Versão Online ISBN 978-85-8015-054-4
Cadernos PDE

VOLUME I

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2009

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS EM SALA DE AULA

Elisangela Cristina Perugini Mazaro[1]
elisangelacpm@gmail.com
Magna Natalia Marin Pires[2]
magnapires@yahoo.com.br

Resumo

Este artigo é o trabalho final apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE) e trata da aplicação de atividades investigativas no intuito de desenvolver e estimular o pensamento algébrico e identificar ligações que as características desse pensamento têm com a futura aprendizagem da linguagem algébrica formal. O projeto foi aplicado em uma turma de quinta série. Para criar situações pedagógicas favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico foi utilizada a estratégia metodológica da Investigação Matemática para que o aluno se tornasse participante ativo no processo de aprendizagem, favorecendo o desafio, a descoberta, a argumentação e o trabalho em equipe.

Palavras-chave: Álgebra; Pensamento Algébrico; Investigação Matemática; Educação Matemática.

THE DEVELOPMENT OF THE ALGEBRAIC THOUGHT BY MEANS OF MATHEMATICAL INVESTIGATIONS IN THE CLASSROOM

Abstract:

---

[1] Professora da Educação Básica da Rede Pública Paranaense.
[2] Professora da Universidade Estadual de Londrina. Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática - UEL.

This article is the final work presented to the Program for Educational Development of Paraná State (PDE) and concerns the application of investigative activities with the purpose of developing and stimulating the algebraic thought and identifying connections that the characteristics of this thought have with the future learning of the formal algebraic language. The project was applied to a fifth grade group. In order to create favorable pedagogical situations for the development of the algebraic thought, the methodological strategy of Mathematical Investigation was used for the student to become an active participant in the learning process, favoring the challenge, the discovery, the argumentation and the group work.

Keywords: Algebra; Algebraic Thought; Mathematical Investigation; Mathematical Education.

1 INTRODUÇÃO

O Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) constitui-se de uma importante iniciativa da Secretaria de Educação do Estado do Paraná na formação continuada de professores da rede pública. O Programa é desenvolvido em parceria com Instituições Públicas de Ensino Superior do Paraná, proporcionando uma integração entre a formação inicial e a formação continuada do professor, levando-o a um retorno às atividades e pesquisas acadêmicas em sua área, com afastamento temporário de suas funções na escola. Além de cursos presenciais nas universidades, os professores que aderem a este programa, elaboram uma proposta de intervenção na realidade escolar em conjunto com um professor orientador da instituição de ensino superior.

Nesta proposta, o projeto de intervenção utilizou como material didático um Caderno Pedagógico com onze atividades investigativas que oportunizaram e exploração do Pensamento algébrico.

O público alvo foi uma turma de quinta série do Colégio Estadual Antonio Garcez Novaes da cidade de Arapongas no estado do Paraná.

Trabalhar o Pensamento Algébrico numa turma de quinta série na qual tradicionalmente não se trabalha com conteúdos de Álgebra poderia causar alguma

estranheza num contexto convencional de ensino de Matemática. No entanto, essas atividades podem ser trabalhadas com a quinta série ou até mesmo com séries iniciais, uma vez que abordam informalmente conceitos como “incógnita” ou “variável”, sem que, para isso, o aluno precise conhecer a linguagem algébrica formal.

A Investigação Matemática foi a estratégia metodológica escolhida por acreditar-se que, neste contexto, o aluno possa agir como se fosse um matemático nas formas de analisar e solucionar uma situação. Essa forma de encaminhamento possibilita que o estudante deixe de ser um mero “espectador” em sala de aula, tornando-o um agente ativo na construção do seu conhecimento. Sendo assim, esta estratégia constitui-se de importante instrumento para que os alunos desenvolvam o pensamento algébrico.

2 A ÁLGEBRA E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

O ensino da álgebra tem se constituído motivo de fracasso e frustração para os nossos alunos. Baseado num simbolismo formal e permeado por regras e procedimentos que, normalmente, são transmitidos via exercícios de repetição e memorização, o ensino da álgebra resulta numa aprendizagem puramente mecânica de algo tão importante e presente na Matemática.

Boa parte de nossos alunos considera a álgebra como uma “língua estranha” cheia de símbolos, letras e regras e que, ao invés de facilitar a resolução de problemas, complica ainda mais.

Essa é uma realidade verificada em inúmeras avaliações como, por exemplo, a Prova Brasil. Um de seus descritores[3] aponta que o aluno deve reconhecer uma regularidade observada numa seqüência e representá-la com uma expressão algébrica. Porém, ao analisar-se uma questão que exigiu esse tipo de representação, constatou-se que apenas um terço dos alunos assinalou a alternativa correta, ou seja, soube representar o padrão por meio de uma linguagem algébrica formal. (BRASIL, 2008, p. 188).

---

[3] Os descritores definem uma determinada habilidade que deve ser desenvolvida na atual fase de ensino do aluno avaliado.

Normalmente a álgebra, no conceito de muitos educadores, se resume ao uso de letras para representar números e seus respectivos cálculos. Dessa forma, ela fica reduzida apenas a uma de suas particularidades, caracterizada pela chamada “tendência letrista”.

> Alguém que acredite que a atividade algébrica se resume a um “cálculo com letras”, pode propor o que para a sala de aula? Talvez adote, seguindo algumas péssimas idéias encontradas em propostas para a educação aritmética, a prática de utilizar a “sequência” *técnica (algoritmo)/prática (exercícios)*. Com toda a franqueza, isso é praticamente tudo o que encontramos na quase total maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro, e essa é uma situação bastante ruim. O que é, talvez, até *pior* é que essa prática não se baseia em uma investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em uma tradição, tradição esta que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo – *inclusive no Brasil* – já mostraram ser ineficaz e mesmo perniciosa à aprendizagem. (LINS; GIMENEZ, 2005, p. 105, grifos do autor).

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 79), o desenvolvimento histórico da álgebra teve algumas fases importantes assim denominadas:

- retórica ou verbal - quando ainda não se usavam símbolos ou abreviações, mas a linguagem corrente;
- sincopada - há o surgimento de símbolos ou abreviações;
- simbólica - sistematizada exclusivamente por meio de símbolos.

Assim, verificamos que na sua evolução histórica, a Álgebra não utilizou inicialmente os símbolos. Por que na escola queremos que os alunos entendam primeiro a linguagem para depois utilizar os “transformismos algébricos”?

