Versão Online ISBN 978-85-8015-054-4
Cadernos PDE

VOLUME I

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2009

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E O CONCEITO DE FUNÇÕES:

Um estudo com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental

Autora: *Sandra Maria Pimenta Ferreira* – sandrapimentaferreira@gmail.com [1]
Orientadora: *Magna Natalia Marin Pires* – magnapires@yahoo.com.br[2]

Resumo

O presente trabalho é parte de um estudo de conceito de funções por meio de tarefas investigativas com uma turma da 8ª série do Ensino Fundamental (9º ano). Como professora, enxerguei na estratégia de Investigação Matemática a possibilidade de um caminho mais produtivo na interação dos alunos com este conceito matemático. Para o desenvolvimento das tarefas propostas os alunos se organizaram em grupos de quatro. Num primeiro momento, eles exploraram a conta de energia elétrica de suas casas, fazendo comparações e encontrando relações entre duas grandezas. Em seguida, realizaram as tarefas investigativas baseadas na exploração de padrões e regularidades, alicerçando assim a compreensão do conceito de função, explorando-as, fazendo descobertas, confrontando suas ideias com o grupo e posteriormente socializando suas ideias com toda a sala. Posteriormente foi feito um trabalho com todas as funções que surgiram nas tarefas propostas, fazendo com que os alunos analisassem cada uma delas e construíssem seus gráficos. Este artigo apresenta o relato da análise da conta de energia elétrica da casa de cada aluno e das tarefas 1 e 7 do Caderno Pedagógico direcionado ao estudo do conceito de Função por meio de tarefas investigativas.

Palavras-Chave: Função. Investigação Matemática. Ensino Fundamental. Educação Matemática.

Abstract:

The present work is part of a concept study of functions through investigative tasks with a class of 8th grade of elementary school (9th year). As a teacher, I saw in the strategy of Mathematical Research the possibility of a more productive way in the interaction of students with this mathematical concept. For the development of the

[1] Professora da Rede Pública Estadual – Paraná.
[2] Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

proposed tasks students were organized into groups of four. At first moment, they explored the eletric bill from their homes, making comparisons and finding relationships between two quantities. Then, performed the investigative tasks based on exploitation of patterns and regularities, basing so understanding the concept of function, exploring them, making discoveries, by confronting their ideas with the group and later socializing their ideas with the whole room. A work was done later with all the functions that appeared in the proposed tasks, by making the students to examine each of them and build their graphics. This article presents the report of the analysis of the electricity bill of each student's home and the tasks 1 and 7 of the pedagogical notebook directed to the study of the concept of function through investigative tasks.

Key-words: Function. Mathematical Research. Elementary School. Mathematics Education.

1 Introdução

O Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) do Estado do Paraná propicia a formação continuada aos professores da rede pública estadual. Propõe um conjunto de atividades articuladas com a intenção de garantir uma formação do professor compatível com o nível de qualidade desejado para a educação pública no estado do Paraná.

De acordo com os princípios político-pedagógicos do PDE, o professor é entendido como “um sujeito que aprende e ensina na relação com o mundo e na relação com outros homens, portanto, num processo de Formação Continuada construída socialmente” (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ, 2007, p. 13).

O objetivo do programa é de proporcionar aos professores da rede pública estadual subsídios teórico-metodológicos para o desenvolvimento de ações educacionais sistematizadas para que haja um redimensionamento de sua prática, pois demonstra preocupação com a formação permanente do professor e com o aprendizado de nossos educandos e também prevê avanços na carreira do professor participante.

O professor PDE junto às Instituições Públicas de Ensino Superior, inicia suas atividades elaborando um plano de trabalho com o auxilio de seu orientador,

obtendo assim qualificação profissional diferenciada afim de complementar sua formação, por meio de estudos orientados pelas Universidades Públicas do Paraná, de produções acadêmicas, da elaboração de material didático a ser utilizado nas escolas públicas do Estado, de apresentação de propostas pedagógicas de intervenção nessas escolas e pelo trabalho virtual dos professores PDE com os demais professores da rede pública estadual.

As atividades, de acordo com o Documento Síntese (SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ, 2007), que apresenta as ações e os princípios político-pedagógicos que norteiam o Programa se baseiam em:

a) estudos orientados: compreendidos como momentos de formação do professor PDE e de fundamentação de sua proposta de trabalho;
b) elaboração de material didático: o professor PDE, produz um material pedagógico pertinente ao seu objeto de estudo com o acompanhamento de seu orientador e a colaboração dos Grupos de Trabalho em Rede;
c) orientações aos Grupos de Trabalho em Rede: o professor PDE atua como orientador de um grupo de professores da rede pública estadual da mesma área de atuação, socializando os conhecimentos apreendidos durante o programa, propondo reflexões e discussões;
d) objeto de estudo e proposta de intervenção na escola: partem de uma problemática identificada pelo professor PDE em sua disciplina/área de atuação, discuti com seu orientador suas idéias sobre o seu objeto de estudo, a proposta de intervenção na realidade escolar, o referencial teórico de que necessita e os encaminhamentos metodológicos para que as ações previstas no Plano de Trabalho aconteçam.

Como professora, participante do programa PDE, tive a oportunidade de avançar no conhecimento de novas metodologias e estratégias e também pude fazer reflexões que me fizeram modificar minha prática, proporcionando a meus alunos aulas mais interessantes e participativas.

Nas minhas aulas, sempre que introduzia o conteúdo de Função, sentia-me insatisfeita com o resultado, pois via a dificuldade que os alunos tinham em entender.

O PDE deu oportunidades para que eu pudesse refletir e conhecer novas metodologias e estratégias para desenvolver o conteúdo de funções partindo da realidade dos alunos. Desenvolvi então um Plano de Intervenção, constituído de

onze tarefas, em que parti de situações do cotidiano do aluno, algumas das tarefas do referido plano (1 e 7) será relatada neste artigo.

2 História do Conceito de Função

É fácil constatarmos a presença e a importância da Matemática na vida da sociedade do mundo todo. A Matemática tem sua história e, por meio dessa história é que percebemos que desde o início dos tempos haviam muitos matemáticos que deram grandes contribuições para os avanços do mundo atual.

A Matemática é utilizada pelo homem desde a antiguidade para facilitar sua vida e organizar a sociedade. A história mostra que por volta de 2000 a.C.,os babilônios, acumulavam registros do que hoje pode ser classificado como álgebra elementar e segundo Oliveira (1997) eles fizeram tabelas de quadrados e de raízes quadradas, de cubos e de raízes cúbicas mostrando o “instinto funcional”. Entre os gregos destaca-se Ptolomeu que desenvolveu idéias funcionais em astronomia. Os Pitagóricos estabeleceram relações entre grandezas físicas na descoberta de algumas leis da acústica e com eles apareceram as primeiras discussões sobre o importante papel da matemática no ensino e na formação do indivíduo.

Foi no século XVII que o conceito de função aparece como objeto de estudo, quando o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) relacionando a álgebra com a geometria, criou o plano cartesiano.

