigonometria sempre foi muito útil, principalmente para a astronomia e navegação. São inúmeras as aplicações das relações referentes à trigonometria em triângulos retângulos ou não que podemos constatar: determinação de distâncias de lugares inacessíveis, alturas, etc.

A palavra trigonometria significa medida dos três ângulos de um triângulo e estuda a relação entre as medidas dos lados de um triângulo. Tales de Mileto foi um grande estudioso desse ramo, foi ele quem deduziu por semelhança de triângulos que a altura da pirâmide é igual sombra mais a metade da base. Era principalmente através de triângulos semelhantes que as antigas civilizações faziam seus cálculos de grandes distâncias.

Diz a história que em uma de suas viagens ao Egito Tales de Mileto foi convocado pelos matemáticos egípcios, a pedido do rei, para que calculasse a altura de uma das pirâmides, já que ele era conhecido e afamado pela sua incrível façanha: podia calcular a altura de uma construção sem precisar subir nela. Tales ouviu e se dispôs a atendê-los imediatamente. Já próximo à pirâmide, o sábio Tales fincou uma vara no chão, observando a sua sombra, marcou na areia o tamanho de seu comprimento e voltou a vara na posição vertical. Pediu que aguardassem um pouco para terem a resposta.

Ficaram todos ali, observando a sombra projetada pela vara. No momento em que a sombra ficou exatamente do tamanho da vara, Tales afirmou: Vão até a

pirâmide, meçam sua sombra e acrescentem ao resultado a medida da metade do lado da base. Essa é a altura da pirâmide.
Qual o segredo?
Tales usou seus conhecimentos sobre semelhança de triângulos.

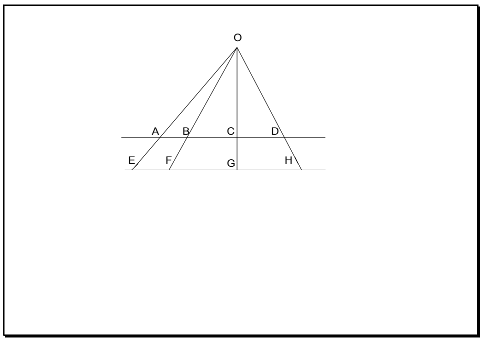
Os triângulos retos foram assunto dos estudos de Pitágoras, importante matemático grego, que descobriu propriedades válidas para todos esses triângulos, o famoso Teorema de Pitágoras.
Entre os anos de 180 e 125 a.C. viveu Hiparco de Nicéia, famoso matemático grego. Foi ele que dividiu a circunferência em 360º (múltiplo de 60, tido como melhor base para fazer contagens), construiu a primeira tabela com os valores de cordas de uma série de ângulos de 0º a 180º. Recebeu o título de Pai da Trigonometria. Mais tarde foi escrita a mais importante obra trigonométrica da antiguidade, por Ptolomeu de Alexandria. Sua obra ficou conhecida como Almajesto, que significa “o maior”. Nesta obra a tabela trigonométrica é mais completa e a medida das cordas é para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0º e 180º.
Por volta do século VIII os matemáticos e astrônomos observaram que os matemáticos hindus apresentavam uma trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo, que chamavam de Jiva, buscando no interior do círculo um triângulo retângulo. Houve um período em que os matemáticos oscilavam entre o Almajesto e a trigonometria de Jiva.
Entre os anos de 850 e 929 o matemático árabe Al-Battani adotou a trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação: o círculo de raio unitário, que permanece até hoje com suas razões: seno, cosseno e tangente.
Hoje a trigonometria desempenha papel muito importante na resolução de diversos problemas.

O Teorema de Tales, Proporcionalidade e Semelhança

Atividade 1: Medindo Comprimentos

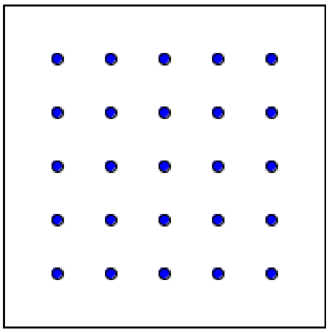
Medir com a régua os comprimentos dos segmentos abaixo. Em seguida calcular e comparar as razões: $\frac{AO}{AE}$, $\frac{OB}{BF}$, $\frac{OC}{CG}$, $\frac{OD}{DH}$.

- o que podemos observar?
- as medidas são iguais?
- as razões são iguais?
- se a figura fosse maior, como seriam os resultados encontrados? Faça um desenho parecido e verifique.



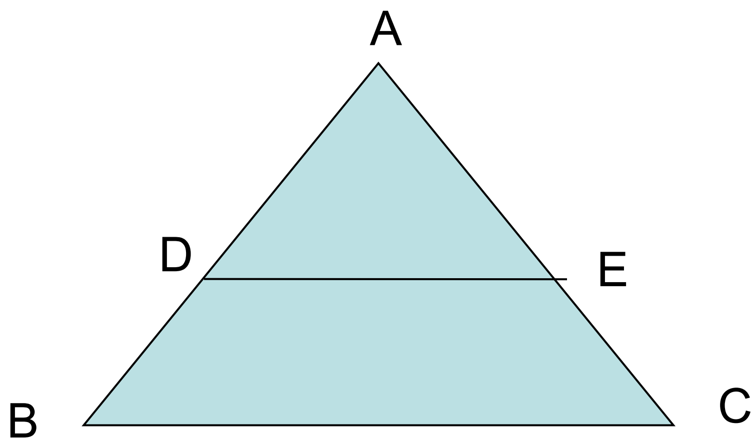
Atividade 2: Geoplano Quadriculado com Barbante

- Montar utilizando barbante ou elástico colorido um feixe de paralelas cortadas por dois segmentos transversais e em seguida, medir os comprimentos dos segmentos e analisar, como na atividade anterior. Pode-se fazer de várias formas e tamanhos.



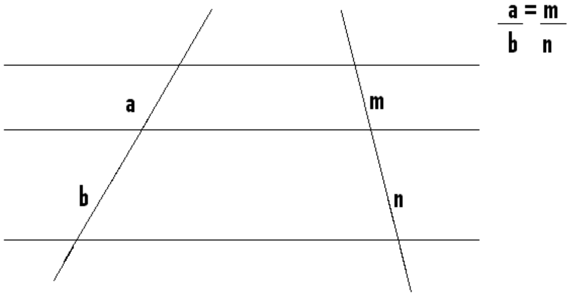
Teorema Fundamental da Proporcionalidade:

Considere um triângulo qualquer ABC. Unindo os pontos D e E, de modo que DE// BC, teremos: AD/DB = AE/EC.