> A tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve pela manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra. Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Acreditamos subsistir entre pensamento e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética. (FIORENTINI, 1993, p.95)

Em nossos currículos, prioritariamente se destaca a Aritmética nas séries escolares iniciais. Acredita-se que o aluno deva ter um “grau de amadurecimento” para trabalhar com a matemática “abstrata”. Porém, pesquisas apontam que a Álgebra pode ser trabalhada desde as séries iniciais:

> Considerando a álgebra como um fio condutor desde os primeiros anos de escolaridade, os professores poderão ajudar os alunos a construir uma base sólida baseada na compreensão e nas suas experiências como preparação para um trabalho algébrico mais aprofundado [...] (PORTUGAL, 2008, p.39)

Para Booth (1984, p. 24) entre aritmética e álgebra há uma diferença de foco, pois “em aritmética o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na Álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada geral”.

Podemos perceber que há uma relação intrínseca entre aritmética e álgebra, uma vez que “a álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a ‘aritmética generalizada’” (BOOTH, 1984, p. 33). Há então um vínculo entre a aritmética e a álgebra já que, como apresenta Lins e Gimenez (2005, p.113) “O que precisamos fazer é entender de que modo aritmética e álgebra se ligam, o que elas têm de comum. Feito isso teremos encontrado uma verdadeira raiz, que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única.”

Partindo deste princípio, pode-se considerar então a possibilidade de se trabalhar a educação algébrica em séries anteriores ao período em que os programas curriculares normalmente a iniciam, articulando o ensino da aritmética com o da álgebra.

> Quando dissemos que a diferença entre álgebra e aritmética era de tratamento, de foco, estávamos sugerindo não apenas que uma se beneficia da outra, como também que uma *depende* da outra. O problema que aparece em tal formulação é o tradicional “do ovo ou da galinha”: Por onde começamos? A “sabedoria” tradicional, o senso comum da educação matemática, diz, como já sabemos, que

> é “óbvio” que começamos pela aritmética. Parece-nos, no entanto, que não há nada de óbvio nessa afirmação: [...] o óbvio aqui não parece ser mais do que a tradição vestida de razão. (LINS; GIMENEZ; 2005, p. 113, grifo do autor)

Por outro lado, não podemos conceber a Álgebra somente como generalização da aritmética visto que:

> Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meio para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas. (USISKIN, 1984, p. 21)

Podemos então considerar que a Álgebra apresenta muitas dimensões que não são abordadas na matemática escolar, especialmente por priorizar a tendência letrista, os transformismos algébricos[4], e a repetição mecânica de procedimentos descontextualizados. Como, então, atribuir significado à Álgebra? Para Lins e Gimenez (p. 151, 2005), o Pensamento Algébrico é um dos modos de produzir significado para a álgebra e tem três características fundamentais.

1) *Pensar aritmeticamente*: produzir significado apenas com relação a números e operações aritméticas.
2) *Pensar internamente*: considerando números e operações apenas de acordo com suas propriedades (usando números sem relação com outros objetos como, por exemplo, físicos, geométricos etc.).
3) *Pensar analiticamente*: operar com números desconhecidos da mesma forma que se opera com números conhecidos.

Mas, se não há o domínio da linguagem algébrica formal, como caracterizar o chamado pensamento algébrico?

Alguns elementos importantes permitem identificar se o aluno está desenvolvendo o pensamento algébrico. Tais elementos podem ser observados até

---

[4] Processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993)

mesmo em crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que não exigem uma representação simbólica formal. Algumas características indicam esse desenvolvimento, quando os alunos:

> - identificam ou criam padrões numéricos e geométricos;
> - descrevem padrões verbalmente e representam-nos por meio de tabelas ou símbolos;
> - procuram e aplicam relações entre quantidades variáveis, para fazerem previsões;
> - fazem e explicam generalizações que aparentam ser sempre válidas em determinadas situações;
> - utilizam gráficos para descrever padrões e fazer previsões;
> - exploram propriedades dos números;
> - usam notações inventadas por eles, símbolos convencionais e variáveis para representar um padrão, uma generalização ou uma situação. (PORTUGAL, 2008, p. 183)

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p 87), são também características do pensamento algébrico a “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.” Esses elementos constituem-se de importante ferramenta para que o aluno perceba o real significado da utilização da álgebra com a utilização, ou não, de uma linguagem simbólica.

> A análise de situações em que esse pensamento pode se manifestar levou-nos, ainda, a concluir que não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, estritamente de natureza simbólica. (FIORENTINI; MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 88)

Determinados contextos permitem ao indivíduo aprimorar a capacidade de analisar situações matemáticas, argumentando e expressando o raciocínio a ser utilizado, levando-o a compreender principalmente as relações quantitativas

envolvidas. Tais contextos podem estar presentes dentro da própria aritmética como afirma Lins e Gimenez (2005, p. 113) ao garantirem que “a própria aritmética envolve, naturalmente, um certo nível de generalidade.” Neste sentido, “à medida que os alunos fazem generalizações a partir de observações acerca dos números e das operações, estarão a construir as bases do pensamento algébrico”. (PORTUGAL, 2008, p.108).

Sendo assim, nada impede que o pensamento algébrico seja trabalhado em séries iniciais. Embora os alunos desta fase escolar não tenham ainda domínio da linguagem algébrica formal, podem desenvolver o raciocínio algébrico.

> O pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar em atividades em que o símbolo-letra da Álgebra pode ser usado como ferramenta, que não é exclusiva da Álgebra, e que podem ser realizadas sem usar qualquer símbolo-letra da álgebra, tais como analisar relações entre quantidades, perceber estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar e prever. (KIERAN apud BRANCO, 2008, p. 4).

Obviamente não queremos, e não podemos, desprezar a necessidade do domínio da linguagem algébrica formal e sua importância no aprimoramento e refinamento do pensamento algébrico. Porém, devemos lembrar que a linguagem deve estar relacionada ao pensamento.

> A relação entre pensamento e a palavra é um processo vivo; o pensamento nasce através das palavras. Uma palavra desprovida de pensamento é uma coisa morta, e um pensamento não expresso por palavras, permanece na sombra. A relação entre eles não é, no entanto, algo já formado e constante; surge ao longo do desenvolvimento e também se modifica. (VYGOTSKY, 1993, p. 131)

As crianças podem, então, expressar seu pensamento livremente, por meio da linguagem verbal ou simplesmente utilizando desenhos, tabelas, diagramas e outros meios para expressarem o raciocínio algébrico, uma vez que ainda não conhecem a linguagem formal da álgebra.

A educação algébrica deve evitar apenas a memorização e manipulação repetitiva de letras desprovidas de contexto e significação para o aluno.