Segundo Kline (1989 apud MENDES 1994), destaca-se também neste século:

- Isaac Newton (1642-1727), acredita-se que a maior contribuição de Newton dentro do conceito de função deve-se as suas descobertas sobre as séries de potências. É Newton também que introduziu o termo “variável independente”.
- Gottfried Leibniz (1646-1716), usou a palavra “função” para representar quantidades que dependem de uma variável.
- Jackob Bernouli (1654-1705), usou a palavra função como quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva na revista Acta Eruditorum (outubro, 1694).

- James Gregory, conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: “Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades a, b,... se x resulta de a, b,... pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável.”(p.27)
- Leonhard Euler (1707-1783), introduziu o símbolo f(x) e no segundo volume de Introduction in Analysin Infinitorum diferenciou as funções contínuas e descontínuas considerando a lei de formação de cada uma.
- Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783) foi um dos primeiros a entender a importância de funções e o conceito de limites para o cálculo, e também abriu caminho o uso de equações diferenciais na Física.
- Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) definiu função em sua obra Théorie de functions Analytiques (1797), da seguinte maneira:

> Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos os valores dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas (MENDES, 1994, p.37).

Depois em sua obra Lecons sur le calcul des fuctions (1806) aprimora o conceito: “Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo” (MENDES, 1994, p.37).

A noção de função sofreu várias alterações ao longo da história, com seu final no século XIX.

Segundo Boyer (1989, p. 405) em 1837, Peter Gustav Lejune Dirichet (1805-1859) definiu função como:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então disse que y é função da variável independente x.

O matemático russo Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856), deu a seguinte definição para função:

> A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x. O valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida (YOUSCHKEVITCH, 1976, p.77, apud MENDES, 1994, p. 46).

Nicolas Bourbaki (1968) em Theórie dês Ensembles conceituou função de duas maneiras:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x E, existe um e somente um elemento y F que esteja associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x E o elemento y F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (MENDES, 1994, p.53).
> E:
> Um certo subconjunto do produto cartesiano AxB (MENDES, 1994, p.54).

Caraça (1951) refere que “uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a procura de regularidades dos fenômenos naturais” (p. 112).

O conceito de função é visto como uma das ferramentas para a compreensão de certos fenômenos e a representação dos mesmos. Esses fenômenos não ocorrem isoladamente, mas existe uma interdependência, isto é, o resultado de uma situação depende do resultado de um fenômeno anterior.

Segundo Caraça (2005, p. 103-104):

> A realidade que a inteligência dos homens se esforça por compreender, o Mundo, no seu sentido mais largo, apresenta-se com duas características essenciais: 1- Interdependência. Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda essa realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros. [...] 2 - Fluência. O Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo flui, tudo devém. [...] De modo que, do extremo superior da escala, do movimento prodigioso da expansão do Universo, ao movimento, não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo, tudo flui, tudo devém, tudo é, a todo o momento, uma coisa nova.

3 Explorando Algumas Ideias em Relação à Investigação Matemática e o Ensino de Funções

O conceito de Função é de grande importância no ensino da Matemática. Essa importância está relacionada ao longo da história das ciências, no estudo dos fenômenos.

O aluno, muitas vezes, não percebe que as funções estão presentes no seu cotidiano e nas diversas áreas do conhecimento, como na Matemática, na Física, na Química, na Biologia e em outras ciências.

Conforme as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008), no Ensino Fundamental, na abordagem do Conteúdo Estruturante das Funções, é necessário que o aluno elabore o conhecimento da relação de dependência entre duas grandezas, é importante que ele compreenda a estreita relação entre as funções e a álgebra, o que permite a soluções de problemas que envolvem números não conhecidos.

O aluno do Ensino Fundamental deve conhecer as relações entre variável independente e dependente, os valores numéricos de uma função, a representação gráfica das funções afim e quadrática, perceber a diferença entre função crescente e decrescente. Uma maneira de favorecer a construção de tais conhecimentos é a utilização de situações-problema (PARANÁ, 2008, p.59).

O conceito de função é usado em muitos momentos do nosso cotidiano, como por exemplo: o valor da conta de luz depende da energia gasta; o valor da impressão de um trabalho depende do número de páginas copiadas; o tempo que gastamos para fazer uma viagem depende, entre outras coisas, da distância percorrida; o perímetro de um quadrado depende da medida de seus lados. Dessa maneira pode ser mais fácil o aluno compreender esse conceito, pois são situações que fazem parte do seu dia-a-dia. O aprendizado do aluno, muito depende da criatividade do professor, buscando tarefas que sejam interessantes e que estejam de acordo com o seu contexto social. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002, p.121):

> A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas.

Em alguns casos a primeira abordagem ao estudo de Funções prende-se com a análise de exemplos de correspondências entre conjuntos ou, simplesmente, com a introdução em abstrato, da definição de Função, de um modo mais ou menos formal. Willoughby (1997) considera que esta forma de iniciar o estudo das Funções é uma das razões pelas quais muitos alunos manifestam, mais tarde, dificuldades no domínio deste conceito. Driscoll (1999) defende que o trabalho com padrões pode preparar a aprendizagem das relações funcionais e constituir uma base para a construção do conceito de função.

Blanton e Kaput (2005), falam da importância do estudo das funções no desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim para que os alunos desenvolvam o pensamento algébrico no estudo das funções, devem trabalhar desde cedo com relações que envolvam variáveis, recorrendo à identificação de padrões e regularidades; até a utilização de diversas formas de representação; e aos processos de particularização e generalização.

Para Ponte (2005), a procura de padrões e regularidades e a formulação de generalizações em diversas situações devem fomentar-se desde os primeiros anos do ensino básico.

A noção de padrão é de tal forma importante, nomeadamente em campos como a Aritmética ou a Geometria, que autores como Devlin (2002) a têm associado à própria natureza da Matemática, designando-a como “ciência dos padrões”.

O documento *A Matemática na Educação Básica* (ABRANTES, SERRAZINA; OLIVEIRA) realça que “o trabalho com padrões generalizáveis pode ajudar a desenvolver a idéia de relação funcional” (p. 112).

No estudo de funções existe a necessidade de compreender o modo como duas variáveis se relacionam, com o objetivo de conseguir explicitar uma relação funcional. Este processo baseia-se, essencialmente, na exploração de padrões e regularidades a partir de um certo conjunto de dados em análise.

Segundo Trigueros e Ursini (1997), lidar com cada um dos diferentes usos das variáveis implica ser capaz de:

(i) reconhecer o seu papel numa dada situação;

(ii) operar com a variável, e

(iii) usar na simbolização de uma situação problemática.

Trigueros e Ursini (2003) afirmam que compreender o conceito de variável como incógnita implica em reconhecer e identificar numa situação problemática a presença de algo desconhecido que possa ser determinado considerando as restrições do problema; reconhecer o símbolo que aparece na equação como um objeto que representa valores específicos que possam ser determinados tendo em conta as restrições dadas; ser capaz de substituir na variável o valor ou valores que façam com que a equação seja uma afirmação verdadeira; determinar a quantidade desconhecida que aparece nas equações ou problemas efetuando as operações algébricas e/ou aritméticas; e identificar a quantidade desconhecida numa situação específica e ser capaz de a simbolizar numa equação (URSINI; TRIGUEROS, 1997, p. 255).