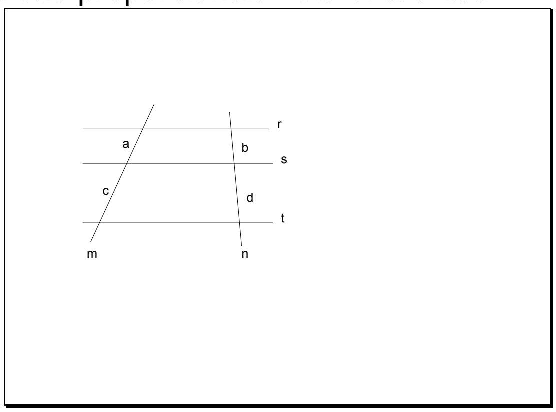


Teorema de Tales:

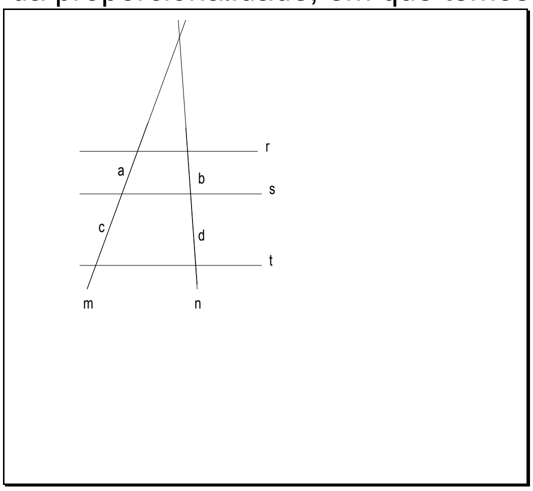
Tales, famoso matemático grego, nascido em Mileto, viveu por volta de 600 a.C.. A ele são atribuídas várias descobertas geométricas, dentre as quais, a mais importante leva seu nome e diz o seguinte: "Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais."



Se três ou mais retas são paralelas e concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.
Duas retas, m e n cortam três paralelas r, s, t. Nessas condições, os segmentos de medidas a, b, c, d são proporcionais. Isto é: a/c=b/d.



Saiba por que: prolongando as retas m e n até se cruzarem, recaímos no teorema fundamental da proporcionalidade, em que temos a/c=b/d.

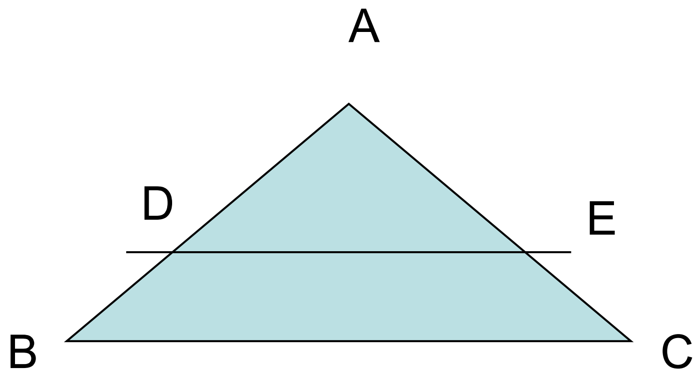


Atividade 3: Separando os Semelhantes

Levar vários polígonos e figuras geométricas para que os alunos observem e agrupem os que são semelhantes e os que não são.

Atividade 4: Recortando Figuras Planas

Propor recortes em figuras planas para verificar a semelhança. Após o recorte, fazer análise sobre o que ocorreu, se as figuras resultantes são ou não semelhantes a inicial (figura a seguir).

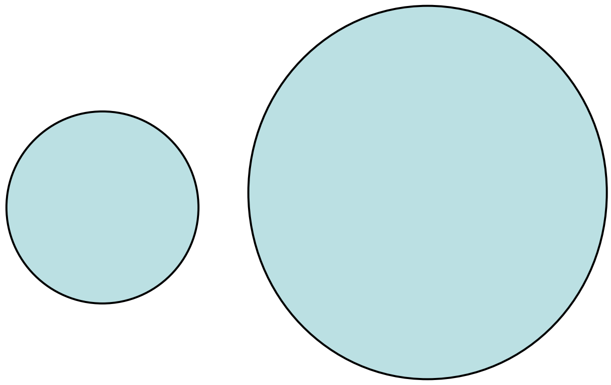


DE = recorte

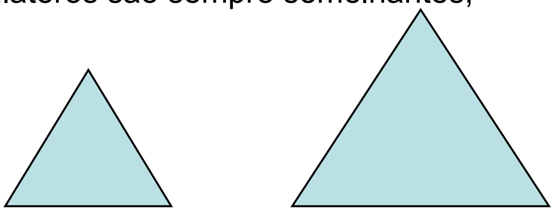
Observa-se que duas ou mais figuras planas são semelhantes quando têm a mesma forma e seus lados são proporcionais, não importa o tamanho.

Outras análises:

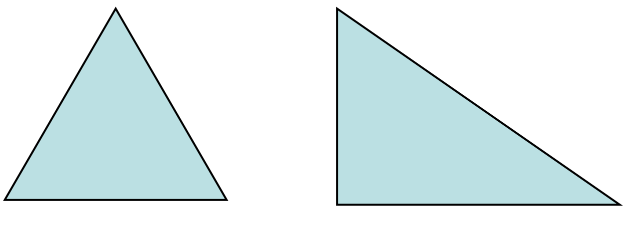
- Dois círculos são sempre semelhantes;



-Dois triângulos eqüiláteros são sempre semelhantes;



Nesses casos, percebemos que mesmo mudando o tamanho do polígono, a forma se manteve. Devemos observar que nem sempre triângulos são semelhantes, por exemplo:

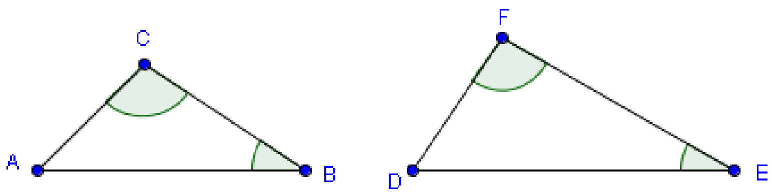


No caso dos polígonos, para haver semelhança, é necessário satisfazer as duas condições impostas, ou seja, dois polígonos são semelhantes quando os lados que se correspondem são proporcionais e os ângulos que se correspondem são iguais.

No caso de triângulos percebe-se que basta que dois triângulos tenham ângulos correspondentes iguais para serem semelhantes, o que não acontece com outros polígonos. Essa propriedade é específica dos triângulos.
O formato de um triângulo fica totalmente definido quando se conhece seus ângulos, além disso, basta conhecer dois de seus ângulos, pois o terceiro é o que falta para completar os 180°. Essa propriedade dos triângulos tem inúmeras aplicações práticas.

