Versão Online ISBN 978-85-8015-053-7
Cadernos PDE

VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Produção Didático-Pedagógica

2009

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

GOVERNO DO PARANÁ
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
SUPERINTENDÊNCIA DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL – PDE

MARLENE IVANILDE GOMEDI

BUSCANDO A COMPREENSÃO E APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA EM SITUAÇÕES COTIDIANAS

IES: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA – UEL

ORIENTADOR: PROF. DR. NELSON FERNANDO INFORZATO

ÁREA CURRICULAR: MATEMÁTICA

Londrina
2010

MARLENE IVANILDE GOMEDI

BUSCANDO A COMPREENSÃO E APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA EM SITUAÇÕES COTIDIANAS

Proposta Didático-Pedagógica: Unidade Didática apresentada como uma das exigências do Programa de Desenvolvimento Educacional, da Secretaria de Estado da Educação do Estado do Paraná, realizado em parceria com a Universidade Estadual de Londrina.
Orientador: Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato.

Londrina

2010

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com o passar do tempo, percebe-se que cada vez mais é comum encontrarmos alunos com dificuldades relacionadas aos conteúdos de matemática com aplicações em situações reais, por exemplo, calcular os juros e o valor das prestações sobre produtos e serviços.

Certamente, os alunos não conseguem relacionar seu conhecimento matemático com aplicabilidade às suas próprias experiências. Diante disso, o professor se inquieta e tenta buscar novas práticas pedagógicas para melhorar a aprendizagem e aplicar os conhecimentos matemáticos adquiridos em situações reais, de modo a sanar as dificuldades apresentadas por eles.

Tendo em vista que a Matemática Financeira é aplicada nas transações bancárias e comerciais, desenvolver a sua aprendizagem com os alunos, é de suma relevância no que tange as relações de teoria e prática, pois muitos deles já se servem ou virão a se servir do sistema bancário e do comércio.

Percebemos que, após a estabilização da economia nacional em virtude do plano real, as pessoas passaram a adquirir financiamentos e empréstimos com maior frequência o que justificaria uma sólida aprendizagem e futura aplicação da Matemática Financeira.

Podemos mostrar os benefícios que teremos em conhecer, quase que na maioria, os juros exorbitantes que são cobrados pelas instituições financeiras, tanto para pagamentos de compras a prazo, quanto a empréstimos que muitas vezes somos obrigados a fazer devido a eventualidades que ocorrem em nossas vidas ou mesmo no meio em que estamos inseridos, seja por parte de familiares, amigos ou até mesmo, quando somos consultados por alguns de nossos alunos que estão com problemas semelhantes e nos procuram pedindo alguns conselhos ou explicações.

Um dos recursos pedagógicos que o professor pode utilizar para ensinar o conteúdo de juros e séries de pagamentos são situações do cotidiano articulados aos recursos tecnológicos disponíveis. Assim, poderá constituir na opção mais significativa para oportunizar atitudes reflexivas e de interação para o entendimento da teoria junto com a prática.

É comum nos envolvermos em situações como investimento em poupanças programadas, empréstimo, compra de bem de consumo a crédito e de imóvel financiado. Por isso, optamos pelo estudo das operações financeiras envolvendo rendas sejam elas para pagar uma dívida ou fazer uma poupança, enfatizando séries de pagamentos iguais com termos vencidos ou postecipados e séries de pagamentos iguais com termos antecipados no conceito de capitalização composta.

Dessa forma, podemos calcular o montante, as parcelas e os juros de situações referentes a investimento, empréstimo e bem financiado e também aprender o conceito de capitalização e amortização. Apresentamos alguns exemplos e deduzimos as fórmulas dos fatores em cada caso.

A capitalização consiste no ato de formar um capital por meio de investimento periódico com quantia fixa e taxa de juros fixa.

A amortização é o ato de saldar uma dívida por meio de parcelas periódicas, constantes ou não.

Para efetuar os cálculos referentes a investimento utilizamos de capitalização que tem como fatores: acumulação de capital e formação de capital; empréstimo e bem financiado, a amortização que são: valor atual e recuperação de capital. Estudamos esses fatores para séries de pagamentos postecipadas e antecipadas.

Refletir sobre as práticas cotidianas e tomar decisões, compreender e aplicar o conhecimento matemático envolvido nas operações financeiras por meio de situações do cotidiano poderá contribuir para a apreensão do conhecimento prático das transações financeiras.

Diante disso, será possível saber quanto que uma pessoa acumulará se aplicar uma quantia fixa na poupança por determinado período e, o valor da prestação que pagará ao adquirir um bem financiado em algumas prestações fixas.

Nesse sentido, a reflexão e a interação da teoria e prática, se fazem necessárias na Matemática Financeira. E a resolução de problemas relacionados ao cotidiano é o meio para buscar novos entendimentos e conhecimentos. Dessa forma, haverá situações de interações entre teoria e prática e vice versa. Com isso, a aprendizagem poderá desenvolver-se de forma prazerosa e interessante com a troca de experiências nas atividades propostas.

Assim concluímos que, ao aproximar a Matemática Financeira do cotidiano, almeja-se um resultado favorável no que se refere ao aproveitamento do aluno.

1. SÉRIES DE PAGAMENTOS IGUAIS COM TERMOS VENCIDOS OU POSTECIPADOS

Toda vez que o problema não mencionar o tipo de renda, consideraremos como sendo postecipada, pois esse é o tipo mais comum. O primeiro termo (parcela ou prestação) tem vencimento 30 dias após a assinatura do contrato.

Cada termo da série de pagamentos ou recebimentos iguais será representado por “P”, as demais variáveis serão representadas pelos símbolos já conhecidos:

i = taxa de juros, coerente com a unidade de tempo (mês, trimestre, ano etc.).

n = número de prestações quase sempre coincidentes com o número de períodos unitários

C = principal, capital inicial, valor atual ou valor presente.