Técnicas são importantes e até mais fáceis de serem ensinadas, mas tornam-se vazias à medida que não se baseiam num significado que as valide. Nesse contexto, parece que aprender álgebra não apresenta nenhuma utilidade.

Reverter esse quadro e dar significado aos procedimentos algébricos não é tarefa simples, requer compromisso e um trabalho contínuo ao longo de muito tempo.

> [...] A álgebra se constitui um instrumento sócio-histórico, por meio da qual queremos, pela reorganização do pensamento algébrico, oportunizar aos alunos novas leituras e perspectivas de ação no mundo. [...] Não obstante, concebemos a Álgebra não apenas como resumo à resolução de alguns problemas com a aplicação de regras de manipulação algébrica. Ela se configura como uma forma específica de pensamento, no qual se exploram os significados e a compreensão dos conceitos. O desenvolvimento do pensamento algébrico e da sua linguagem demanda de pensamento genericamente elaborado pelos alunos a compreensão das regularidades e da constituição das relações entre grandezas, além deles expressarem matematicamente essas ideias na estrutura de uma situação-problema. (BARROS, 2009, p. 41)

3 A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Uma das formas de superar a aprendizagem mecânica e substancialmente baseada na memorização é a utilização de um método que favoreça o desafio, a descoberta, a reflexão e o envolvimento ativo do aluno. Com este intuito, as atividades relatadas neste artigo foram aplicadas utilizando como estratégia a Investigação Matemática.

Investigar, como consta no dicionário, significa “pesquisar, indagar, inquirir, [...] examinar com atenção, esquadrinhar.” (FERREIRA, 1998, p. 965). Uma “investigação”, no contexto da Matemática, utiliza-se destes elementos para desvendar relações entre os objetos de estudo e obter “pistas” para resolver determinados problemas.

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito de matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e professor. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23)

Porém, nem todas as atividades desenvolvem este aspecto investigativo. Há uma diferença entre exercício e problema. Para Dante (1998, p. 43) exercícios servem para praticar um determinado processo ou algoritmo, enquanto que um problema descreve uma situação que induz a busca de uma solução desconhecida e não especifica o processo ou algoritmo que leve diretamente a essa solução. A atividade investigativa tem um aspecto ainda mais amplo:

> Os exercícios e os problemas têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margens para ambigüidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação, as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

As tarefas investigativas devem ser desafiadoras, interessantes e estimuladoras da criatividade e da arte de pensar.

Quando o aluno tem um envolvimento ativo com a atividade investigativa a ser desenvolvida em sala de aula, a sua postura de “explorador” faz com que os conteúdos trabalhados adquiram real significado.

O trabalho investigativo revela não ser somente importante na solução do problema em questão, mas também nas descobertas que são feitas durante a resolução. Com base no pensamento de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 3) pode-se afirmar que “as investigações matemáticas diferenciam-se das demais por serem situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos várias alternativas de exploração e investigação”.

A aplicação de uma atividade investigativa envolve algumas etapas:

> Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 25)

A realização da investigação matemática, por parte dos alunos, envolve um processo com quatro fases principais:

Exploração e formulação de questões	▪ Reconhecer uma situação problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Teste e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA.(2009, p. 21)

A investigação matemática favorece também um ambiente de socialização, interação e troca de idéias, pois o aluno é convidado a interagir com colegas e professor, tendo liberdade para expressar o seu ponto de vista e suas descobertas.

Cabe ao professor, ao final do processo investigativo, provar as conjecturas apresentadas pelos alunos, devendo estar atento para as hipóteses levantadas que podem levar a processos complexos ou mesmo inexplorados.

> Há diferentes aspectos envolvidos no processo de mudança de paradigma de exercícios[5] para os cenários de investigação. Os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem. [...] Em particular, estamos interessados na possibilidade de os alunos participarem ativamente do seu processo de aprendizado. Tanto o professor quanto os alunos podem ser acometidos por dúvidas quando chegam a trabalhar num cenário de investigação, sem a proteção de "regras" de funcionamento bem conhecidas do paradigma do exercício. Assim, deixar o paradigma do exercício significa também deixar uma zona de conforto e entrar numa zona de risco. Quais são os possíveis ganhos do trabalho numa zona de risco associada a um cenário para investigação? Vemos que isso está intimamente relacionado com o surgimento de novas possibilidades de envolvimento dos alunos, de padrões de comunicação diferentes e, consequentemente, novas qualidades de aprendizagem. (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 58)

O envolvimento do aluno no processo é um aspecto forte na investigação matemática. Ao exigir sua participação ativa, sua criatividade e seu envolvimento, esse tipo de atividade torna-o agente ativo na apropriação dos conceitos matemáticos.

4 PARTINDO DA TEORIA PARA A PRÁTICA

Todo estudo tem um objetivo e, neste caso, o objetivo maior é desenvolver e aplicar um projeto que colabore com um ensino de qualidade na disciplina de Matemática. Para isso, foram definidos os objetos de estudo: o Pensamento Algébrico e a Investigação Matemática. Foi necessário muito tempo de pesquisa e dedicação para se obter as informações necessárias para direcionar a aplicação do projeto. No estudo teórico foram consultadas várias obras, entre livros, teses, dissertações, monografias e artigos sobre o assunto. Cuidadosamente, foram selecionadas as onze tarefas investigativas que compõem o Caderno Pedagógico elaborado para a implementação da proposta em sala de aula.

---

[5] Exercícios preestabelecidos, preparados por autoridades externas à sala de aula, sem justificativa para sua relevância. (ALRO, SKOVSMOSE, 2006)

Para a aplicação das tarefas foi escolhida uma turma de quinta série com trinta e seis alunos. Como eles nunca haviam desenvolvido atividades com a investigação matemática, houve a necessidade de prepará-los anteriormente com outras atividades além das que constam no caderno pedagógico.

A aplicação do projeto aconteceu durante o segundo semestre do ano de 2010 e utilizou aproximadamente vinte e seis horas-aula, sendo que a turma possuía quatro aulas semanais de matemática, das quais duas eram reservadas para as atividades do projeto.

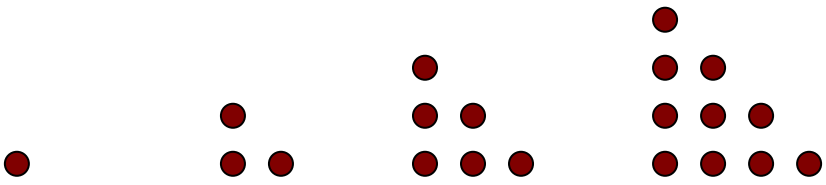
Para este artigo foram escolhidas duas atividades: a primeira envolvendo números quadrados e triangulares e a segunda um problema sobre uma quantidade desconhecida de dinheiro no cofrinho de uma criança.