Semelhança de Triângulos:

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos com vértices correspondentes são congruentes e os lados opostos a esses vértices são proporcionais.



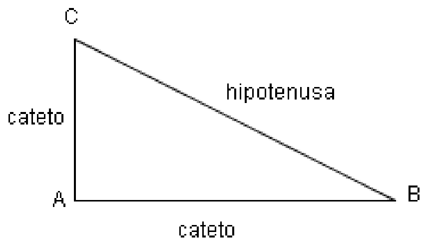
ABC ~ DEF AB/DE = AC/DF = BC/EF

Atividade 5: Obtendo a altura de uma árvore utilizando semelhança

Essa atividade deverá ser feita fora da sala, em dia de sol.
- fincar uma estaca no chão;
- medir o tamanho da estaca;
- medir a sombra projetada pela estaca, no chão;
- medir a sombra projetada pela árvore, no chão;
- desenhar triângulos semelhantes com as medidas obtidas;
- usando os conhecimentos de semelhança, resolver algebricamente o problema.

Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras:

Os triângulos retângulos são tão especiais que seus lados têm nomes:



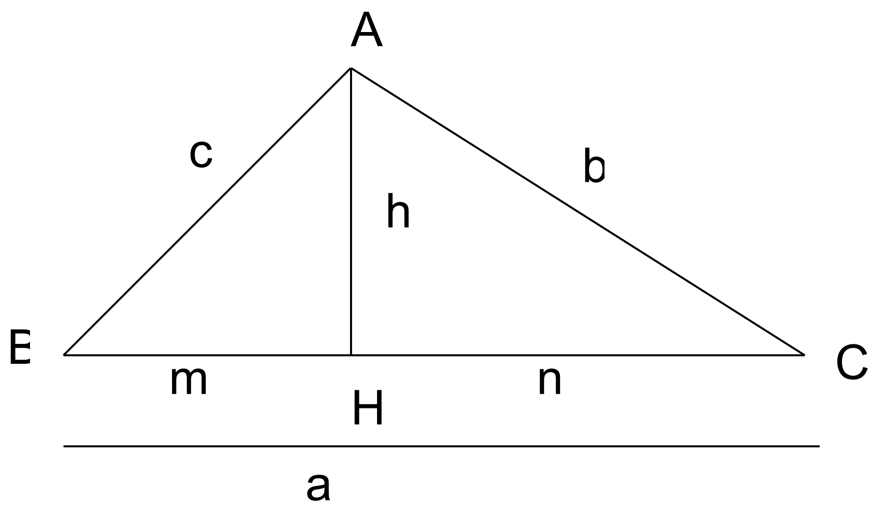
Como o próprio nome diz, triângulo retângulo é um tipo de triângulo que tem dois lados perpendiculares entre si. Os triângulos retângulos foram assunto de estudos de Pitágoras, importante matemático grego que nasceu por volta de 580 a.C., na Ilha de Samos, no mar Egeu, e passou parte da vida no sul da Itália.

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Outros matemáticos, antes de Pitágoras, conheciam o teorema, mas ninguém havia conseguido demonstrar que ele era válido para todo triângulo reto. Essa relação geométrica é uma das mais importantes utilizadas na matemática até hoje.

A partir do séc VI a.C., os gregos realizaram diversos estudos e descobertas na área da astronomia. Os estudos exigiram conhecimentos relativos a triângulos, passando esse ramo a ser chamado de **trigonometria** (tri= três; gono= ângulo e metria= medida).
Atualmente, a trigonometria é muito usada na topografia e aviação, além de ser objeto de estudo na engenharia e física, sendo importante para resolução de problemas que envolvam grandes distâncias. Nessa parte da matemática, o objetivo é o cálculo das medidas dos elementos do triângulo: lados e ângulos.

Elementos de um triângulo retângulo: observe a figura:



Nesse triângulo ABC, retângulo em A, temos as relações métricas:

a) $h^2 = mn$

b) $b^2 = an$

c) $c^2 = am$

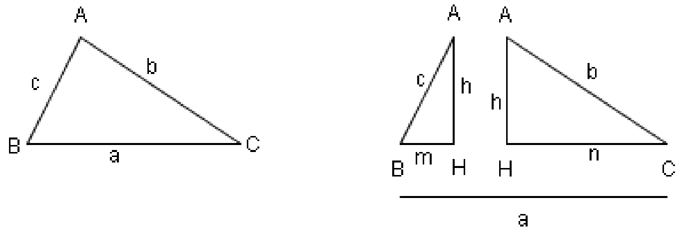
d) $ha = bc$

e) $ch = bm$

f) $bh = cn$

g) $a^2 = b^2 + c^2$ (Essa relação expressa o Teorema de Pitágoras: " Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual á soma dos quadrados das medidas dos catetos").

Para obter estas relações, considere o triângulo ABC inicial, que podemos desmembrá-lo, como na figura abaixo:



- ABC ~ ABH ↔ $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$

$ah = bc$ $c^2 = am$ $ch = bm$

- ABC ~ ACH ↔ $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$

$b^2 = an$ $ah = bc$ $bh = cn$

- ABH ~ ACH ↔ $\frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$

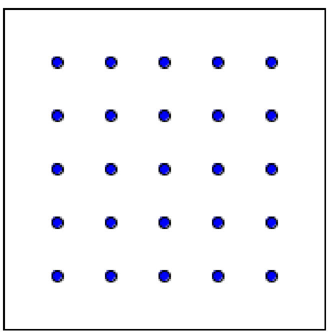
$bh = cn$ $ch = bm$ $h^2 = mn$

- Sendo $b^2 = an$ e $c^2 = am$, temos que :

$b^2 + c^2 = an + am$
$b^2 + c^2 = a(n + m)$,
como $n + m = a$, concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$

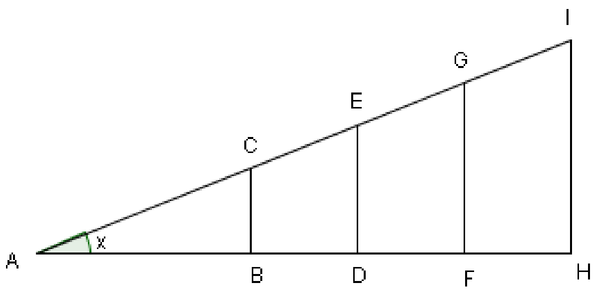
Atividade 6: Geoplano Quadriculado com Elástico Colorido

Geoplano quadriculado e barbante ou elástico colorido: montar no geoplano quadriculado o triângulo retângulo para analisar, observar e demonstrar as relações métricas anteriores.



Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo:

Considere a figura abaixo:



Como conseqüência do conceito de semelhança de triângulos, concluímos que todos os triângulos retângulos com ângulo interno de medida x tem as razões dos lados correspondentes iguais.

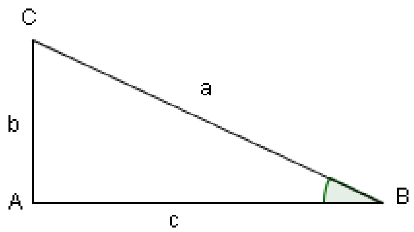
$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{HI}{AI}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} = \frac{AH}{AI}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} = \frac{HI}{AH}$$

Essas razões são chamadas respectivamente de seno, cosseno e tangente.

Considere um triângulo retângulo ABC, no qual a hipotenusa mede a, os catetos medem b e c, e um dos ângulos agudos mede x, conforme a figura abaixo:



Nessas condições, define-se:

Seno de x = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

Cosseno de x = $\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$

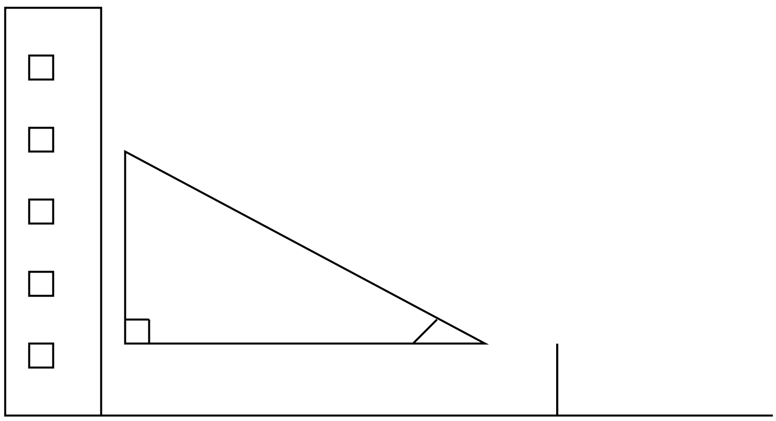
Tangente de x = $\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

Atividade 7: Medindo e Encontrando Valores

Encontrando os valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo. (Obs.Vale lembrar que nessa atividade os valores encontrados são aproximados, pois quando realizamos medidas com réguas, cometemos erros inevitavelmente, e que existe uma tabela trigonométrica onde encontramos todos os valores de seno, cosseno e tangente de todos os ângulos).
- usar régua e transferidor.
- medir um ângulo pré-determinado pelo professor (o professor distribui os valores que desejar, tendo o cuidado de colocar pelo menos três ângulos iguais de cada valor, para confrontar os valores encontrados).
- com o auxílio da régua, desenhar um triângulo retângulo de qualquer medida de lado, mas com o ângulo pedido.
- em seguida, cada um meça os lados do triângulo que desenhou.
- usando as razões trigonométricas, efetuar os cálculos para seno, cosseno e tangente. Confrontar os resultados e discutir a importância desse método, discutir a importância desse conteúdo no nosso dia-a-dia.

Atividade 8: Teodolito: medindo alturas inacessíveis

- construir um teodolito elementar, usando transferidor, canudinho e barbante com peso, que será utilizado para medir os ângulos do que se pretende medir a altura;
- o conceito utilizado será o de trigonometria no triângulo retângulo;
- aproximar-se do objeto a ser medido. Do centro do mesmo, afastar-se alguns metros (medir). Com o uso do teodolito, medir o ângulo de vista do ponto mais alto do objeto. Em seguida, desenha-se um triângulo retângulo como abaixo:



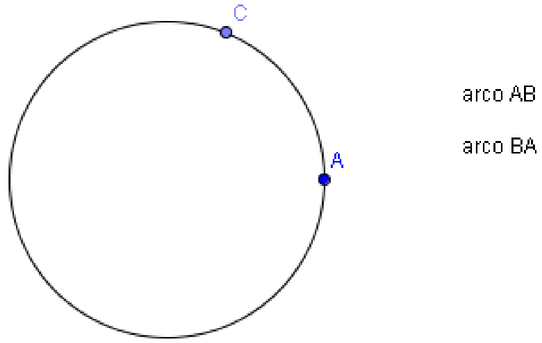
Em seguida calcula-se a altura do objeto com base no que foi aprendido. Pode-se estimar a altura para verificação da validade da resposta. Não esquecer de acrescentar a atura da pessoa que mediu o ângulo ao resultado.

Trigonometria na Circunferência:

Atividade 9: Ábaco Trigonométrico

Uso do ábaco trigonométrico (tabuleiro de madeira de forma retangular contendo uma circunferência dividida em 12 arcos congruentes, sobre o eixo de coordenadas cartesianas xôy e ainda traçadas as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares.). Neste ábaco trabalharemos os conceitos de ângulo central, arco de circunferência, circunferência orientada, unidades para medir arcos, primeira determinação, arcos congruentes.

1) **Arco de circunferência:** é o arco em que cada uma das partes de uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos. Temos os arcos AB e BA.
   Obs. Se A ≡ B, teremos um arco nulo e outro arco de uma volta.



2) **Ângulo central**: é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência e cujos lados são raios dessa circunferência.
   Obs. A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente: m(AB) = m(AÔB)

3) **Circunferência orientada**: Dizemos que uma circunferência está orientada s quando nela indicamos um sentido de percurso, que pode ser:
   - **sentido horário** (sentido do movimento do ponteiro do relógio), que é **negativo**.
   - **sentido anti-horário** (sentido contrário ao movimento do ponteiro do relógio), que é **positivo.**

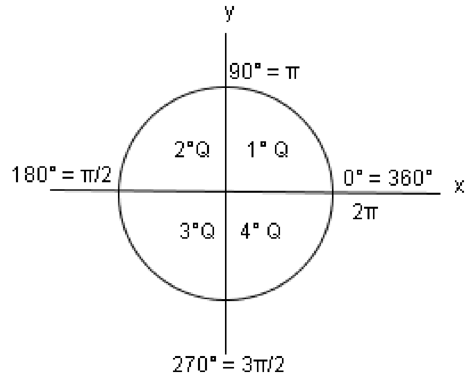
   Todo arco contido numa circunferência orientada é chamado arco orientado.

4) **Unidades para medir arcos**: As unidades mais conhecidas são o grau e o radiano.
   - Grau: corresponde a um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco.

   A medida de uma circunferência completa é igual a 360°.