M = montante ou valor futuro.

1.1 Fator de Acumulação de Capital (FAC)

Esse fator é utilizado quando do investimento por meio de parcelas constantes mensais, incidindo a mesma taxa. A primeira parcela deve ser aplicada 30 dias após a assinatura do contrato. Como é o exemplo que vamos demonstrar:

Determinar o valor do montante, no final do 5º mês, de uma série de 5 aplicações mensais, iguais e consecutivas, no valor de R$ 200,00 cada uma, a uma taxa de 1% ao mês, sabendo-se que a primeira parcela é aplicada no final do primeiro mês, ou seja, a 30 dias da data tomada como base ("momento zero"), e que a última, no final do 5º mês, é coincidente com o momento em que é pedido o montante.

Dados:

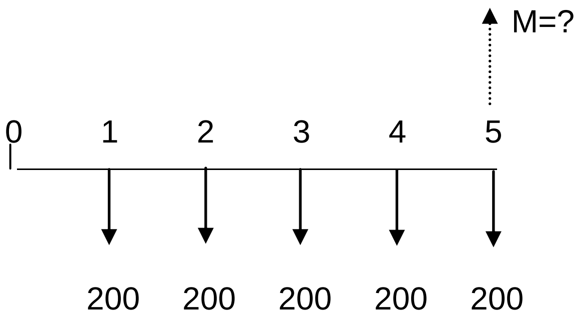
P= 200,00

n= 5

i= 1% ao mês

M= ?

Em termos de fluxo de caixa, o problema pode ser esquematizado como segue:

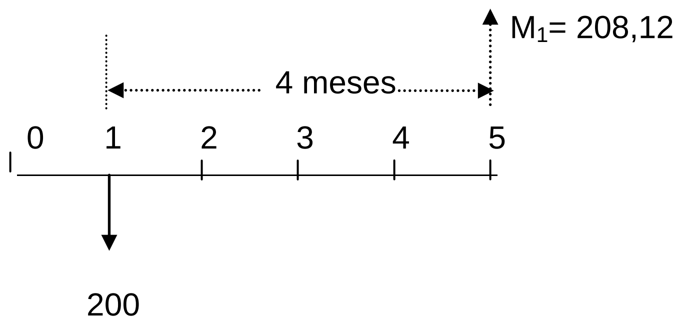


Para calcular o montante pedido, vamos utilizar somente os conhecimentos que já temos. Como apenas sabemos resolver problemas com um único pagamento, vamos calcular o montante de cada prestação no final do 5º mês, individualmente. Assim o montante da primeira, obtido da fórmula já conhecida $M = C(1 + i)^n$, será:

$M_1 = 200{,}00(1+0{,}01)^4 = 200{,}00 \times 1{,}040604 = 208{,}12$

O expoente 4 da expressão $(1{,}01)^4$ representa o número de meses a decorrer entre a data da primeira aplicação e a data fixada para o cálculo do seu montante.

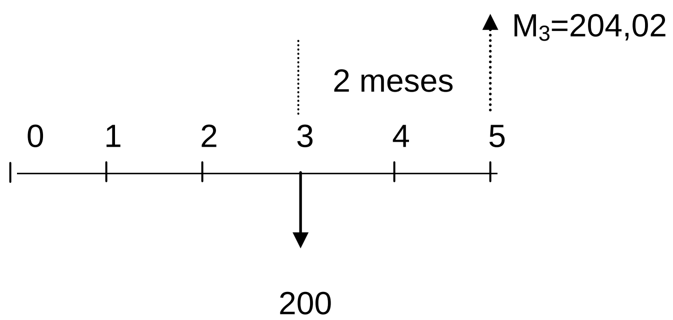
Esquematicamente, tem-se:



Essa mesma consideração é válida para todas as demais prestações. Assim o montante da terceira parcela é obtido como segue:

$M_3 = 200{,}00\ (1{,}01)^2 = 200{,}00 \times 1{,}0201 = 204{,}02$

Esquematicamente, temos:



Como a última parcela é aplicada exatamente no dia em que se pede o valor do montante, não terá rendimento algum. O montante dessa prestação pode ser assim especificado:

$M_5 = 200{,}00\ (1{,}01)^0 = 200{,}00 \times 1 = 200{,}00$

Em resumo, os montantes de cada uma das 5 aplicações são calculados como segue:

$M_1 = 200{,}00(1{,}01)^4 = 200{,}00 \times 1{,}040604 = 208{,}12$

$M_2 = 200{,}00(1{,}01)^3 = 200{,}00 \times 1{,}030031 = 206{,}06$

$M_3 = 200{,}00(1{,}01)^2 = 200{,}00 \times 1{,}020100 = 204{,}02$

$M_4 = 200{,}00(1{,}01)^1 = 200{,}00 \times 1{,}010000 = 202{,}00$

$M_5 = 200{,}00(1{,}01)^0 = 200{,}00 \times 1{,}000000 = 200{,}00$

M = ... = 1020,20

Portanto, o montante de cinco aplicações mensais, iguais e consecutivas, de R$ 200,00 cada uma à taxa de 1% ao mês, dentro do conceito de séries pagamentos com termos vencidos é de R$ 1 020,20.

Entretanto, o cálculo do montante, como foi feito, é muito trabalhoso. Se tivéssemos 20, 80 ou 120 prestações ele seria por demais monótonos e estafantes.

Com o objetivo de facilitar o trabalho vamos tentar aplicar uma fórmula que permita chegar ao valor final através de um caminho mais curto e rápido.