4.1 TAREFA SOBRE NÚMEROS TRIANGULARES E QUADRADOS[6]:

Cerca de 500 anos a. C. viveu um estudioso grego chamado Pitágoras. Ele criou uma irmandade comunitária onde os estudos matemáticos se misturavam com o misticismo que eles atribuíam aos números. Os integrantes dessa comunidade ficaram conhecidos como “pitagóricos”. Eles fizeram grandes descobertas matemáticas, pois adoravam os números e acreditavam que tudo no universo era composto de números e nada se podia fazer sem eles. Uma das formas de representar os números era usando pedras, sementes ou pontos em um plano na forma de polígonos. Daí surgiram os “números poligonais”. Dentre esses números poligonais existem os números triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais e outros.

Nesta atividade, vamos estudar os números triangulares e os números quadrados.

A seqüência dos números triangulares é formada assim:



T1 T2 T3 T4

[6] Atividade adaptada do artigo *Polya visita a sala da aula* (DEGUIRE, L., 1997, p. 99).

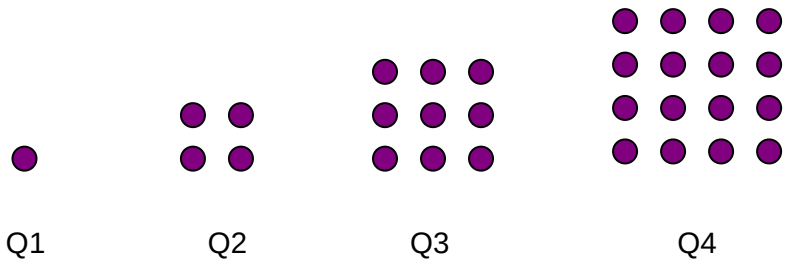
a) Desenhe o T5. Quantas “bolinhas” você usou?

b) Quantas bolinhas seriam necessárias para construir o T6?

c) Como descobrir um número triangular a partir do anterior a ele?

d) Como descobrir, sem desenhar, o T20? Há uma forma de descobrir qualquer número triangular da seqüência? Investigue:

Agora vejamos a seqüência dos números quadrados:



a) Desenhe o Q5. Quantas “bolinhas” você usou?

b) Quantas bolinhas seriam necessárias para construir o Q6?

c) Como descobrir um número quadrado a partir do anterior a ele?

d) Como descobrir, sem desenhar, o Q20? Há uma forma de descobrir qualquer número quadrado da seqüência? Investigue:

e) Agora que você investigou bastante sobre a seqüência dos números triangulares e quadrados, responda: como é possível obter um número quadrado a partir de um número triangular?

Antes de iniciar a investigação, a turma foi dividida em grupos de quatro alunos. Para melhor compreensão, analisaremos esta atividade dividindo-a em duas partes conforme as seqüências nela apresentadas.

4.1.1 Números triangulares:

Após algumas tentativas, os alunos observaram que para desenhar o T5 e obter sua quantidade de bolinhas precisavam somar 1 + 2 + 3 + 4 + 5 e o para o T6, somaram 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6. Ao responderem às questões “a” e “b”, puderam

perceber que cada termo é formado pela soma de números naturais consecutivos do “um” até o número de ordem da figura.

Para definir o padrão de formação a partir do anterior (questão “c”), a maioria descobriu que bastava adicionar o número da ordem da figura, conforme descrito abaixo:

Grupo 1:

Sempre aumenta o número que é o próximo
Ex. Do T3 para o T4 aumenta 4 bolinhas.

Grupo 2:

conforme o número citado iremos
aumentar o número escrito como se tivesse
aumentado uma fileira com o número correspondente.

T5

Percebe-se o interesse em investigar e várias tentativas de resolução.

Primeiro de tudo nós lemos depois nós debatemos
e conseguimos chegar ao resultado do T4. Para o
T5 aumenta 5.
Para construir o T6 a gente aumentou mais 6 bolinhas
uma das tentativas foi tentar o dobro mas vimos que
não deu.

Isso demonstra o reconhecimento de um padrão de formação da sequência (PORTUGAL, 2008). Na questão “d” os alunos não conseguiram chegar exatamente ao raciocínio de que cada termo é formado por $\frac{n(n+1)}{2}$, em que n é a ordem do número triangular. A maioria das equipes utilizou a generalização da forma de

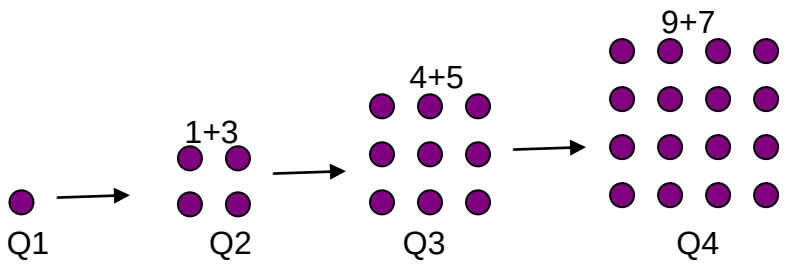
calcular adicionando os números naturais consecutivos de um até o número de ordem da figura.

Foi, então, narrada a história de Gauss demonstrando que podemos obter a soma de termos de uma sequência com números naturais, somando-se os extremos (por exemplo, de 1 a 10, a soma de 1 + 10 é 11) e esse valor é o mesmo da adição dos termos equidistantes dos extremos (2 + 9, 3 + 8, ...). Sendo assim, procurou-se demonstrar que basta calcular a soma do primeiro com o último termo e depois multiplicar pela metade do número maior (nesse exemplo, por cinco). A partir desta explicação os alunos foram capazes de concluir que uma das formar de determinar o T20 seria fazer a multiplicação de 21 (soma do primeiro e do último termo) por dez (metade de 20). Houve bastante interesse da turma pela história e por essa forma de calcular.

4.1.2 Números quadrados:

Ao responder às perguntas “a” e “b” , os alunos perceberam com facilidade que para desenhar o Q5 e o Q6 e determinar sua quantidade de bolinhas, bastava apenas multiplicar o número de ordem da figura por ele mesmo ou elevá-lo ao quadrado, ou seja, para o Q5 fizeram 5 x 5 e para o Q6, 6 x 6.