   - Radiano (rad): chamamos radiano a medida de um arco de comprimento igual à medida do raio da circunferência que o contém.
   O comprimento de uma circunferência de raio R é igual a 2πR. Logo, uma circunferência contém 2π vezes o seu raio. Portanto, a medida em radianos de uma circunferência completa é igual a 2π rad.

5) **Ciclo trigonométrico:** É uma circunferência orientada à qual associamos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XÔY no plano, cuja origem coincide com o centro da circunferência, de raio unitário (r = 1), e cujo sentido é o anti-horário.
Os eixos x e y do sistema cartesiano ortogonal dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais, que são chamadas **quadrantes**



6)**Conversão de unidades**::

Grau	0°	90°	180°	270°	360°
Radiano	2π	?	π	?	2π

A conversão de unidades para radianos será feita através do uso da regra de três simples:

π_______180° π ______180°
x _______ 90° x ______270º

Se a unidade estiver em radianos para ser convertida em graus, basta substituirmos π rad por 180° e efetuarmos a multiplicação indicada.
Ex: $\frac{2\pi}{3}$ rad = $\frac{2.180°}{3}$ = 120°

7) Arcos côngruos ou congruentes:

Os arcos trigonométricos podem ser:
- positivos: quando marcados no sentido anti-horário;
- negativos: quando marcados no sentido horário;
- maiores que 360° ou 2π rad : quando têm mais de uma volta.
- côngruos ou congruentes: quando têm a mesma extremidade e diferem entre si apenas pelo número de voltas inteiras.

Ex. Localizar numa mesma circunferência os seguintes arcos: 60°, 420°, 780º. Usando o ábaco trigonométrico, pode-se utilizar barbante colorido para a localização de cada arco.

Expressão geral dos arcos côngruos: $\alpha° + k.360°$, com k ε Z.
$\alpha° + 2.k.\pi$, com k ε Z.
k = número de voltas completas

8) Primeira determinação positiva de um arco:

Se um arco mede α graus, dizemos que um arco de β graus é a sua primeira determinação positiva quando $0 \leq \beta \leq 360°$ e β é côngruo a α..
Ex. Calcular a primeira determinação positiva e escrever a expressão geral dos arcos côngruos a 1940°.

$$\begin{array}{ccc} 1940 / 360 = & 5 \text{ e resta } & 140. \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \text{nº voltas} & \text{1ª determ/ positiva} \end{array}$$

Expressão geral: 140° + k.360°, com k **ε Z.**

Funções Circulares

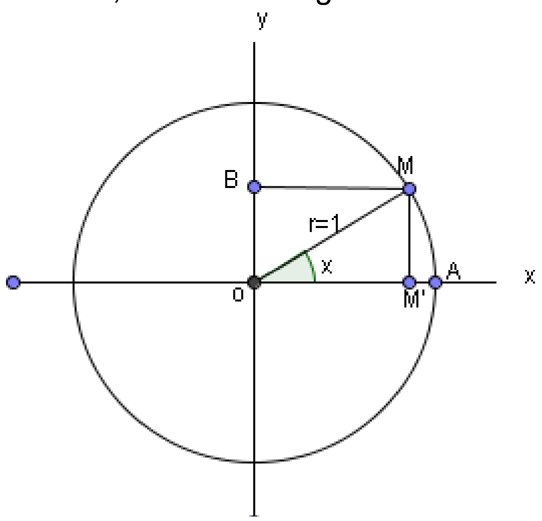
Nesta unidade estudaremos as noções de seno, cosseno e tangente na circunferência, onde se abrange as medidas de ângulos tanto agudos quanto obtusos, ou seja, ângulos menores e maiores que 90°, ângulos maiores que 360° e até ângulos negativos.

Atividade 10: Circunferência Trigonométrica Interativa

Uso da circunferência trigonométrica interativa (tabuleiro de forma quadrada, com braços deslizantes, graduada e com transferidor no centro, onde se pode definir de forma concreta as relações entre os ângulos e os seus respectivos valores de seno, cosseno e tangente, assim como visualizar as funções trigonométricas e estudo dos sinais das funções).

Estudo da Função Seno:

Considere um ciclo trigonométrico no qual marcamos o ponto M, que é imagem do número real x, conforme a figura:



- o arco AM corresponde ao ângulo central.

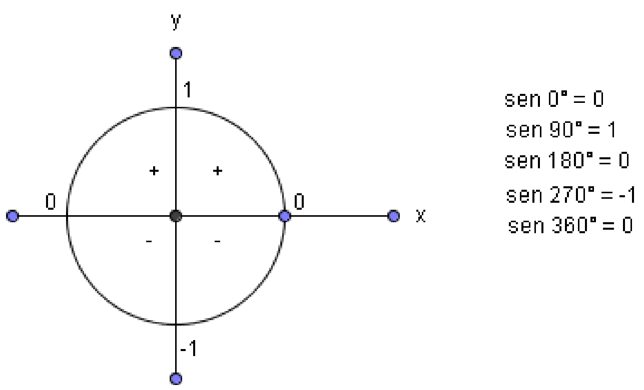
- seja OM o raio do ciclo, e M’ e B as projeções do ponto M nos eixos x e y, respectivamente. Definimos como seno do arco AM ou do ângulo x, a ordenada do ponto M, e indicamos:

$$\text{sen } x = OB$$

Compare que é a mesma definição que conhecíamos para o triângulo retângulo, isto é, no triângulo OM’M temos:

$$\text{sen } x = \frac{M'M}{OM} = \frac{OB}{1} = OB$$

SINAIS E VALORES IMPORTANTES DA FUNÇÃO SENO DE X:
Sendo a circunferência de raio unitário, ou seja, igual a 1, observamos a variação dos valores de sen x nos ângulos notáveis, conforme a figura:
- Sendo sen x definido como a ordenada do ponto M, compreende-se o eixo y. Sendo o raio unitário igual a 1, determina-se os valores de seno dos arcos notáveis levando-os até o eixo da ordenada. Respectivamente, os sinais em cada quadrante são analisados de acordo com o eixo da ordenada.
- os valores de seno variam de -1 até 1.