Sabemos que $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$

Substituindo M_1, M_2, ..,M_5 pelos seus respectivos valores sem se efetuarem os cálculos, temos:

$M = 200{,}00(1{,}01)^4 + 200{,}00(1{,}01)^3 + 200{,}00(1{,}01)^2 + 200{,}00(1{,}01)^1 + 200{,}00(1{,}01)^0$

ou

$M = 200{,}00(1{,}01)^0 + 200{,}00(1{,}01)^1 + 200{,}00(1{,}01)^2 + 200{,}00(1{,}01)^3 + 200{,}00(1{,}01)^4$

Como os termos da série representam a soma de uma progressão geométrica de razão (1,01), podemos aplicar a fórmula:

$$S_{PG} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$$

que dá a soma dos termos de uma PG, em que a_1 representa o primeiro termo da série no número de termos e a razão é q.

Sabendo-se que:

$a_1 = 200{,}00(1{,}01)^0$, $q = (1{,}01)$ e $n = 5$, temos:

$$M = \frac{200\,(1{,}01)^0\,(1{,}01)^5\ -\ 200\,(1{,}01)^0}{1{,}01 - 1}$$

$$M = \frac{200\,(1)\,(1{,}01)^5\ -\ 200\,(1)}{1{,}01 - 1}$$

Como *o* valor 200 é constante em todos os termos, pode ser colocado em evidência:

$$M = 200\,x\,\frac{(1{,}01)^5 - 1}{0{,}01 - 1} \qquad (1)$$

$$M = 200\,x\,\frac{0{,}05101}{0{,}01}$$

$$M = 200\,x\,5{,}101$$

$$M = 1020{,}20$$

Portanto, chegamos ao valor do montante correspondente à aplicação de 5 parcelas iguais sem calcular os montantes individuais.

Como no problema P= 200,00, n = 5 e i = (0,01), substituindo na expressão (1) os valores numéricos pelos seus símbolos correspondentes temos a fórmula genérica:

$$M = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (2)$$

Em que $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é o *<u>Fator de Acumulação de Capital</u>*, representado por FAC (i,n).

Portanto, a expressão (2) pode ser assim escrita: M = P $\times$ FAC (i,n).

1.2 Fator de Formação de Capital (FFC)

O Fator de Formação do Capital (FFC) é obtido facilmente a partir da fórmula do montante deduzida no item anterior:

$$M = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Essa fórmula, como vimos, é utilizada para obter o valor do montante, quando é conhecido o valor das prestações, a taxa e o número de prestações. Portanto, esse mesmo raciocínio serve para os casos em que conhecemos o montante e queremos obter a prestação mensal.

Quando a incógnita do problema é o valor das prestações, basta fazer:

$$P = \frac{M}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

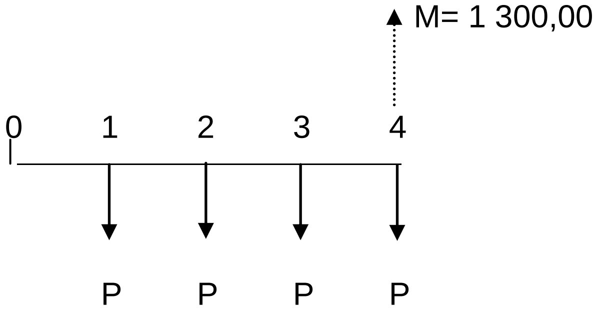
$$P = M \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \qquad (3)$$

Em que $\dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$ é o *Fator de Formação de Capital*, representado por FFC (i,n). Portanto, a expressão (3) pode ser assim escrita: P = M × FFC (i,n).

Vejamos um exemplo:

Qual o valor de cada parcela que uma pessoa deve investir durante 4 meses à taxa de 2% ao mês, para que o montante do seu capital seja de R$ 1 300,00?

Esquematicamente, temos:



Dados:

M= 1300,00

n= 4

i= 2% ao mês

P=?

Solução:

$$P = M x \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = 1300 \, x \, \frac{0{,}02}{(1+0{,}02)^4 - 1}$$

$$P = 1300 \, x \, \frac{0{,}02}{0{,}0824321}$$

$$P = 1300 \, x \, 0{,}2426239$$

$$P = 315{,}41$$

1.3 Fator de Valor Atual (FVA)

Esse fator é empregado quando da compra de um bem de consumo ou empréstimo, financiado por meio de prestações constantes mensais, incidindo a mesma taxa. A primeira prestação deve ser paga 30 dias após o ato do empréstimo.

Da mesma forma que deduzimos o Fator de Acumulação de Capital, vamos deduzir o Fator de Valor Atual para a série de pagamentos iguais ou uniformes. Partiremos do seguinte problema prático:

Uma loja anuncia um Celular que, financiado à taxa de 3% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 5 prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 200,00 cada uma. Qual o valor a ser financiado?

O que se quer é o valor presente dessa série de 5 parcelas iguais. Mais uma vez, utilizaremos as ferramentas que conhecemos para solucionar esse problema. Com relação a valor presente ou atual, somente sabemos resolver os casos com pagamentos simples, ou seja, aqueles que apresentam um único pagamento. Assim, vamos resolver o problema por partes, admitindo-se que cada prestação corresponda a um financiamento isolado.

Dados:

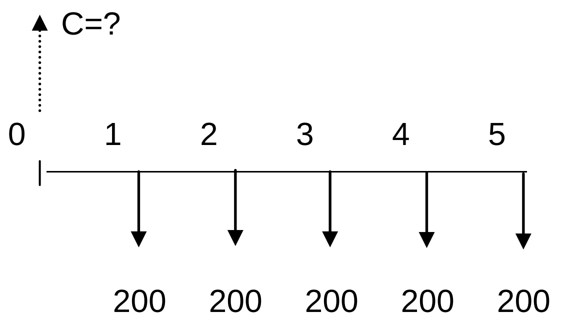
P= 200,00

i= 3% ao mês

n= 5

C= ?