Na questão “c” os grupos puderam considerar que cada número quadrado é igual ao anterior somado com um número ímpar.



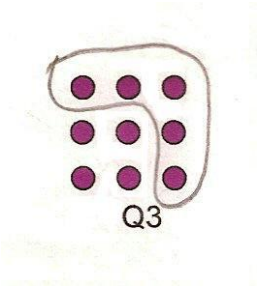
Outra forma de análise manifestada pelos alunos foi a de considerar que cada número quadrado é obtido somando-se o número de ordem da figura anterior com a própria ordem, como por exemplo, para se obter o Q3 soma-se 4 (quantidade de bolinhas da figura anterior) mais 2 (ordem da anterior) e mais 3 (própria ordem):

Veja a interpretação de um aluno:

Aluno: Professora, já sei! Do Q2 para o Q3 aumenta duas filas de 3.

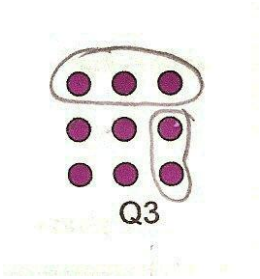
Professora: Como assim?

Aluno: Em “L”, veja no meu desenho.



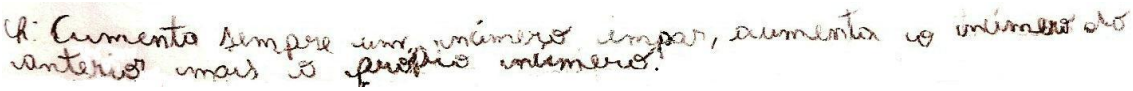
Professora: Isso forma duas filas de 3? Olhe bem.

Aluno: Ah, é verdade. Só tem cinco bolinhas. Eu contei a “do canto” duas vezes. Então fica uma fila de 3 e outra de 2. Assim:



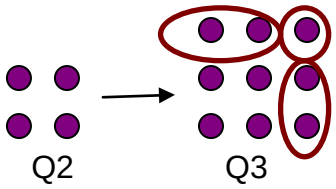
Professora: E isso definiria uma regularidade?

Aluno: Sim, olhe só: do Q4 para o Q5 aumenta 9, ou seja, sempre é o número da anterior mais o número da própria figura.



Uma outra maneira de descobrir foi considerar que a quantidade de figuras é formada somando-se o dobro da ordem anterior mais um, como no desenho:

.



Veja o diálogo com outro aluno:

Aluno: Professora, já sei! É só acrescentar o dobro!

Professora: O dobro de que quantidade?

Aluno: Da figura “antes”!

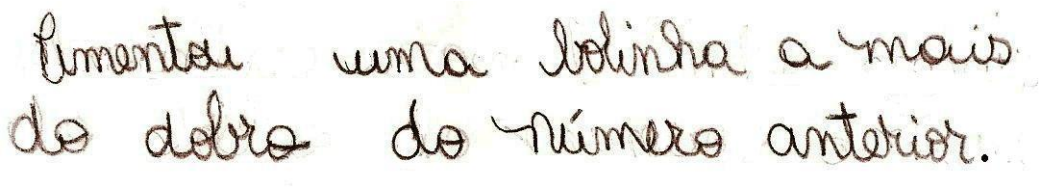
Professora: Da quantidade de bolinhas?

Aluno: Não, professora, do número embaixo.

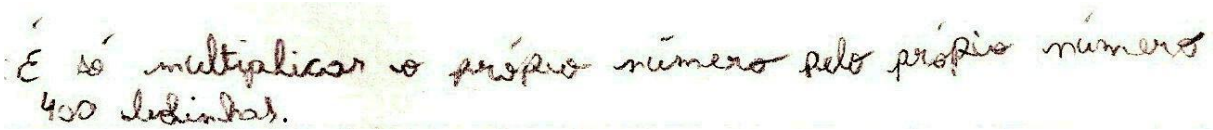
Professora: Será? Vamos observar: do Q3 para o Q4 aumenta 7 bolinhas. Sete é o dobro de 3?

Aluno: Não! Deixe-me ver, do Q4 para o Q5 aumenta nove... Já sei, é sempre o dobro mais um!

Professora: Isso vale para todos? Confira.


Aumentou uma bolinha a mais do dobro do número anterior.

Quanto à questão “d” foi fácil eles generalizarem dizendo que bastava multiplicar o número da ordem da figura por ele mesmo (ou elevá-lo ao quadrado).


É só multiplicar o próprio número pelo próprio número
400 bolinhas.

Já na questão “e” foi mais difícil para os alunos generalizarem a forma de descobrir um número quadrado a partir de um triangular. Algumas equipes descobriram que bastava somar o número triangular com o seu anterior na seqüência. Por exemplo, para formar o Q4 basta somar o T4 com o T3.

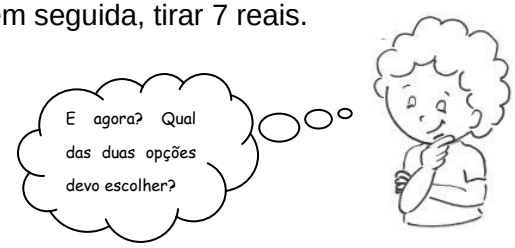
Para Kieran (apud BRANCO, 2008, p. 4), a capacidade de generalizar, analisar relações entre quantidades para poder prever resultados, sem utilizar letras como símbolos formais da álgebra nos primeiros anos de escolaridade é uma forma de expressar o Pensamento Algébrico. Isso pode ser constatado pela forma como os

alunos responderam à questão “d” dos números quadrados e triangulares e também na questão “e”. Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a percepção de regularidades e o processo de generalização expressos pela linguagem natural, também caracterizam o Pensamento Algébrico. De acordo com Lins e Gimenez (2005), nas questão “c”, “d” e “e”, principalmente, se o aluno perceber que há uma regra de formação e que ela independe do desenho, ele consegue internalizar a situação. A capacidade de identificar um padrão geométrico, explicando a generalização que parece ser sempre válida na seqüência apresentada nesta tarefa, identificando e aplicando relações entre as quantidades variáveis, ordem da figura e quantidade de bolinhas, demonstra o Pensamento Algébrico (PORTUGAL, 2008). Podemos, neste sentido, afirmar que os alunos conseguiram estabelecer uma noção intuitiva de função.