Em nossa prática pedagógica, muitas vezes nos perguntamos, o porquê de tanta dificuldade de aprendizagem por parte de nossos alunos.

Para Rodriguez:

> [...] a causa deste fracasso tem sido atribuída aos alunos, o que levou os professores a procurarem diversas estratégias e alternativas metodológicas que motivassem e facilitassem a compreensão dos conteúdos. No entanto, esta procura tem provocado a conscientização da influência de uma base teórica para fundamentar a prática, pois ainda observamos professores de matemática com posturas e rigores científicos, supervalorizando a memorização de conceitos e, principalmente, o domínio de classe (1993, p.83).

Com o intuito de que o educando possa compreender o conceito de Função, enxerguei nas tarefas investigativas uma possibilidade de desenvolver um trabalho em que o aluno é chamado a agir como matemático, formulando conjecturas sobre o que está sendo investigado. Além do mais, de acordo com Ponte (2005), numa investigação Matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas, a partir delas se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas e, ao requerer a participação

ativa do aluno na própria formulação das questões a serem estudadas faz-se com que ele se envolva mais na aprendizagem.

> Seguramente, o avanço de um educando em direção a um conhecimento maior do conceito de função deverá levá-lo a uma compreensão melhor de seu dia a dia, disponibilizando-lhe ferramentas úteis ao exercício de sua cidadania como, por exemplo, o reconhecimento de variáveis em situações do cotidiano e o estabelecimento de relações entre elas. Esse alcance confere ao referido conteúdo uma relevância incontestável na matemática escolar (BRAGA, 2006, p. 52).

A Investigação Matemática é uma alternativa metodológica que pode conduzir o aluno a construir seu próprio conhecimento. É uma maneira de ensinar e aprender matemática em que deve ser respeitado o conhecimento do aluno e os problemas apresentados são formulados a partir da sua realidade ou de algo que tenha significado para o aluno. Numa aula de investigação cabe ao professor:

- preparar atividades ricas que façam com que os alunos estabeleçam suas próprias conjecturas;
- propor a tarefa;
- ajudar o aluno a compreender o significado de investigar e aprender a fazê-lo;
- fazer com que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e o que é esperado deles no desenvolvimento da mesma;
- regular o desenvolvimento da tarefa;
- avaliar os resultados;
- incentivar e dar autonomia a seus alunos e
- intervir quando for necessário.

Santos (2002) considera importante que os alunos tenham oportunidades de fazer Matemática, particularmente por meio do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória vivendo, ao seu nível de maturidade, uma experiência com características idênticas à dos matemáticos profissionais.

Nesta abordagem, em que as tarefas de exploração e investigação têm um papel de destaque, o conhecimento é construído pelos alunos a partir das tarefas que lhes são propostas e pela discussão que fazem do seu trabalho. Isto contrasta claramente com as abordagens em que o conhecimento é apresentado de forma já

sistematizada pelo professor, cabendo aos alunos depois memorizá-lo através da prática repetitiva de exercícios (PONTE, 2005).

A investigação que se tem realizado na sala de aula relativamente à natureza das tarefas tem sublinhado o interesse de uma abordagem de cunho exploratório e investigativo no ensino da Matemática (APM, 1988; PONTE, 2007).

Existe, por vezes, a idéia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.26).

4 Desenvolvimento

Primeiro Momento:

Diante da dificuldade dos alunos em compreender o conceito de função, resolvi mudar a minha maneira de abordar este conteúdo. Então pensei em trabalhar com coisas que fizessem parte do cotidiano dos alunos, porque a maneira como os livros didáticos introduzem esse conteúdo é muito distante da realidade deles. Então pedi que trouxessem a conta de energia elétrica de suas casas, que se organizassem em grupos de quatro e que discutissem o valor a ser pago por cada um, a tarefa seguinte seria entender o porquê desse valor. No final seriam feitas comparações entre o grupo.

Logo começaram a interagir e fazer descobertas. A minha intenção era que identificassem a relação existente entre as duas grandezas (preço pago e o nº de kw/h gasto). Fiquei andando pela sala e observando a conversa deles. Quando terminaram de analisar suas contas, pedi que um representante de cada grupo viesse à frente e falasse para toda sala a conclusão que seu grupo chegou.

O representante do grupo A disse que chegaram à conclusão que quanto mais kW/h gasto, maior o valor a ser pago.

O representante do grupo B disse que chegaram à mesma conclusão.

O representante do grupo C disse que pensaram da mesma forma só que concluíram também que as duas grandezas são diretamente proporcionais.

Eu fiquei surpresa e percebi que estavam fazendo mais descobertas, então perguntei se outras equipes haviam descoberto mais alguma, pois eu ainda não estava satisfeita.

Bruna[3] comentou que na casa da Júlia o valor pago pela energia utilizada é menor porque lá só moram três pessoas.

Então perguntei à sala: será que isso acontece em todas as casas?

Marcos respondeu que não, pois na casa dele eram cinco pessoas e o valor que pagavam era menor que o valor pago na casa do Ivan que tinha três pessoas.

Então perguntei a Marcos se ele tinha idéia do porquê acontecia isso.

Ele respondeu que à noite só deixam uma luz acesa e que o banho teria que ser bem rápido senão o pai e a mãe ficavam bravos.

Perguntei ao Ivan como era na casa dele e ele respondeu que sempre ficavam várias luzes acesas e que os pais não se incomodavam com o tempo de banho.

Pedro logo disse que para gastarmos menos temos que economizar energia evitando desperdício.

Carla completou dizendo que devemos ter consciência disso e economizar.

Muito bem, disse a eles. Vocês devem informar isso à família de vocês, pois se cada um fizer sua parte o consumo de energia vai ser bem menor e estaremos ajudando nosso planeta.

Logo em seguida, pedi que observassem os menores valores das contas entre o grupo e o número de kw/h gasto.

Giovana falou que observaram que na conta da casa de Felipe o valor cobrado foi o mesmo da conta da casa dela e que na dele o número de kW/h gasto era menor.

Depois disso, outros observaram que o que gastou 27 kw/h pagou 10,47 reais, o que gastou 29 kw/h pagou 10,47 reais e quem gastou 30 kw/h também pagou 10,47 reais.

Liane comentou: Então que quem gasta até 30 kw/h paga o valor mínimo.

Muito bem, eu disse. E daí, já exploraram tudo que poderiam ou tem mais?

---

[3] Os nomes dados aos alunos neste relato são fictícios.

Foi quando Pedro disse: Professora, o valor a ser pago depende do número de kw/h gasto. Neste momento fiquei muito satisfeita e disse: Isso mesmo Pedro, você falou a palavrinha que eu queria ouvir: depende. Uma grandeza depende da outra. Neste momento aproveitei para falar de função, dizendo que o valor a ser pago é dado em função do número de kw/h gasto.