Esquematicamente:



Já vimos que a fórmula para o cálculo do valor atual é obtida a partir da fórmula do montante, como segue:

$$M = C(1+i)^n \quad \Rightarrow \quad C = \frac{M}{(1+i)^n} \quad \Rightarrow \quad C = M \times \frac{1}{(1+i)^n}$$

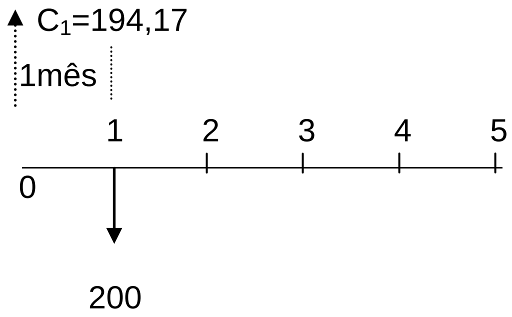
No problema, cada prestação P= 200,00 representa o montante (ou valor futuro) individual de um capital inicial que desconhecemos, aplicado a taxa de 3**%** ao mês, e por prazos que vão de 1 a 5 meses. O que queremos é determinar o capital inicial ou o valor presente dessas prestações no "momento zero".

Para a primeira prestação, o valor presente é calculado como segue:

$$C_1 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^1}$$

$$C_1 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^1} = 200 \text{ x } 0{,}9708737 = 194{,}17$$

Esquematicamente:



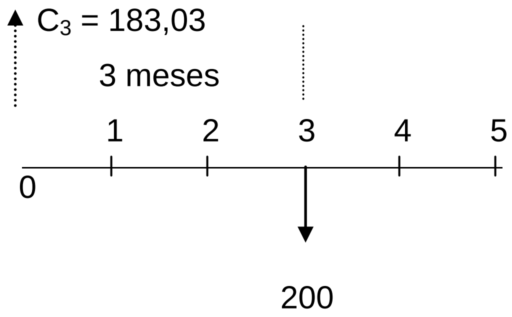
Para a terceira prestação:

$$C_3 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^3}$$

$$C_3 = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}092727} = 200 \text{ x } 0{,}9151416 = 183{,}03$$

O expoente 3 da expressão $\frac{1}{(1{,}03)^3}$ representa o número de meses entre a data fixada para o cálculo do valor presente e a data do vencimento da terceira prestação:

Esquematicamente:

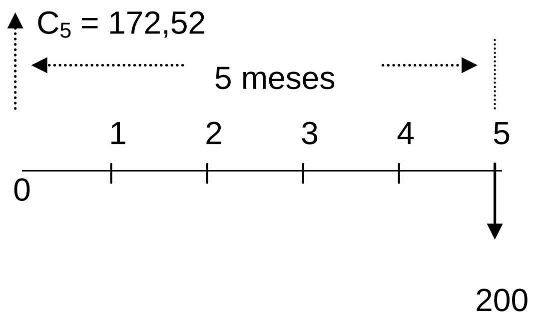


O valor presente da quinta prestação é assim obtido:

$$C_5 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^5}$$

$$C_5 = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}159274} = 200 \text{ x } 0{,}8626088 = 172{,}52$$

Esquematicamente:



Resumindo, os valores presentes das 5 prestações são calculados como segue:

$$C_1 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^1} = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}0300000} = 200 \text{ x } 0{,}9708737 = 194{,}17$$

$$C_2 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^2} = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}0609000} = 200 \text{ x } 0{,}9425959 = 188{,}52$$

$$C_3 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^3} = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}0927270} = 200 \text{ x } 0{,}9151416 = 183{,}03$$

$$C_4 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^4} = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}1255088} = 200 \text{ x } 0{,}8884870 = 177{,}70$$

$$C_5 = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^5} = 200 \text{ x } \frac{1}{1{,}1592740} = 200 \text{ x } 0{,}8626088 = 172{,}52$$

$$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 915{,}94$$

Assim o valor financiado (ou o valor presente), que pode ser pago ou amortizado em 5 prestações iguais mensais e consecutivas de R$ 200,00 cada uma, dentro do conceito de série de pagamentos com termos vencidos, é de R$ 915,94.

Vamos agora como fizemos para o caso do FAC, chegar a um fator que permita com uma única multiplicação, obter o resultado final utilizando somente conhecimentos de matemática elementar.

Sabemos que: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$

Substituindo C_1, C_2, ..., C_5 pelos seus respectivos valores, sem efetuar os cálculos, temos:

$$C = 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^1} + 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^2} + 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^3} + 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^4} + 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^5}$$

Colocando o valor 200 em evidência, temos:

$$C = 200[\frac{1}{(1{,}03)^1} + \frac{1}{(1{,}03)^2} + \frac{1}{(1{,}03)^3} + \frac{1}{(1{,}03)^4} + \frac{1}{(1{,}03)^5}]$$

Os termos que aparecem dentro dos colchetes constituem uma soma de PG de razão $\frac{1}{(1{,}03)}$. Como o trato com expressões fracionárias é um pouco mais complexo, vamos, com uma simples operação, transformar esta série numa soma da mais fácil visualização e cálculo. Para tanto, aplicaremos o conceito de Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

MMC = $(1{,}03)^5$ que é o número divisível por qualquer um dos denominadores da série.

Efetuando os cálculos temos:

$$C = 200\,x\,[\frac{(1{,}03)^4 + (1{,}03)^3 + (1{,}03)^2 + (1{,}03)^1 + 1}{(1{,}03)^5}]$$

O numerador da expressão entre colchetes constitui-se numa soma de PG, de razão (1,03), com número de termos igual a 5; esta série, sendo escrita em ordem inversa, tem como primeiro termo o número 1, que embora tenha um “jeitão” diferente, faz parte da “família” pois é um “legítimo” $(1{,}03)^0$.