4.2 QUANTIDADE DE DINHEIRO NO COFRINHO (: QUAL A MELHOR OPÇÃO?) [7]

Caio contou para sua avó que tinha uma certa quantidade de dinheiro guardada em seu cofrinho. Sua avó lhe disse:

- Muito bem, Caio. Já está aprendendo a economizar e guardar o seu dinheiro. Como recompensa, vou lhe dar duas opções. A primeira: vou duplicar o seu dinheiro. A segunda: vou triplicar o seu dinheiro e, em seguida, tirar 7 reais.



a) Qual a melhor opção para Caio? Existe alguma opção sempre melhor?

b) E se, ao invés de tirar 7 reais, a avó resolvesse tirar 5 reais na segunda opção?

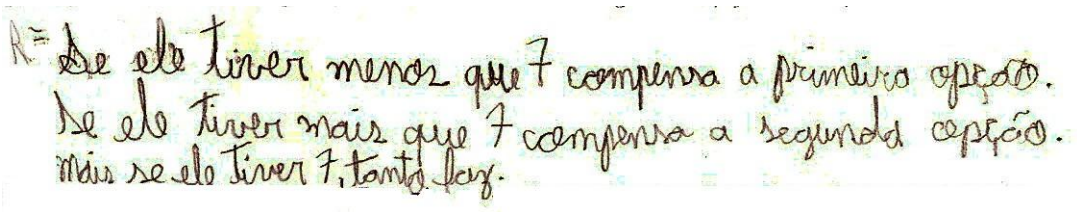
c) O que se pode concluir sobre uma quantia qualquer a ser retirada na segunda opção?

[7] Atividade adaptada do livro *Desenvolvimento Matemático na Criança: Explorando Notações* (BRIZUELA, B., 2006, p. 99)

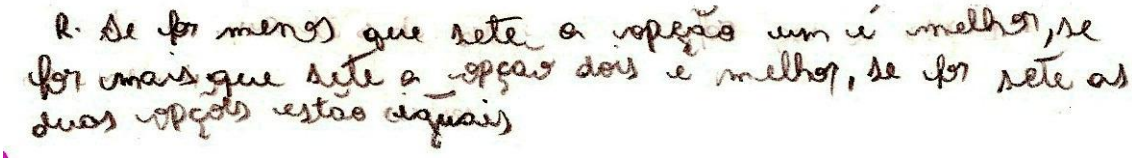
Inicialmente a turma foi dividida em grupos e foi feita uma leitura coletiva. Terminada a leitura, a primeira pergunta feita por um aluno: “Professora, mas quanto dinheiro tinha Caio no cofrinho?”. Percebeu-se de imediato um desconforto com o desconhecimento da quantidade de dinheiro no cofrinho. Chegaram, a certa altura, a perguntar também: “Mas ele realmente tinha algum dinheiro no cofrinho?”.

Quanto à primeira questão (letra “a”), os alunos chegaram facilmente à conclusão de que a opção a ser escolhida depende do valor a ser retirado, ou seja, sete reais:

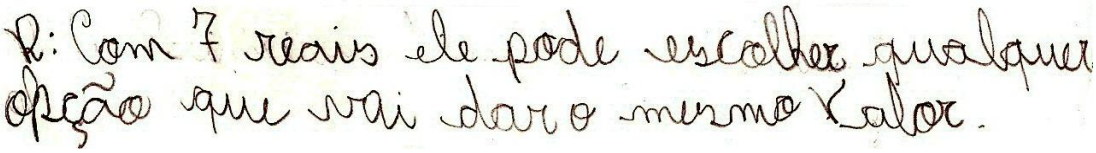
Grupo 1:


R= Se ele tiver menos que 7 compensa a primeira opção.
Se ele tiver mais que 7 compensa a segunda opção.
Mas se ele tiver 7, tanto faz.

Grupo 2:


R. Se for menos que sete a opção um é melhor, se
for mais que sete a opção dois é melhor, se for sete as
duas opções estão iguais

Facilmente chegaram à conclusão de que com sete reais, qualquer uma das opções daria o mesmo resultado:


R: Com 7 reais ele pode escolher qualquer
opção que vai dar o mesmo valor.

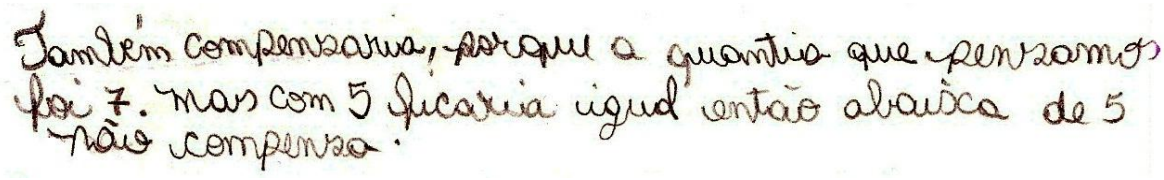
Os alunos, verbalmente, descreveram uma função definida por partes que teria a representação matemática: $f(x) = \begin{cases} 2x, se\, 0 < x \leq 7 \\ 3x - 7, se\, x > 7 \end{cases}$.

Para Portugal (2008), quando numa situação, os alunos procuram e aplicam relações entre quantidades variáveis para fazerem previsões já estão utilizando o pensamento algébrico.

Mas ainda havia uma dificuldade em se trabalhar com um valor variável. De certa forma, eles ainda “necessitavam” de um valor fixo da quantidade no cofrinho. Por isso, para responder à segunda questão, na qual o valor a ser retirado foi alterado para cinco reais, algumas equipes tiveram um pouco de dificuldade, conforme relatado:

Aluno: Professora, então agora compensa a segunda opção.
Professora: Mas por que você está afirmando isso?
Aluno: Porque se você calcular o dobro de sete reais é quatorze o se calcularmos o triplo de sete é vinte e um, menos cinco dá dezesseis, então a segunda opção é melhor.
Professora: Mas quem disse que a quantidade no cofrinho era sete reais?
Aluno: Pela primeira pergunta.
Professora: Ah, mas vamos então esquecer a primeira pergunta e considerar que pode ser uma quantia qualquer no cofrinho e analisar tudo de novo considerando que as opções são: dobrar a quantidade ou triplicar e retirar cinco reais.
Aluno: Então precisa fazer tudo de novo?
Professora: Isso mesmo.

Ao observar os relatos escritos dos grupos após estes questionamentos e discussões orais, percebeu-se, ainda, que alguns alunos demonstraram estar vinculados ao valor da questão “a”, ou seja, a quantidade sete.


Também compensaria, porque a quantia que pensamos foi 7. Mas com 5 ficaria igual então abaixo de 5 não compensa.