Fiquei muito feliz por ver que eles exploraram a conta de energia elétrica e dali tiraram muitas coisas para o dia-a-dia deles e a relação de dependência entre duas grandezas o que os levariam mais facilmente ao conceito de função.

Segundo Momento:

Depois de ter feito o trabalho com a conta de energia elétrica com os alunos e ver que eles conseguiram perceber a relação de dependência entre as variáveis, propus a eles onze tarefas investigativas baseadas na exploração de padrões e regularidades com a finalidade de formar alunos capazes de desenvolver habilidades, construir conceitos matemáticos, compreender e executar algoritmos. E, consequentemente, solucionar problemas que envolvem funções afim e quadrática de contexto científico e nas diversas situações do seu cotidiano, tirando suas próprias conclusões sobre a conceituação de função.

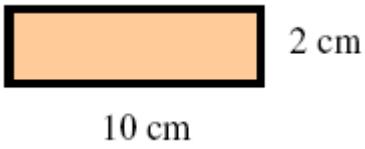
O meu trabalho durante a realização das tarefas foi de observar os alunos, andando pela sala, esclarecendo as dúvidas quando necessário, colocando questões para clarificar suas respostas e que pudessem assim argumentar sobre suas posições, explicar as estratégias utilizadas e justificar suas conclusões. Quando surgiam dúvidas, eu as colocava para toda a turma tentando fazê-los refletir. Depois de realizada cada tarefa foi feito uma apresentação em que os alunos puderam partilhar suas estratégias e discutir sobre elas. Para a apresentação deste artigo escolhi as tarefas 1 e 7 do caderno pedagógico que elaborei.

TAREFA 1: Um velho problema de otimização, de Euclides[4]

Observe o retângulo abaixo:

[4] Retirada de: O Desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções – uma experiência com alunos do ensino secundário. Autora: Arminda Branquinho Godinho de Azevedo. Mestrado em Educação. Área de especialização em Didática da Matemática – 2009.

1.1. Calcule a área e o perímetro do retângulo:



1.2. Indique possíveis dimensões para retângulos com o mesmo perímetro e determine a área de cada um deles.

1.3. Investigue: De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual será o que tem maior área?

Para realizar esta tarefa os alunos formaram grupo de quatro. Eles não tiveram dificuldades em encontrar o perímetro e a área do retângulo dado na questão 1, mas percebi que alguns deram a resposta em centímetros para o perímetro e para a área. Então dei uma breve explicação e eles entenderam a diferença.

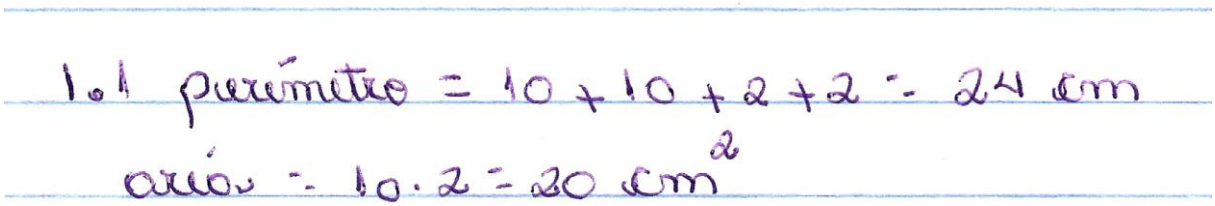


Figura 01
Fonte: Arquivo pessoal

Na questão 2, entreguei a eles uma folha de papel quadriculado e pedi que representassem os retângulos com dimensões em que o perímetro dava 24 cm, por meio de desenhos, conforme a medida dos lados. Fui observando e percebi que faltava um. Como já estávamos no final da aula, pedi a eles que fizessem uma pesquisa sobre o quadrado e o retângulo e que na aula seguinte continuaríamos a falar sobre a atividade proposta.

Quase todos fizeram a pesquisa e viram que o quadrado também é um retângulo e que então também havia um retângulo de lado 6x6 e chegaram à conclusão que este tem a maior área.

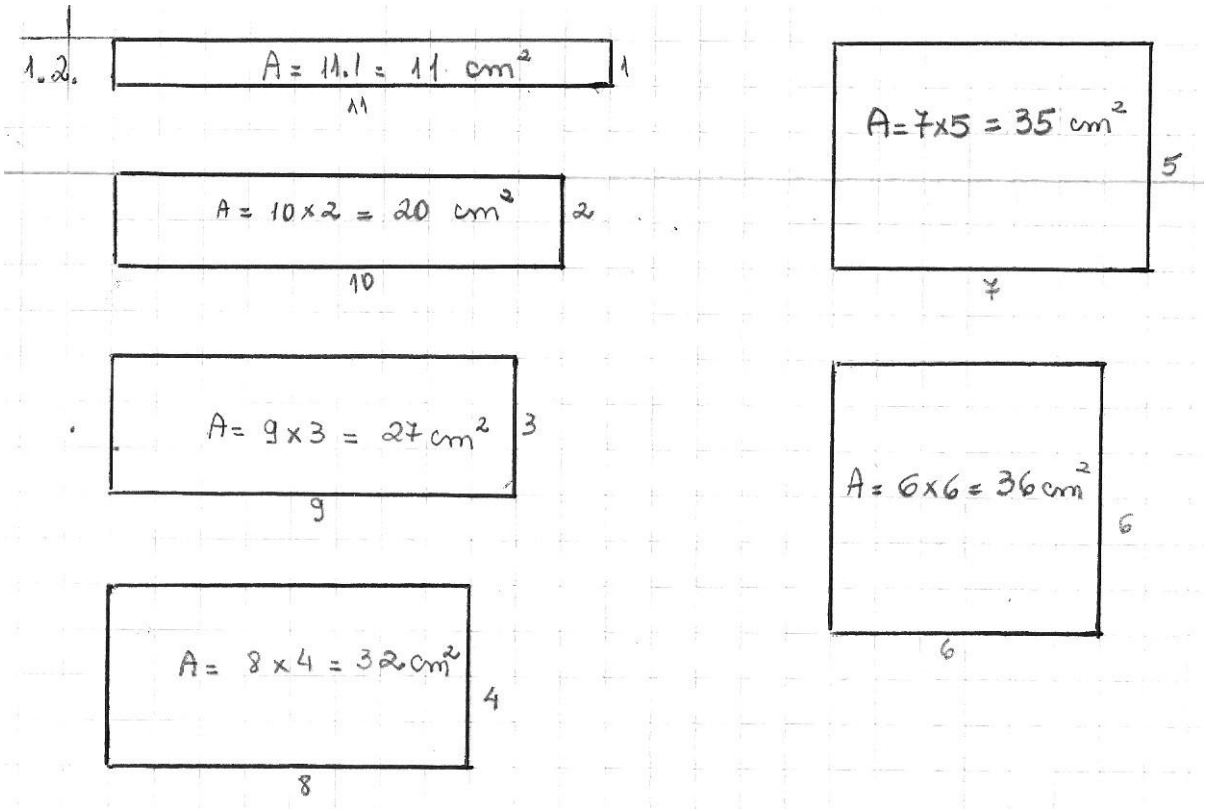


Figura 02
Fonte: Arquivo pessoal

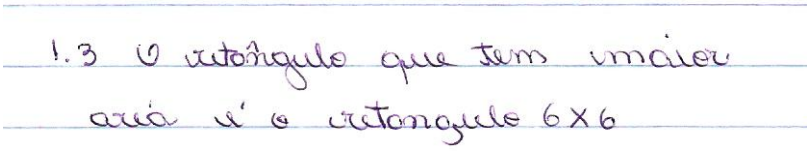


Figura 03
Fonte: Arquivo pessoal

Perguntei a eles se havia alguma relação entre o perímetro e a área dos retângulos e o representante de um dos grupos disse que tanto o perímetro como a área de cada retângulo varia conforme o valor dos lados. Aproveitei o momento para falar de função mostrando que o perímetro e a área de cada retângulo é dado em função dos lados.