Aplicando a fórmula conhecida $S_{PG} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$, temos:

$$C = 200\,x\,\frac{\frac{1 \times (1{,}03)^5 - 1}{1{,}03 - 1}}{(1{,}03)^5}$$

$$C = 200\,x\,\frac{(1{,}03)^5 - 1}{0{,}03}\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^5}$$

$$C = 200\,x\,\frac{(1{,}03)^5 - 1}{0{,}03 \times (1{,}03)^5} \qquad (4)$$

$$C = 200\,x\,\frac{1{,}159274 - 1}{1{,}159274 \times 0{,}03} = 200\,x\,\frac{0{,}159274}{0{,}0347782} = 200\,x\,4{,}5797079 = 915{,}94$$

O valor R$ 915,94 coincide com o anteriormente obtido, o que nos assegura ser correto o novo processo de cálculo.

Substituindo na expressão (4) os valores numéricos pelos seus respectivos símbolos, temos a fórmula genérica:

$$C = P \, x \, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \, x \, i} \qquad (5)$$

Em que $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$ é o *Fator de Valor Atual*, representado por FVA (i,n). Portanto, a expressão (5) pode ser assim escrita: C = P × FVA (i,n).

1.4 Fator de Recuperação de Capital (FRC)

Sem dúvida alguma, esse é o fator mais utilizado na prática. Uma vez que se conhece o valor presente de um bem de consumo ou empréstimo, financiado por meio de prestações constantes mensais, sobre as quais incide a mesma taxa. A primeira prestação deve ser paga 30 dias após a assinatura do contrato.

É deduzido da fórmula anterior como segue:

$$C = P \, x \, \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \, x \, i}$$

$$P = \frac{C}{\frac{1+i)^n - 1}{1+i)^n \, x \, i}} \quad \Rightarrow \quad P = C \, x \, \frac{(1+i)^n \, x \, i}{(1+i)^n - 1} \qquad (6)$$

Em que $\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$ é o *Fator da Recuperação de Capital*, representado por FRC (i,n). Portanto, a expressão (6) pode ser assim escrita: P = C × FRC (i,n).

Observação:

FFC é o inverso do FAC

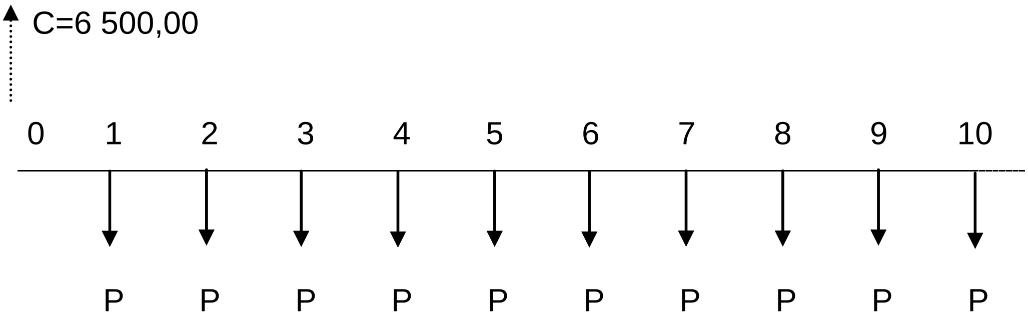
FRC é o inverso do FVA, ou seja:

$$FFC = \frac{1}{FAC} \ \text{ e } \ FRC = \frac{1}{FVA}$$

Como exemplo considere:

Um empréstimo de R$ 6 500,00 é concedido por uma instituição financeira para ser liquidado em 10 prestações iguais, mensais e consecutivas. Sabendo-se que a taxa de lucro é 2,5% ao mês, calcular o valor da prestação.

Esquematicamente:



Dados:

C = 6.500,00

n = 10 prestações mensais

i = 2,5% ao mês

P = ?

Solução:

$$P = C \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = 6500 \times \frac{(1{,}025)^{10} \times 0{,}025}{(1{,}025)^{10} - 1}$$

$$P = 6500 \times \frac{1{,}2800842 \times 0{,}025}{1{,}2800842 - 1}$$

P = 6.500,00 $\times$ 0,1142588 = 742,68

1.5 Fator de Recuperação de Capital (FRC) com entrada

Quando do financiamento é proposto uma entrada e o saldo restante financiado em prestações fixas iguais, mensais e consecutivas. A entrada (valor diferente da prestação) deve ser paga na assinatura do contrato e a 1ª prestação 30 dias após o financiamento. O valor a financiar é considerado do valor total subtraindo a entrada.

Vejamos um exemplo que analisa esse caso:

Uma fatura de cartão de crédito no valor R$773,04 foi parcelada em pagamento mínimo de R$ 115,96 (entrada) e o saldo restante financiado em 10 parcelas fixas iguais, à taxa mensal de 12,5%. Qual o valor de cada parcela fixa do financiamento?

Total Fatura: R$773,04

Pagamento Mínimo (entrada): R$ 115,96

R$ 773,04 (total fatura) – R$ 115,96(entrada) = R$ 657,08 é o valor a financiar.

C= 657,08

n= 10

i= 12,5% ao mês

P= ?