Após melhor compreender a segunda questão, a maioria das equipes conseguiu definir qual a melhor opção dependendo do valor inicial:

R: Se tivesse menos que cinco a opção 1 e melhor, se for mais que cinco a opção 2 é melhor, e se for cinco vai dar as iguais

Por meio da análise de seus relatos escritos, pode-se concluir também que os alunos perceberam que quando a quantidade de dinheiro no cofrinho fosse cinco reais, qualquer uma das duas opções resulta no mesmo valor.

R: Com 5 reais ele pode escolher qualque opção que vai dar o mesmo Valor por que 2x5=10 e 3x5=15 e 15 menos 5 é dez.

Já analisando as respostas dos alunos para a questão “c”, verificou-se que eles puderam perceber que a quantidade a ser retirada é sempre o valor de referência para a escolha da melhor opção.

R: Qualquer número que é o que tirar sempre que for menos que esse número a opção 1 é melhor e, se for + que esse número a opção 2 é melhor.

Uma das equipes, durante a socialização de resultados[8], usou uma expressão bem interessante:

Aluno: A gente percebeu que na letra “a” o **valor limite** era sete.

Professora: O que significa para vocês “valor limite”?

Aluno: Significa o valor que vai ser retirado, pois sempre quando é ele, qualquer uma das opções dá o mesmo resultado. Por exemplo, na letra “b”, o valor limite é cinco.

---

[8]Momento em que, ao final das investigações, os grupos tinham a oportunidade de expor suas conjecturas e resoluções.

Professora: E vocês conseguiram responder à pergunta “c”?

Aluno: A gente colocou que o **valor limite** é o que tira, pois abaixo dele a primeira opção é melhor e acima dele a segunda opção é melhor e quando o valor for igual a ele, tanto faz.

A questão “c” é um convite à generalização. Para Portugal (2008) quando os alunos “fazem e explicam generalizações que aparentam ser sempre válidas em determinadas situações”, como neste caso, expressam o Pensamento Algébrico. Para Kieran (2004) e Fiorentini, Miorim e Miguel(1993), essas relações e generalizações também são consideradas características do Pensamento Algébrico. Segundo as características do pensamento algébrico por Lins e Gimenez (2005), as questão “a” e “b” envolvem o *pensar aritmeticamente*, pois lidam com os números ainda relacionados à situação apresentada; já a questão “c” marca a transição para o *pensar internamente*, pois a generalização conduz a um olhar para as operações em si e, assim, pode-se afirmar que até leva ao *pensar analiticamente*, sem o uso dos símbolos formais, mas, de certa forma, operando com números desconhecidos como se fossem conhecidos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Todo professor deve ser também um pesquisador, porém a rotina escolar não permite que se faça um estudo aprofundado sobre os diversos assuntos da Matemática. Este Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) proporcionou um tempo de maior dedicação aos estudos e pesquisas sobre os temas escolhidos: Pensamento Algébrico e Investigação Matemática, além de formação em outras áreas do conhecimento Matemático. Essa experiência de estudo e contato com a pesquisa acadêmica foi bastante proveitosa e exigiu dedicação e esforço.

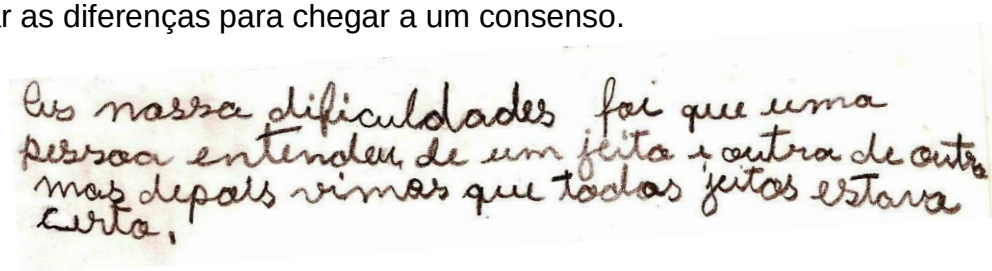
No entanto, não podemos esquecer que o principal objetivo é formar o professor para que possa contribuir para uma educação de qualidade. Com este intuito, foi elaborado um projeto e um material didático a ser implementado na escola de atuação do professor.

A turma de quinta série escolhida foi bem participativa. Todos os alunos queriam expor suas formas de resolução e foi fácil perceber que ficavam felizes com as suas descobertas. Nesta perspectiva, quando o professor sai da “zona de conforto” proporcionada pelo ensino mais tradicional, muda os padrões de comunicação em sala de aula e propicia uma maior autonomia ao aluno gerando certo grau de instabilidade. Essa mudança da dinâmica usual das aulas afetou não somente o papel desempenhado pela professora, mas também o papel do aluno. Muitas vezes alguns diziam: “professora, passe alguns exercícios do livro”, ou então quando eram indagados sobre a atividade diziam: “professora, por que você não explica como faz?”. Para eles, acostumados a seguir uma “receita” ou um “exemplo resolvido”, ter que encontrar suas próprias formas de resolução, impeliu-os a sair de sua “zona de conforto”. Isto pode ser verificado, especialmente, nas primeiras tarefas investigativas realizadas.

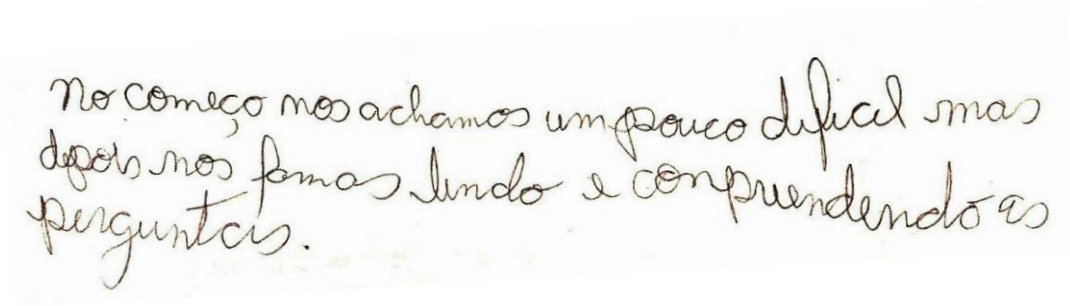
Como a turma era bastante agitada, a formação dos grupos ou duplas demandava bastante tempo, o que atrasava o início das investigações. Também o grande número de alunos dificultava o atendimento a todos os grupos. Um outro problema foi o tempo reduzido das aulas, pois era necessário às vezes apressar ou interromper o trabalho.