Pedi a eles que observassem os lados dos retângulos encontrados e verificassem o que acontece com o lado maior e o menor encontrados e alguns disseram que o lado maior é 11 cm e o lado menor é 1 cm. Então perguntei se todos concordavam com eles e um aluno disse que o lado maior poderia ser 11,5 cm e o lado menor igual a 0,5 cm, todos concordaram com ele. Depois disso começaram a

falar de outras dimensões. Perguntei se um dos lados poderia ser zero e disseram que não, pois não seria um retângulo, então mostrei que o lado menor é maior que zero e menor ou igual a 6 e que chamando de x o lado menor poderia representar como: $0 < x \leq 6$ 0. Em seguida, pedi para pensarem sobre o lado maior, após discutirem alguns chegaram à conclusão que o lado maior seria maior ou igual a 6 e menor que doze, representando por: $6 \leq x < 12$.

Perguntei se viam alguma relação entre o lado menor e o maior de cada retângulo e depois de algum tempo uma aluna disse que quando o valor do lado menor é 1 o maior é 11, quando o menor é 2 o maior é 10, quando o menor é 3 o maior é 9, quando o menor é 4 o maior é 8, quando o menor é 5 o maior é 7 e quando o menor é 6 o maior é também 6 e que a soma dos dois sempre dava 12. Fiquei muito satisfeita com a observação da aluna e então pedi que observassem o que acontecia com o lado maior quando ia aumentando o valor do lado menor e eles disseram que o valor do lado maior diminuía. Disse a eles que escrevessem uma expressão que representasse o lado maior em função do lado menor e, com alguma ajuda minha, alguns expressaram como

y = 12 – x em que y = lado maior e x = lado menor

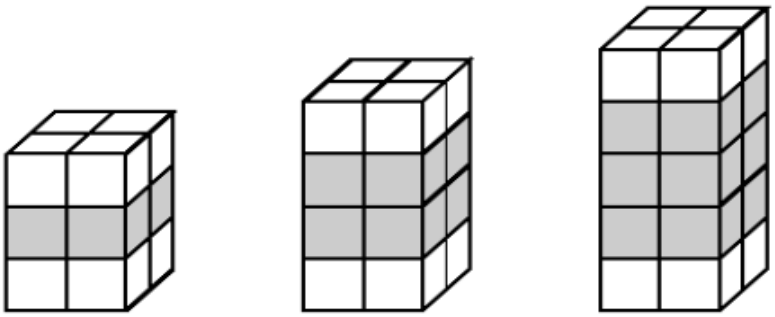
e outros não conseguiram encontrar a expressão. Pedi que um aluno que tivesse encontrado a expressão viesse ao quadro e mostrasse o que tinha feito e ele foi substituindo o valor do lado menor dos retângulos encontrados mostrando aos outros que chegava-se ao valor do lado maior em todos os casos.

Nesta tarefa percebi um grande interesse por parte da maioria dos alunos que cada vez mais foram se envolvendo e chegando à compreensão em representar uma função algebricamente.

TAREFA 7:[5]

A seguinte sequência apresenta prismas constituídos por cubos brancos e cinzentos.

[5] Retirado de: Estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico. Autora: Neusa Cristina Vicente Branco. Mestrado em Educação. Área de Especialização em Didática da Matemática - 2008



Prisma 1 Prisma 2 Prisma 3

a) Quantos cubos brancos tem o prisma 4? E cinzentos?

b) Verifique se existe um prisma com 36 cubos no total. Caso exista, diga qual o número desse prisma.

c) Indique uma fórmula que represente o número de cubos cinzentos do prisma *n*.

d) Apresente uma fórmula para o número total de cubos do prisma *n*.

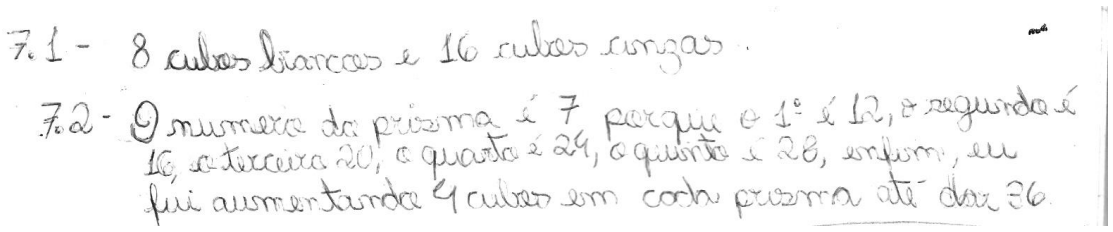
e) Verifique se a fórmula $4(n + 2)$ também representa o número total de cubos do prisma *n*. Justifique a sua resposta.

Nesta tarefa, os alunos exploraram a sequência de prismas, reunidos em grupos de quatro e depois disso socializaram suas idéias com toda a sala.

A maioria deles observou que o número de cubos brancos é sempre o mesmo, pois todos os prismas têm, na primeira e na última linha, quatro cubos brancos, totalizando oito cubos brancos em cada prisma.

Quanto aos cubos cinzentos, alguns alunos os relacionaram com a ordem da figura na sequência, isto é:

- no prisma 1, têm uma linha de cubos cinzentos, totalizando quatro,
- no prisma 2 têm duas linhas de cubos cinzentos, totalizando oito,
- no prisma 3 têm três linhas de cinzentos, totalizando doze.



7.1 - 8 cubos brancos e 16 cubos cinzas.

7.2 - O numero do prisma é 7 porque o 1º é 12, o segundo é 16, o terceiro 20, o quarto é 24, o quinto é 28, enfim, eu fui aumentando 4 cubos em cada prisma até dar 36.