Atividade 11: Utilizando o Geogebra

Através do uso das tecnologias, utilizar o software Geogebra, onde o professor levará o aluno, por meio de vários comandos, acompanhar o processo de formação gráfica da função seno, visualizando o significado geométrico da mesma. Um fato importante desse software é que ele mostra tanto a representação geométrica quanto a representação algébrica de qualquer objeto que esteja na sua janela de visualização.
Procurando na internet, encontramos sites interativos com o uso do geogebra, dentre os quais, destacamos:
http://grupoc2dfnatividade.blogspot.com/2008/07/comprendendo-o-geogebra.html;

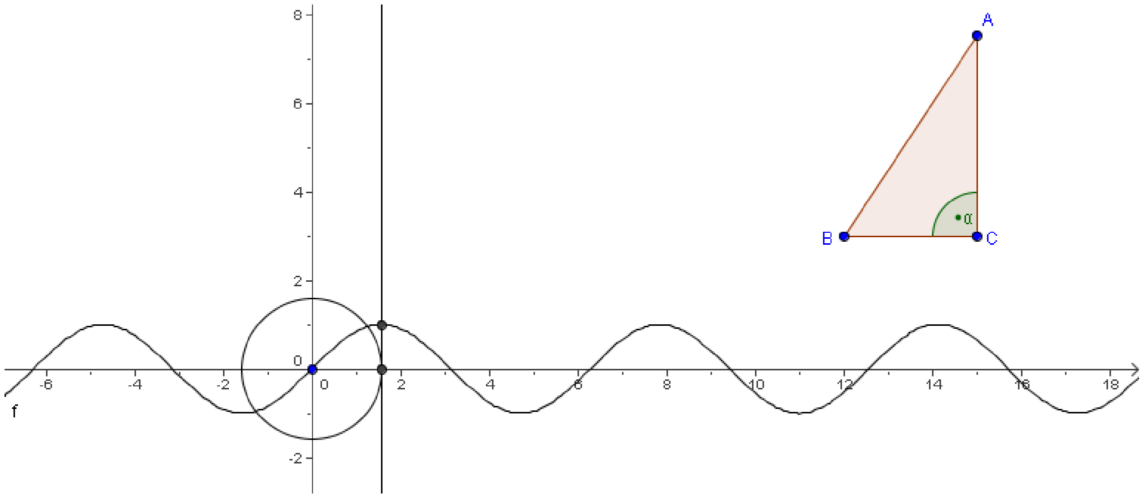
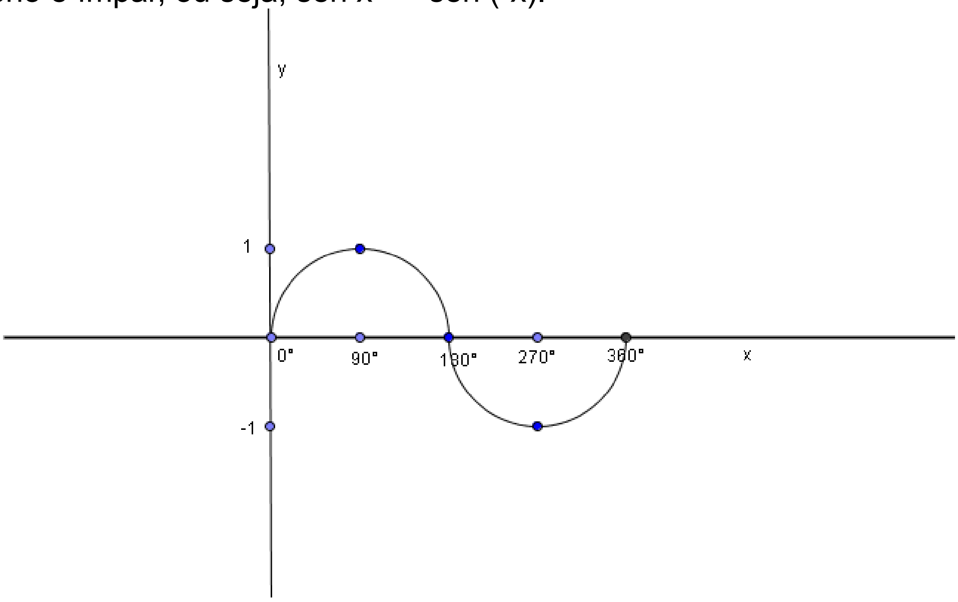
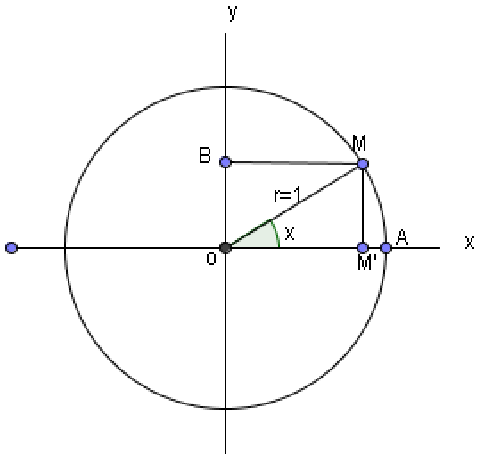


GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO:
- o gráfico é chamado de senóide.
- o domínio da função sen x é o conjunto dos números reais, D = R.
- a imagem da função sen x é o intervalo -1 ≤ sen x ≤ 1.
- a partir de 2π ou 360°, a função seno se repete, sendo portanto uma função periódica.
- o gráfico continua à esquerda e à direita.
- a função seno é ímpar, ou seja, sen x = - sen (-x).



Estudo da Função Cosseno:

Considere um ciclo trigonométrico no qual marcamos um ponto M, que é imagem do número real x, conforme a figura:



- o arco AM corresponde ao ângulo central.
- Seja OM o raio do ciclo, e M' e B as projeções do ponto M nos eixos x e y. Definimos como cosseno do arco AM ou do ângulo x, a abcissa do ponto M, e indicamos:

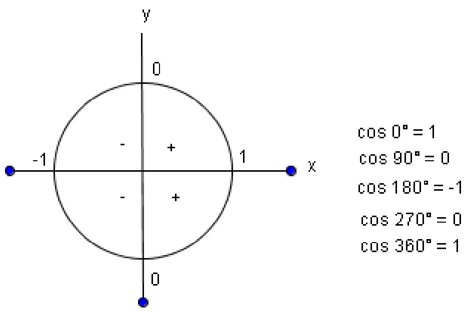
$$\cos x = OM'$$

Compare que é a mesma definição que conhecíamos para o triângulo retângulo, ou seja, no triângulo retângulo OM'M, temos:

$$\cos x = \frac{OM'}{OM} = \frac{OM'}{1} = OM'$$

SINAIS E VALORES IMPORTANTES DA FUNÇAO COSSENO DE X :

Sendo a circunferência de raio unitário, ou seja igual a 1, observamos a variação dos valores de cos x nos ângulos notáveis, conforme a figura:
- Sendo cos x definido como a abcissa do ponto M, compreende-se o eixo x. Sendo o raio unitário igual a 1, determina-se os valores de cosseno dos arcos notáveis levando-os até o eixo da abcissa. Respectivamente, os sinais em cada quadrante são analisados de acordo com o eixo da abcissa.
- os valores de cosseno variam de -1 até 1.