Durante a socialização de resultados, realizada em cada investigação, cada grupo apresentava suas resoluções e os demais grupos opinavam e demonstravam sua maneira de compreender e resolver cada atividade.

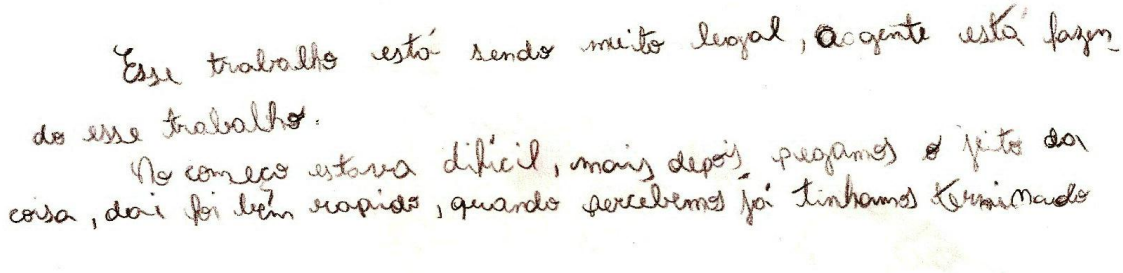
Houve um pouco de dificuldade em confeccionar os relatórios escritos ao final de cada tarefa, pois os alunos nunca haviam feito isso antes e não sabiam expressar por escrito como haviam desenvolvido seu raciocínio. O próprio trabalho em equipe foi um grande aprendizado para eles, pois perceberam que precisavam superar as diferenças para chegar a um consenso.


Os nossa dificuldades foi que uma pessoa entendeu de um feito e outra de outro mas depois vimos que todos feitos estava certo.

Havia também a dificuldade de compreender as atividades:


No começo nos achamos um pouco dificil mas depois nos fomos lindo e compreendendo as perguntas.

Apesar disso, muitos gostaram dessa nova forma de compreender a matemática.


Esse trabalho está sendo muito legal, a gente está fazendo esse trabalho.
No começo estava dificil, mais depois pegamos o jeito da coisa, daí foi bem rapido, quando percebemos já tinhamos terminado

Em geral, os objetivos propostos pelo projeto foram atingidos e, durante a realização das atividades, percebeu-se a presença das principais características do Pensamento Algébrico. Pelo exposto, tudo indica que podemos iniciar o trabalho com a álgebra antes do período descrito nos currículos e preparar nossos alunos para a posterior apropriação da linguagem algébrica formal que é importante, mas não o suficiente para compreendê-la.

A Investigação Matemática apresentou-se como uma estratégia eficiente para a aprendizagem efetiva dos conteúdos. Porém, é necessário que este método seja mais utilizado para que alunos e professores mudem sua forma de perceber e trabalhar com a Matemática.

REFERÊNCIAS:

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Olé. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução: Orlando de A. Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BARROS, Gilian C. **Tessituras em rede:** Possibilidades de Interação e Pesquisa a partir de Webquests de Álgebra. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Setor de Educação - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.).**As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 23-36.

BRANCO, Neuza Cristina Vicente. **O Estudo de Padrões e Regularidades no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.** 2008 Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Portugal.

BRASIL, Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil:** Ensino Fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB, Inep, 2008.

BRIZUELA, Bárbara M. **Desenvolvimento Matemática na Crianças: Explorando Notações**. Tradução: Maria Adriana V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BROCARDO, Joana; SERRAZINA, Lurdes. **Tarefa sobre números – 1º Ciclo.** Lisboa [s.n., 2005] disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Numeros_Tarefas.pdf >consulta em 07 dez. 2009.

CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia D.; BRIZUELA, Bárbara M. **Can Young Students Operate On Unknowns?** Medford [s.n.] : 2001, disponível em <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2001/youngStudents.pdf> acesso em 10 dez. 2009.

DEGUIRE, Linda J. Polya visita a sala de aula. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Org.) **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 99-113.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando L. P.; CRISTOVÃO, Eliane M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2005, LISBOA. **Anais**...Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm>. acesso em: 28 set. 2009.

FIORENTINI, Dário.; MIORIM, Maria Angela.; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um repensar...a Educação Algébrica. **Pro-posições** , Campinas: Cortez. v. 4, n. 1(10), março 1993, disponível em <http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/edicoes/sobre_a_revista.html>. Acesso em: 28 set. 2009

GIMÉNEZ, Joaquim. Explorando figuras feitas com palitos: áreas e perímetros, **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, n. 5, p. 15-18, nov. 1996.

INVESTIGAR. In: FERREIRA, Aurélio B. de H. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa.** 2. ed. São Paulo: Nova Fronteira, 1998. p. 965.

ISOLANI, Clélia Maria Martins et al. **Matemática**, 2.ed. Curitiba: Módulo, 2002. v.1.

KIERAN, Carolyn: Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, [S.l.], v.8, n.1, 2004, 139-151. Disponível em <http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Carolyn%20Kieran.pdf> Acesso em: 15 mar. 2010.

LAUDARES, João; MOURA, Maria A.L. **Números Poligonais**, Itabira: UFOP, 2006. disponível em:
< http://www.funcesi.br/Portals/1/Artigo%20Numeros%20poligonais.pdf > acesso em 14 dez. 2009.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. 6.ed. Campinas: Papirus, 2005.

LOOS, Helga ; FALCÃO Jorge T. da Rocha ; ACIOLY-RÉGNIER, Nadja M. A ansiedade na aprendizagem da Matemática e a passagem da Aritmética para a Álgebra. In: BRITO, Márcia Regina F. (Org). **Psicologia da Educação Matemática.** Florianópolis: Insular, 2005. p. 235 – 258.

MIGUEL, José Carlos . O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. In: PINHO, Sheila Zambello; SAGLIETTI, José Roberto Corrêa (Org.). **Núcleos de Ensino** - PROGRAD - UNESP. I ed. São Paulo - SP: Editora UNESP, 2005, v. I, p. 375-394. disponível em <www.inf.unioeste.br/~rogerio/Ens_Mat_Metodologia.pdf> consulta em 29 set. 2010

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática.** Curitiba: SEED, 2009.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia (2009). **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PORFÍRIO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação, In: P. Abrantes et al. (org) **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: Projeto MPT e APM, 1999. p. 111-118. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/p_111-118.PDF> acesso em 7 dez. 2009.

PORTUGAL. Associação de Professores de Matemática APM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** 2.ed. Lisboa: Gabinete de edição da APM, 2008.

USISKIN, Z. **Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1994. p. 9-22

VYGOTSKY, Lev S. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1993.