Figura 04
Fonte: Arquivo pessoal

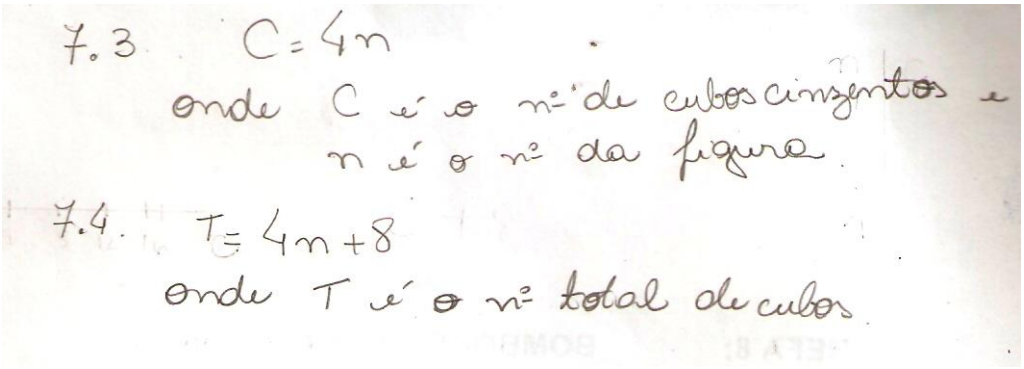
Mas estes alunos não conseguiram expressar o que falavam com uma fórmula matemática. Sabiam que existia uma relação entre cada figura e o número de cubos cinzentos, mas tinham dificuldades de identificar uma expressão que traduzisse esta relação. Havia dito a eles que usassem uma letra para representar os cubos cinzentos (C) e outra para representar a ordem da figura (n) e que observassem que n tem que pertencer ao conjunto dos números naturais e eles concordaram comigo, pois disseram que n não poderia ser um número negativo ou decimal.

Alguns disseram que o prisma 1 tem quatro cubos cinzentos, o prisma 2 tem o dobro do primeiro e que o prisma 3 tem o triplo do primeiro, mas também não conseguiram representar isso com uma expressão.

Outra parte dos alunos descreveram a sequência dizendo que o prisma 1 tem quatro cubos cinzentos isto é 4 x 1, o prisma 2 tem oito cubos cinzentos que é 4×2 e o prisma 3 tem doze cubos cinzentos que é 4 x 3 e encontraram a expressão C= 4.n, em que C representa o número de cubos cinzentos e n representa a ordem da figura. Neste momento um dos alunos lembrou-se do trabalho feito anteriormente com a conta de energia elétrica, dizendo que se o valor a ser pago dependia do número de kw/h gasto, então o número de cubos cinzentos depende da ordem dos prismas e outro aluno complementou dizendo que então o número de cubos cinzentos é dado em função da ordem do prisma.

Todos os alunos chegaram à conclusão que existe um prisma com 36 cubos no total e é o prisma 7. Alguns alunos relataram que à partir do prisma 1 que tem 12 cubos, foram acrescentando quatro cubos e chegaram no número de cubos desejado, mas esses não conseguiram representar isso com uma expressão.

Outros disseram que como todos os prismas têm oito cubos brancos e como os cubos cinzentos podem ser representados por C = 4.n, então o número total de cubos poderia ser representado por T = 8 + 4.n, Chamando de T o número total de cubos e relacionaram a expressão 4(n+2) como sendo a mesma encontrada por eles.



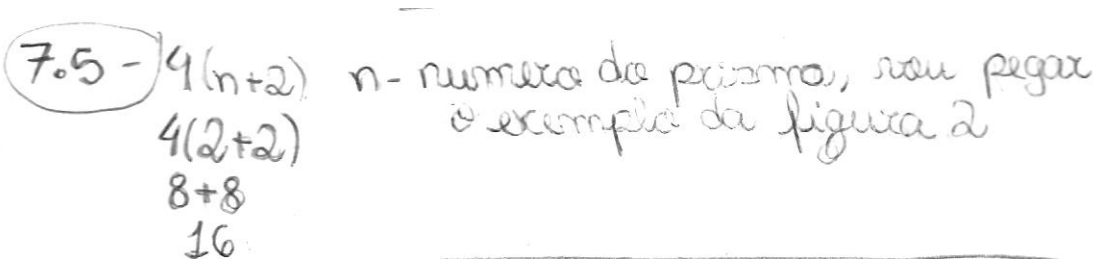
7.3 $C = 4n$

onde C é o nº de cubos cinzentos e n é o nº da figura.

7.4. $T = 4n + 8$

onde T é o nº total de cubos

Figura 05
Fonte: Arquivo pessoal



7.5 - $4(n+2)$ n - numero da prisma, vou pegar o exemplo da figura 2

$4(2+2)$

$8+8$

16

Figura 06
Fonte: Arquivo pessoal

Nesta tarefa verifiquei que os alunos conseguiram analisar sequências reconhecendo regularidades, identificando os cubos brancos, relacionando a ordem da figura com o número de cubos cinzentos e generalizando padrão por meio de expressão na linguagem algébrica.

Terceiro momento:

Depois da realização de todas as tarefas, fiz uma rápida revisão do sistema de coordenadas cartesianas e pedi a eles que copiassem as fórmulas que encontraram e que criassem situações diferentes com essas funções. Pedi que construíssem uma tabela e o gráfico de cada função. A maioria não teve dificuldade e os que não conseguiam tiveram a ajuda dos amigos do grupo. Depois disso pude falar de que tipo de função (afim ou quadrática) cada gráfico se referia e pudemos juntos explorar cada gráfico dando ênfase às definições e classificações.