Solução:

$$P = C \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = 657{,}08 \times \frac{(1{,}125)^{10} \times 0{,}125}{(1{,}125)^{10} - 1}$$

$$P = 657{,}08 \times \frac{3{,}2473207 \times 0{,}125}{3{,}2473207 - 1}$$

$$P = 657{,}08 \times \frac{0{,}405915}{2{,}2473207}$$

P = 657,08 x 0,1806217 = 118,68

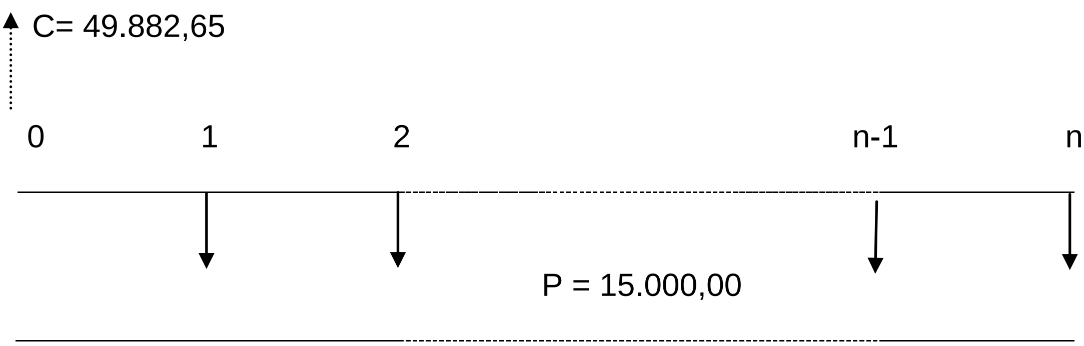
Entrada de R$ 115,96 mais 10 parcelas fixas de R$ 118,68

Vejamos agora dois exemplos em que n e i são as incógnitas.

Problema em que "n" não é conhecido:

Calcular o número de prestações semestrais de R$ 15.000,00 cada uma, capaz de liquidar um financiamento de R$ 49.882,65 à taxa de 20% ao semestre.

Esquematicamente:



Analisando os dados:

P = 15.000,00

C = 49.882,65

I = 20% ao semestre

n = ?

Solução:

Podemos usar a fórmula que nos dá o valor presente ou a que nos dá o valor das prestações; vamos utilizar a primeira.

$$C = P \text{ x } \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \text{ x } i}$$

$$49.882,65 = 15.000,00 \times \frac{(1,20)^n - 1}{(1,20)^n \times 0,20}$$

$$\frac{(1,20)^n - 1}{(1,20)^n \times 0,20} = 3,32551 \Rightarrow \frac{(1,20)^n - 1}{(1,20)^n} = 0,66510$$

$(1,20)^n - 1 = 0,66510 \times (1,20)^n$

$(1,20)^n - 0,66510 \times (1,20)^n = 1$

$(1,20)^n \times (1 - 0,66510) = 1 \Rightarrow (1,20)^n = 2,98597$

Utilizando logaritmo neperiano, temos:

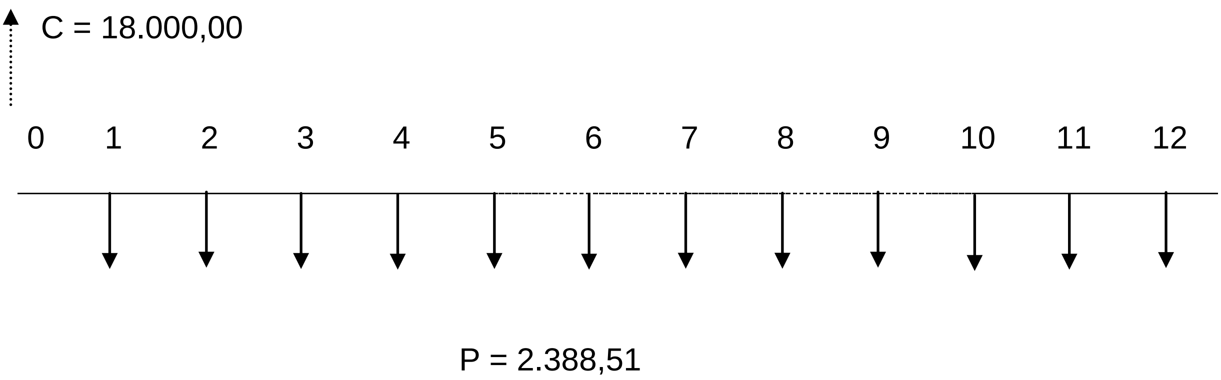
n x log 1,20 = log 2,98597

$$n = \frac{\log 2,98597}{\log 1,20} = \frac{1,09392}{0,18232} \text{ = 6 prestações semestrais}$$

Problema em que a taxa "i” não é conhecida:

Um empréstimo no valor de R$ 18.000,00, para se liquidado em 12 prestações mensais, iguais e consecutivas de R$ 2.388,51 cada uma, foi firmado a qual taxa mensal?

Esquematicamente:



Dados:

P = 2.388,51

C = 18.000,00

n = 12 prestações = 12 meses

i = ?

Solução:

$$C = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$18.000 = 2.388,51 \times \frac{(1+i)^{12} - 1}{(1+i)^{12} \times i}$$

$$\frac{18.000}{2.388,51} = \frac{(1+i)^{12} - 1}{(1+i)^{12} \times i}$$

$$7,536078 = \frac{(1+i)^{12} - 1}{(1+i)^{12} \times i}$$

O valor de i somente pode ser obtido por "tentativa e erro”. Atribuindo-se valores sucessivos a essa variável vamos encontrar i = 8%. Portanto, a taxa de juro é de 8% ao mês.

2. SÉRIES DE PAGAMENTOS IGUAIS COM TERMOS ANTECIPADOS

Nessa série de pagamentos iguais com termos antecipados, o primeiro termo (parcela ou prestação) deve ser pago no ato do empréstimo.