Atividade 12: Utilizando o Geogebra

Através do uso das tecnologias, utilizar o software Geogebra, onde o professor levará o aluno, por meio de vários comandos, acompanhar o processo de formação gráfica da função cosseno, visualizando o significado geométrico da mesma.

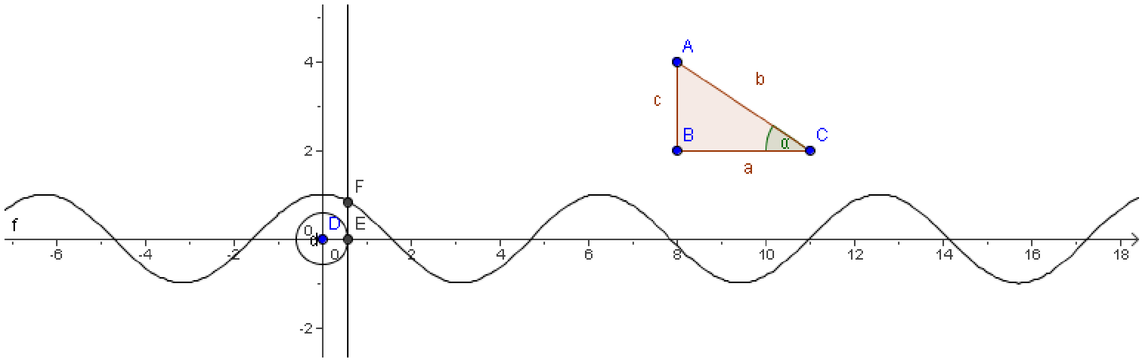
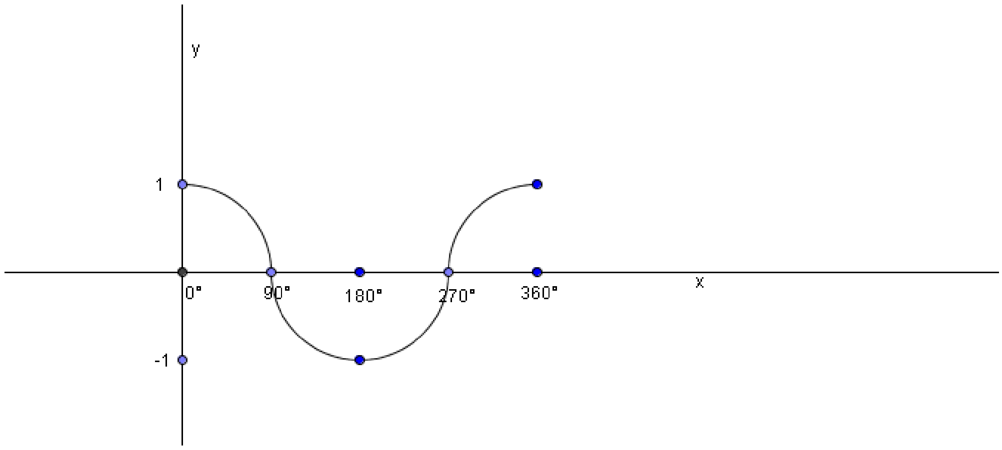


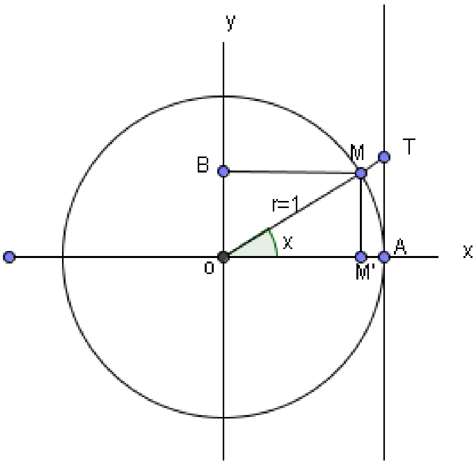
GRÁFICO DA FUNÇAÕ COSSENO:

- o gráfico é chamado de cossenóide.
- o domínio da função cos x é o conjunto dos números reais, D = R.
- a imagem da função cos x é o intervalo $-1 \le \cos x \le 1$.
- a partir de 2π ou 360°, a função cosseno se repete, sendo portanto uma função periódica.
- o gráfico continua à esquerda e à direita.
- a função cosseno é par, ou seja, cos x = cos (-x).



Estudo da Função Tangente:

Considere o ciclo trigonométrico no qual marcamos o ponto M, e o qual é tangenciado por uma reta paralela ao eixo y e passando pelo ponto A, conforme a figura:



Definimos como tangente do arco AM ou do ângulo x a medida do segmento AT, obtido pelo prolongamento do segmento OM até o eixo da tangente, partindo da origem do arco.

Compare que é a mesma definição que conhecíamos para o triângulo retângulo, ou seja, nos triângulos retângulos OM'M e OAT, temos:

$\Delta\, OM'M \sim \Delta\, OAT$

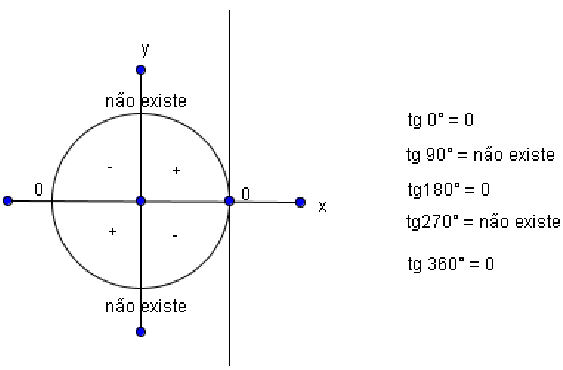
$$\frac{OM'}{AO} = \frac{M'M}{AT}$$

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{\text{sen } x}{AT}$$

$$AT = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \text{ com } \cos x \neq 0, \text{ ou seja }, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

SINAIS E VALORES IMPORTANTES DA FUNÇÃO TANGENTE:

Sendo o eixo tangente fora do ciclo trigonométrico, notamos que seus valores são infinitos. Podemos visualizar os valores dos arcos notáveis prolongando-os até o eixo da tangente, com isso verificamos a não existência da tg de 90° e da tg de 270°, por estarem no eixo da ordenada y, portanto, paralelo ao eixo da tangente.



Atividade 13: Utilizando o Geogebra

Através do uso das tecnologias, utilizar o software Geogebra, onde o professor levará o aluno, por meio de vários comandos, acompanhar o processo de formação gráfica da função tangente, visualizando o significado geométrico da mesma.

.