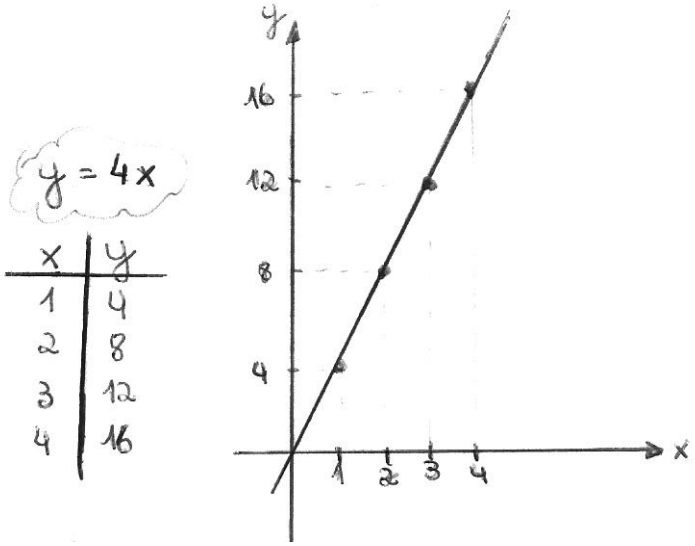


Figura 07
Fonte: Arquivo pessoal

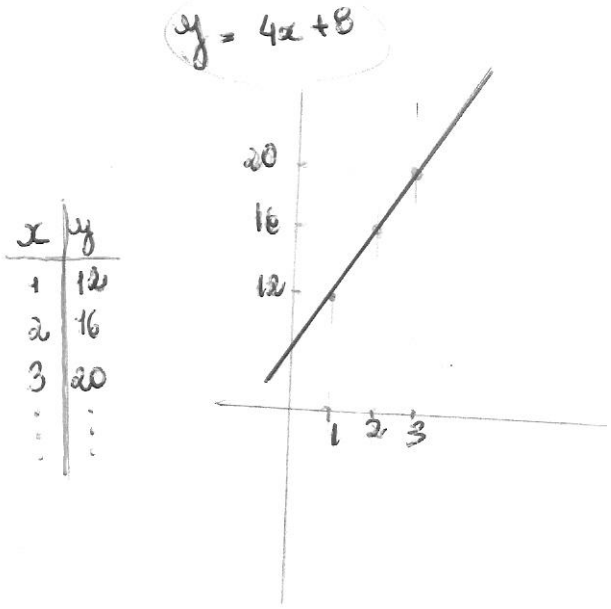


Figura 08
Fonte: Arquivo pessoal

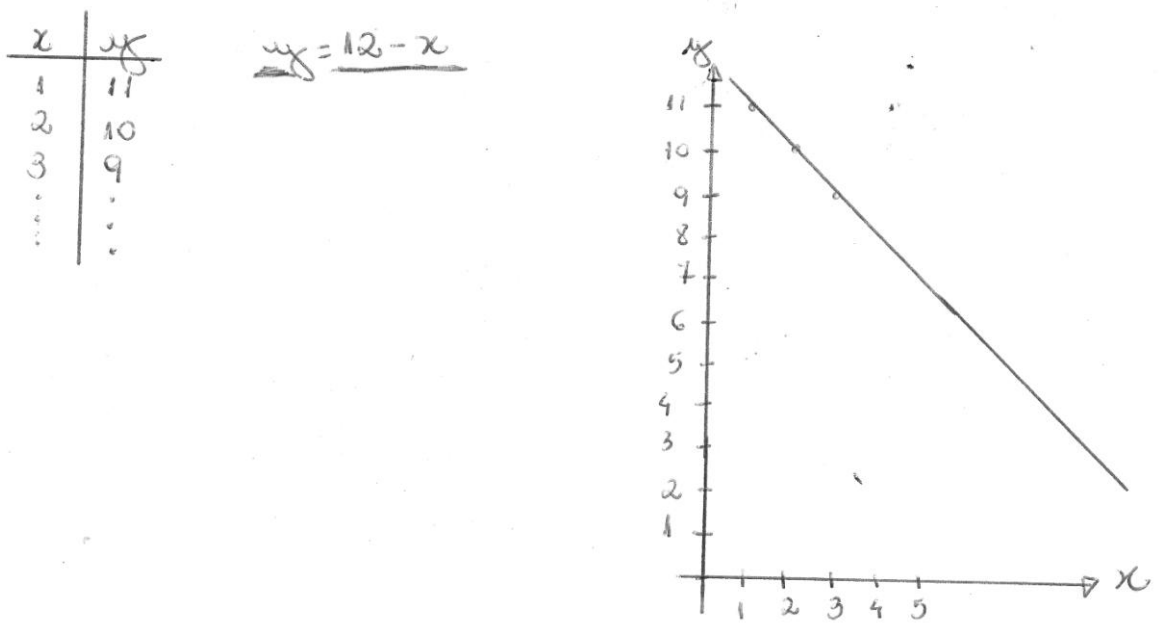


Figura 09
Fonte: Arquivo pessoal

5 Conclusão

A realização deste trabalho me deixou bastante satisfeita, pois considero que foi muito importante para mim e para meus alunos. Trabalhar com tarefas investigativas proporcionou um ambiente que envolveu os alunos, promovendo a troca de ideias, reflexão e descobertas que os levaram a desenvolver seu raciocínio matemático. Percebi que as tarefas contribuíram para uma maior motivação, pois houve um grande envolvimento dos alunos, proporcionando uma melhor compreensão de conceitos matemáticos, principalmente no conceito de função, já que na forma tradicional os alunos tinham grande dificuldade em compreender esse conceito. Percebi também que as tarefas de exploração na introdução do conceito de Função valorizam o ensino pela descoberta.

Os alunos mostraram uma boa interpretação das tarefas apresentadas. E o desempenho deles evoluiu claramente ao longo do trabalho, conseguiram generalizar as relações funcionais corretamente como também lidar com as várias representações algébrica, gráfica e numérica de funções, bem como com a

conversão entre elas, mostrando compreender em que situações é mais vantajosa cada uma delas.

Achei muito importante mostrar aos alunos por meio das tarefas, a utilidade de cada representação, como também a conversão das representações, pois isso os fez compreender melhor o conceito de função.

Trabalhar com funções desta maneira foi muito prazeroso para os alunos, que agindo como investigadores puderam tirar suas próprias conclusões e para mim como professora, pois percebi uma maior participação dos alunos e vontade de aprender e ensinar.

Fique muito interessada em saber a opinião de meus alunos quanto às tarefas investigativas e a maneira como o trabalho foi conduzido, em seus comentários mostraram que gostaram muito do trabalho em grupo, das tarefas diferenciadas que são muito interessantes, da condução delas e da socialização.

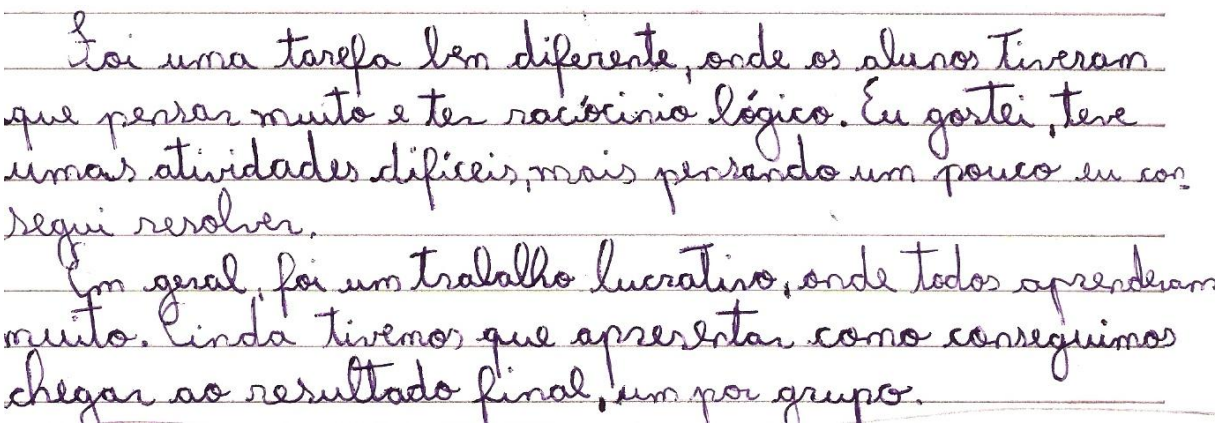

Foi uma tarefa bem diferente, onde os alunos tiveram que pensar muito e ter raciocínio lógico. Eu gostei, teve umas atividades difíceis, mais pensando um pouco eu consegui resolver.
Em geral, foi um trabalho lucrativo, onde todos aprenderam muito. Ainda tivemos que apresentar como conseguimos chegar ao resultado final, um por grupo.