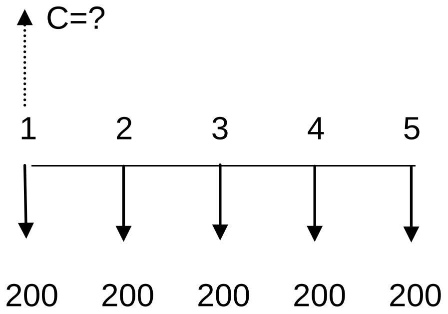
2.1 Fator de Valor Atual (FVA) Antecipado

Quando do financiamento é proposto parcelas mensais, iguais e consecutivas, sendo uma delas antecipada. O valor das parcelas é calculado sobre o valor total a financiar e a 1^a parcela deve ser paga no ato do empréstimo.

Vamos deduzir o Fator de Valor Atual para a série de pagamentos iguais com termos antecipados. Vejamos um problema prático:

Um Magazine oferece um Aparelho de Som que, financiado à taxa de 3% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 5 prestações mensais, iguais de R$ 200,00 cada uma, sendo a primeira prestação antecipada?

Esquematicamente:



Já vimos que a fórmula para o cálculo do valor atual é obtida a partir da fórmula do montante, como segue:

$$M = C(1+i)^n \quad \Rightarrow \quad C = \frac{M}{(1+i)^n} \quad \Rightarrow \quad C = M\,x\,\frac{1}{(1+i)^n}$$

No problema, cada prestação P= 200,00 representa o montante (ou valor futuro) individual de um capital inicial que desconhecemos, aplicado a taxa de 3**%** ao mês, e por prazos que vão de 1 a 5 meses. O que queremos é determinar o capital inicial ou o valor presente dessas prestações.

Os valores presentes das 5 prestações são calculados como segue:

$$C_1 = 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^0} = 200\ x\ \frac{1}{1} = 200\,x\,1 = 200{,}00$$

$$C_2 = 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^1} = 200\,x\,\frac{1}{1{,}03} = 200\ x\ 0{,}9708737 = 194{,}17$$

$$C_3 = 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^2} = 200\,x\,\frac{1}{1{,}0609} = 200\ x\ 0{,}9425959 = 188{,}52$$

$$C_4 = 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^3} = 200\,x\,\frac{1}{1{,}092727} = 200\,x\,0{,}9151416 = 183{,}03$$

$$C_5 = 200\,x\,\frac{1}{(1{,}03)^4} = 200\,x\,\frac{1}{1{,}1255088} = 200\,x\,0{,}888487 = 177{,}70$$

$$C = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 943{,}42$$

Assim o valor financiado (ou o valor presente), que pode ser pago ou amortizado em 5 prestações iguais mensais antecipadas de R$ 200,00 cada uma, dentro do conceito de série de pagamentos antecipadas, é de R$ 943,42.

Vamos agora como fizemos para o caso do FVA, chegar a um fator que permita com uma única multiplicação, obter o resultado final utilizando somente conhecimentos de matemática elementar.

Sabemos que:

$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$

Substituindo C_1, C_2, ..., C_5 pelos seus respectivos valores, sem efetuar os cálculos, temos:

$$C = 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^0} + 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^1} + 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^2} + 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^3} + 200 \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^4}$$

Colocando o valor 200 em evidência, temos:

$$C = 200 \text{ x } [\frac{1}{(1{,}03)^0} + \frac{1}{(1{,}03)^1} + \frac{1}{(1{,}03)^2} + \frac{1}{(1{,}03)^3} + \frac{1}{(1{,}03)^4}]$$

Os termos que aparecem dentro dos colchetes constituem uma soma de PG de razão $\frac{1}{(1{,}03)}$. Como o trato com expressões fracionárias é um pouco mais complexo, vamos, com uma simples operação, transformar esta série numa soma da mais fácil visualização e cálculo. Para tanto, aplicaremos o conceito de Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

MMC = $(1{,}03)^4$ que é o número divisível por qualquer um dos denominadores da série.

Efetuando os cálculos temos:

$$C = 200 \text{ x } [\frac{(1{,}03)^4 + (1{,}03)^3 + (1{,}03)^2 + (1{,}03)^1 + 1}{(1{,}03)^4}]$$

O numerador da expressão entre colchetes constitui-se numa soma de PG, de razão (1,03), com número de termos igual a 5; esta série, sendo escrita em ordem inversa, tem como primeiro termo o número 1, que embora tenha um “jeitão” diferente, faz parte da “família” pois é um “legítimo” $(1{,}03)^0$.

Aplicando a fórmula conhecida $S_{PG} = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$, temos:

$$C = 200 \text{ x } \frac{\frac{1 \text{x} (1{,}03)^5 - 1}{1{,}03 - 1}}{(1{,}03)^4}$$

$$C = 200 \text{ x } \frac{(1{,}03)^5 - 1}{0{,}03} \text{ x } \frac{1}{(1{,}03)^4}$$

$$C = 200 \times \frac{1{,}03)^5 - 1}{1{,}03)^4 \times 0{,}03} \qquad (7)$$

$$C = 200 \times \frac{1{,}159274 - 1}{1{,}1255088 \times 0{,}03} = 200 \times \frac{0{,}159274}{0{,}0337652} = 200 \times 4{,}7171051 = 943{,}42$$

O valor R$ 943,42 coincide com o anteriormente obtido, o que nos assegura ser correto o novo processo de cálculo.

Substituindo na expressão (7) os valores numéricos pelos seus respectivos símbolos, temos a fórmula genérica:

$$C = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i} \qquad (8)$$

Em que $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i}$ *é o Fator de Valor Atual Antecipado*, representado por FVA Antecipado (i,n). Portanto, a expressão (8) pode ser assim escrita: C = P $\times$ FVA Antecipado (i,n).