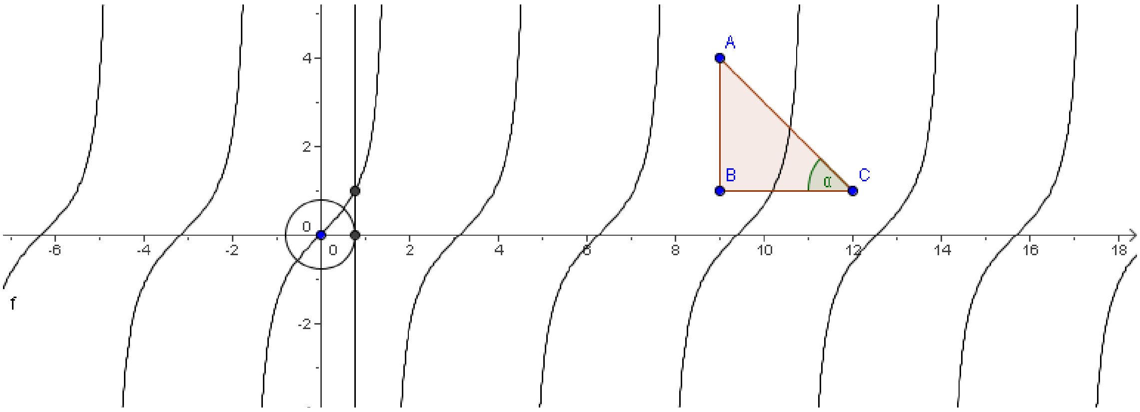
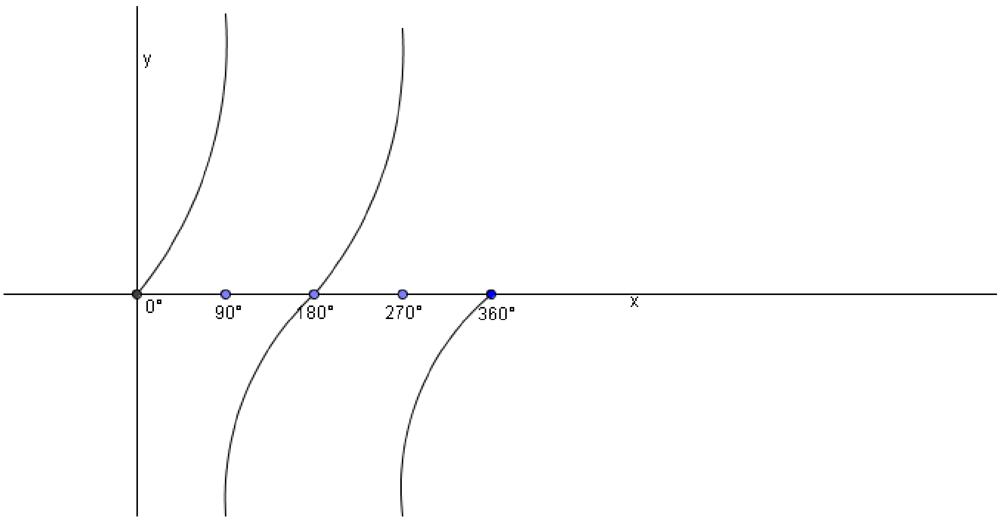


GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE:

- o gráfico é chamado tangentóide.
- o domínio da função tg x é D =
- a imagem da função tg x é o intervalo $-\infty < tg\ x < \infty$.
- a função é periódica , sendo $p = \pi$.
- a função tg x é impar, ou seja, tg x = - tg (-x).



Função Secante:

Definimos a função secante como a inversa da função cosseno, definida para todo x real e diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (K ε Z).

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ , com } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (K ε Z).}$$

O sinal da função secante é o mesmo da função cosseno, ou seja, positivo no 1° e 4° quadrantes e negativo no 2° e 3° quadrantes.

Função Cossecante:

Definimos a função cossecante como a inversa da função seno, definida para todo x real e diferente de kπ (K ε Z).

$\text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$, com $x \neq k\pi$ (K ε Z).

O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno, ou seja, positivo no 1° e 2° quadrantes e negativo no 3° e 4° quadrantes.

Função Cotangente:

Definimos a função cotangente como a inversa da função tangente, definida para todo x real e diferente de kπ (K ε Z).

$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$, com $x \neq k\pi$ (K ε Z).

O sinal da função cotangente é o mesmo da função tangente, ou seja, positivo no 1° e 3° quadrantes e negativo no 2° e 4° quadrantes.

Considerações Finais

Esta produção servirá como apoio didático ao professor, o qual deverá lançar mão de outros livros didáticos para complemento dos conteúdos e exercícios de fixação.

Nesta produção abordamos os assuntos de proporcionalidade e semelhança, triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras, trigonometria na circunferência, funções trigonométricas, ilustradas com atividades práticas que ajudarão aos alunos na aprendizagem dos conceitos inerentes ao estudo.

As abordagens foram feitas de maneira simples, permitindo o entendimento. A manipulação do material didático apresentado facilitará a abstração. Segundo Lorenzato, o material concreto facilita a observação e a análise, desenvolvendo o raciocínio lógico, crítico e científico, auxiliando o aluno na construção dos seus conhecimentos.

Bibliografia

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Editora Gradiva Publicações, lda. 6º Ed. 2005.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática Fundamental,** 2° grau: volume único / José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. São Paulo: FTD, 1994.

GRUPO C2DF. **Transformando o ensino da matemática através de novas tecnologias.** Disponível em: < http://grupoc2dfnatividade.blogspot.com/2008/07/comprendendo-o-geogebra.html >. acesso em 10/12/2008.

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática: Dando Corda na Trigonometria.** São Paulo, SP: Editora Ática, 2003.

IMENES, Luís Márcio Pereira/ Marcelo Cestari Lellis. **Matemática** / Imenes e Lellis. São Paulo: Scipione, 1997.

LOPES, Jairo de Araújo**. O Laboratório de Ensino de Matemática: Implicações na Formação de Professores**. ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP – v.15, n.27, jan/jun de 2007.

LORENZATO, Sérgio**. Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

MAIA, Lícia de Souza Leão**. O Que Há de Concreto no Ensino da Matemática?** ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP – v.9 – n.15/16, jan/dez. de 2001.

PAIVA, Manoel**. Matemática**, volume único.1. ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PARANÁ, **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado**. Curitiba, PR: Seed, 2006.

ROCHA, Luiz Mauro. **Pitágoras: O que sonhou primeiro**/ Luiz Mauro Rocha. 2 ed. São José dos Campos: Univap, 2001.

SEED, I Encontro de Área em Curitiba, maio/2008. Oficinas: materiais didáticos manipuláveis trigonométricos; geoplanos: construção e aplicação. Professor: Antônio Amílcar Levandoski.