Figura 10
Fonte: Arquivo pessoal

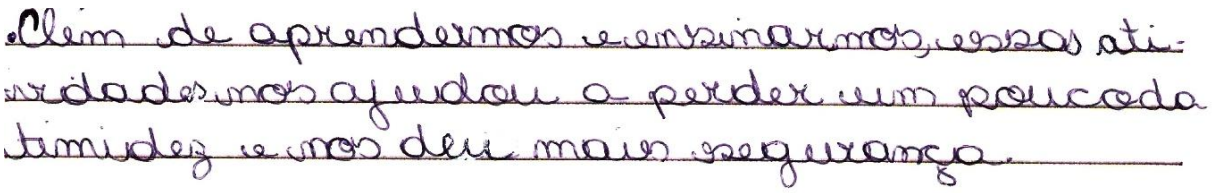
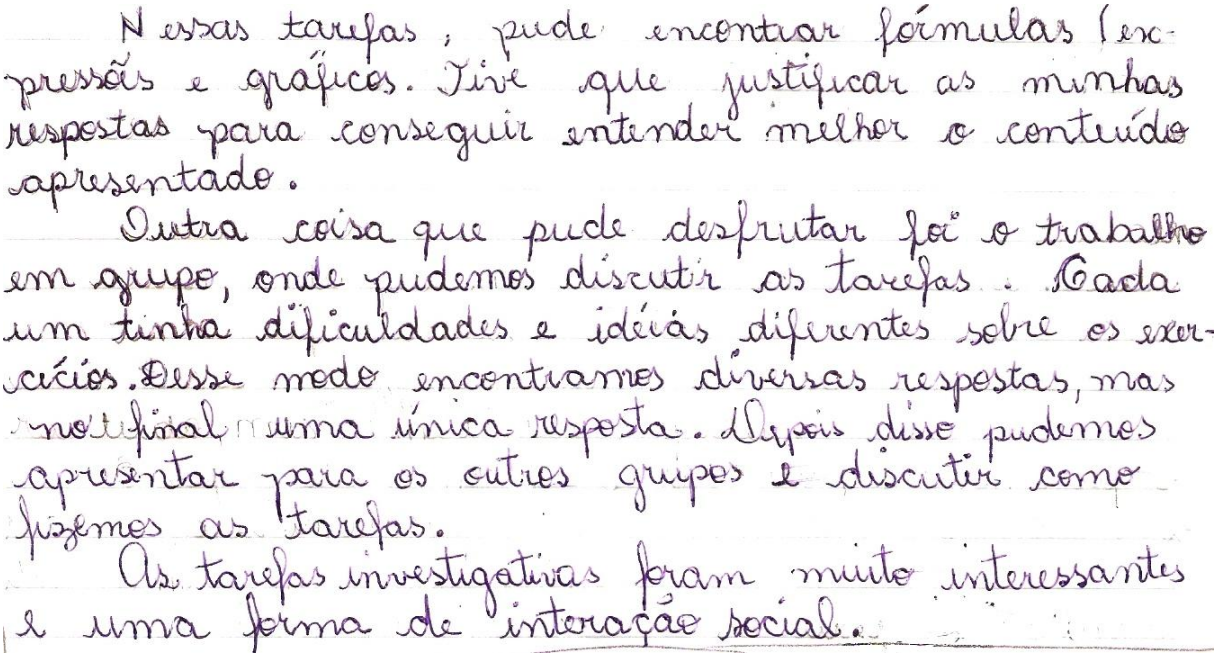

Além de aprendermos e ensinarmos, essas atividades nos ajudou a perder um pouco da timidez e nos deu mais segurança.

Figura 11
Fonte: Arquivo pessoal



Nessas tarefas, pude encontrar fórmulas (expressões e gráficos. Tive que justificar as minhas respostas para conseguir entender melhor o conteúdo apresentado.

Outra coisa que pude desfrutar foi o trabalho em grupo, onde pudemos discutir as tarefas. Cada um tinha dificuldades e idéias diferentes sobre os exercícios. Desse modo encontramos diversas respostas, mas no final uma única resposta. Depois disso pudemos apresentar para os outros grupos e discutir como fizemos as tarefas.

As tarefas investigativas foram muito interessantes e uma forma de interação social.

Figura 12
Fonte: Arquivo pessoal

Este trabalho me proporcionou também fazer uma reflexão da minha prática profissional, contribuindo para meu desenvolvimento profissional e repensar os métodos de ensino, sobretudo no que se refere às tarefas de investigação, pois elas vão além de simples cálculos ou memorização de definições.

Referências Bibliográficas

ABRANTES, P., SERRAZINA, L., & OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**. Lisboa: Ministério da Educação, 1999.

APM. **Renovação do currículo de matemática**. Lisboa: APM, 1988.

AZEVEDO, Arminda Branquinho Godinho de. **O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções** - Uma experiência com alunos do ensino secundário. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação. Área de especialização em Didática da Matemática), Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências. 2009.

BLANTON, M., & KAPUT, J. Characterising a classroom practice that promotes algebraicreasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, 36(5), 412-446, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRAGA, Ciro. **Função** – a alma do ensino da matemática. São Paulo: Annablume; FAFESP, 2006.

BRANCO, Neusa Cristina Vicente. **Estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação. Área de Especialização em Didática da Matemática), Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.

_____. **Conceitos fundamentais da matemática**. 6. ed. Lisboa: Gradiva, 2005.

DEVLIN, K. **Matemática**: a ciência dos padrões. Porto: Porto, 2002.

DRISCOLL, M. **Fostering algebraic thinking:** a guide for teachers, grades 6-10. Portsmouth: Heinemann, 1999.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1990.

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O conceito função:** aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1994.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 1997.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes curriculares da educação básica**. Paraná, 2008.

PONTE, J. P. Álgebra no currículo escolar. **Educação e matemática**, 85, p. 36-42, 2005.

PONTE, J. P., BROCARDO, J. & OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

_____. A aula de investigação. In:_____. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 25-53.

RODRIGUEZ, R. C. M. C. (Re)Construindo a matemática. In: _____. **Fazer pedagógico** – construções e perspectivas. Série Interinstitucional Universidade – Educação Básica. Ijuí-SC, p. 82-87, 1994.

SANTOS, L. et al. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: PONTE, J. P. et al. (Org.). **Actividades de Investigação**. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pp. 83-106, 2002.

TRIGUEROS, M. & URSINI, S. First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variables. In: SELDEN, A. et al. (Ed.) **CBMS issues in mathematics education,** Vol. 12, pp. 3-29, Providence: America Mathematical Society, 2003.

URSINI, S., & TRIGUEROS, M. Understanding of different uses of variable: a study with starting college students. In: PEHKONEN, E. (Ed.) **Proceedings of the 21st PME International Conference,** 4, p. 254-261, 1997.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of exact sciences***,* v. 16, n.1, p. 37-85, 1976.

WILLOUGHBY, S. S. Functions from kindergarten through sixth grade. **Teaching Children Mathematics**, 3(6), 314-319, 1997.