2.2 Fator de Recuperação de Capital (FRC) Antecipado

É deduzido da fórmula anterior como segue:

$$C = P \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1} \times i}$$

$$P = \frac{C}{\frac{(1+i)^n - 1}{1+i)^{n-1} \times i}} \qquad \Rightarrow \qquad P = C \times \frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \qquad (9)$$

Em que $\frac{(1+i)^{n-1} \times i}{(1+i)^n - 1}$ *é o Fator da Recuperação de Capital Antecipado*, representado por FRC Antecipado (i,n). Portanto, a expressão (9) pode ser assim escrita: P = C $\times$ FRC Antecipado (i,n).

Quando do financiamento é proposto parcelas mensais, iguais e consecutivas, sendo uma delas antecipada. O valor das parcelas é calculado sobre o valor total a financiar e a 1ª parcela deve ser paga no ato do empréstimo.

Vejamos um exemplo:

Uma fatura de cartão de crédito no valor R$773,04 foi parcelada em 10 prestações fixas iguais, sendo uma delas antecipada. Qual o valor de cada prestação se a taxa firmada é de 12,5% ao mês?

Dados:

C= 773,04

i = 12,5% ao mês

P=?

Solução:

$$P = C \times \frac{(1+i)^{n-1} \text{ x } i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = 773{,}04 \text{ x } \frac{(1{,}125)^{10-1} \text{ x } 0{,}125}{(1{,}125)^{10} - 1}$$

$$P = 773{,}04 \text{ x } \frac{2{,}8865073 \text{ x } 0{,}125}{3{,}2473207 - 1}$$

$$P = 773{,}04 \text{ x } \frac{0{,}3608134}{2{,}2473207}$$

$$P = 773{,}04 \text{ x } 0{,}1605526$$

$$P = 124{,}11$$

De posse dessa primeira prestação, calculamos o restante das outras a ser financiado postecipadamente, utilizando uma prestação a menos, ou seja, vamos calcular o valor da prestação novamente utilizando a fórmula do Fator de Recuperação de Capital postecipada. Do total da fatura R$ 773,04 subtraímos a prestação antecipada de R$ 124,11 e vamos contar uma prestação a menos.

Dados:

C= (Total da Fatura R$ 773,04 – R$ 124,11 prestação antecipada) = R$ 648,93

i= 12,5% ao mês

n= (10 parcelas – 1 parcela antecipada) = 9 parcelas

P=?

Solução:

$P = C \text{ x } \frac{(1+i)^n \text{ x } i}{(1+i)^n - 1}$, *<u>Fórmula do Fator de Recuperação de Capital (FRC)</u>*

$$P = 648{,}93 \text{ x } \frac{(1{,}125)^9 \text{ x } 0{,}125}{(1{,}125)^9 - 1}$$

$$P = 648{,}93 \text{ x } 0{,}19126$$

$$P = 124{,}11$$

3. ATIVIDADES

Com base no que acabamos de estudar, resolver as atividades propostas:

3.1 Determinar o valor do montante da aplicação de 10 parcelas mensais de R$ 1500,00, sendo a taxa mensal de 1,5%?

3.2 Qual o valor de cada parcela mensal que uma pessoa deve investir durante 12 meses à taxa de 1% ao mês, para que o montante do seu capital seja de R$ 3 995,00?

3.3 Um Banco oferece aos seus clientes uma poupança programada com prazo de 18 meses, à taxa de 2% ao mês. Qual deverá ser a parcela de um depositante para que ele acumule um montante de R$ 1 070,61?

3.4 Um Magazine anuncia um Televisor LCD 42” que, financiado à taxa de 3% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 17 prestações mensais, iguais e sucessivas de R$ 166,50 cada uma. Qual o valor a ser financiado?

3.5 Um empréstimo de R$ 4 140,00 é concedido por uma instituição financeira para ser liquidado em 24 prestações iguais, mensais e consecutivas. Sabendo-se que a taxa de lucro é 5% ao mês, calcular o valor da prestação.

3.6 Uma fatura de cartão de crédito no valor R$ 818,11 foi parcelada em pagamento mínimo de R$ 122,72 (entrada) e o saldo restante financiado em 11 prestações fixas iguais, à taxa mensal de 12,5%. Qual o valor de cada prestação referente ao saldo financiado?

3.7 Um Magazine oferece um Computador que, financiado à taxa de 5% ao mês, pode ser pago ou amortizado em 25 prestações mensais, iguais de R$ 129,00 cada uma, sendo a primeira prestação antecipada?

3.8 Uma fatura de cartão de crédito no valor R$ 1 281,54 foi parcelada em 12 prestações fixas iguais, sendo uma delas antecipada. Qual o valor de cada prestação se a taxa firmada é de 12,5% ao mês?

3.9 Qual o valor da taxa mensal de juro composto, sabendo que a propaganda de um investimento diz: “Deposite mensalmente R$ 100,00 e, em 12 meses, retire o montante de R$ 1 341,20”?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. **Matemática: caderno de Teoria e Prática 2 –** TP2: matemática nos esportes e nos seguros. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. **Apresenta produtos e serviços para investimentos e financiamentos.** Disponível em: http://www.caixa.gov.br/ Acesso em 06/10/2009

GOMEDI, M. I. *et al.* ***Calculando os juros que você paga.*** Caderno de resumos: Pró-Ciências 99.Editora UEL. Londrina, 1999.

MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; ZANI, S.C. **Progressões e Matemática Financeira**. 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM 2005.

PARANÁ, Governo do Estado. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática para o Ensino médio**, 2008. Disponível em http://www.diaadiaeducação.pr.gov.br> Acesso em 20/02/ 2009.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. **Matemática**. Ensino Médio, volume 3. São Paulo: Saraiva, 2005.

SPINELLI, W.; SOUZA, M.H.S. **Matemática Comercial e Financeira**. 3ª ed. São Paulo: Ática,1998.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V. P. **Matemática**. Ensino Médio, volume único. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2009.