Versão Online ISBN 978-85-8015-054-4
Cadernos PDE

VOLUME I

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2009

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE FRACTAIS CONSTRUÍDOS ATRAVÉS DO SOFTWARE GEOGEBRA

Autor: Cláudia Tratch[1]

Orientadora: Leoni Malinoski Fillos[2]

Resumo:

Este artigo apresenta os resultados da implementação da unidade didática, produzida como parte das atividades do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, promovido pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná. O estudo teve por objetivo analisar os limites e potencialidades da metodologia da Investigação Matemática, articulada ao uso do software de geometria dinâmica GeoGebra no ensino dos fractais. Sob este enfoque foi realizada uma revisão da literatura sobre investigação matemática e geometria fractal, suas abordagens e importância, e sobre geometria dinâmica, com destaque ao software GeoGebra. Os alunos envolvidos no processo de implementação são de duas oitavas séries de uma escola estadual da região Sul do Paraná, que investigaram matematicamente fractais construídos com o software no laboratório do Paraná Digital. O material de análise é constituído de registros escritos pelos alunos e das observações diretas da pesquisadora e anotadas em diário de bordo. O estudo aponta que, ambientes informatizados contribuem para a compreensão de aspectos conceituais da geometria fractal possibilitando a melhor visualização, generalização e representação matemática. Também indica que a investigação matemática possibilita a exploração de ideias e a argumentação, representando um desafio no processo educativo, tanto para o professor, na criação de um ambiente favorável à investigação, como para o aluno, de quem se exige uma postura inquiridora e ativa.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Fractal; GeoGebra

---

[1] Especialista em Ciências/Educação Ambiental e em Tecnologias da Informação e da Comunicação, Licenciada em Ciências e Matemática, professora efetiva do Colégio Estadual Bernardina Schleder de União da Vitória - PR

[2] Mestre em Educação, Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO, *Campus* Irati.

1 Introdução

A geometria fractal está elencada como conteúdo específico nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, tanto no ensino fundamental como no médio. Este conteúdo, como as demais geometrias não euclidianas, gerou insegurança, inquietações e curiosidades em professores destes níveis de ensino, principalmente pelo fato de que os mesmos não foram abordados durante a formação docente da grande maioria dos educadores e pelo parco material didático existente.

Os fractais possibilitam uma melhor representação das formas encontradas na natureza e a compreensão delas em toda sua dimensão e complexidade permitem também a percepção de padrões geométricos e a similaridade de uma parte em relação ao todo, sendo os softwares específicos importantes recursos na criação e visualização de formas inovadoras e inusitadas. Além disso, são várias as aplicações da geometria fractal em diferentes áreas do conhecimento como medicina, física, arquitetura, minerologia, arte, entre outros.

Almejou-se para tanto, abordar o conteúdo por meio dos encaminhamentos metodológicos sugeridos pelas investigações matemáticas, tendo como suporte as mídias tecnológicas, mais especificamente, o software de geometria dinâmica.

Consideraram-se assim, neste estudo, as orientações indicadas nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCES), segundo as quais os conteúdos devem ser abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática, o que se constitui num desafio à professora-pesquisadora compreendê-las e articulá-las ao processo de ensino e aprendizagem. E para os alunos, representam uma nova forma de estudar matemática.

As investigações matemáticas de acordo com as DCES possibilitam o desenvolvimento da lógica, do raciocínio, da criatividade, da formulação e verificação de conjecturas e da argumentação, iniciando-se assim, um processo de “fazer matemática”, em que os alunos são chamados a agir como matemáticos.

Assim nessa produção, primeiramente faz-se uma discussão teórica sobre os três eixos principais do trabalho: a geometria fractal, a investigação matemática e a utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra em contextos

pedagógicos. Em seguida, são apresentados os resultados da intervenção realizada na escola e, por fim, discute-se e avalia-se a proposta.

2 Fundamentação teórica

2.1 Geometria fractal

A geometria em seus primórdios e por longo tempo, segundo interpretações de historiadores (EVES, 1992; BOYER, 1996), esteve relacionada ao espaço físico real e gradualmente evoluiu para uma geometria abstrata e com diferentes abordagens, tanto de conteúdo, quanto de forma. Essa evolução deu origem no decorrer dos séculos às diferentes geometrias atualmente estudadas: geometria euclidiana e não euclidianas.

A geometria euclidiana foi considerada a única forma de estudar o espaço e suas formas por mais de dois mil anos, até o final do século XVIII, quando surgem as geometrias não euclidianas. Dentre as não euclidianas, apenas a cerca de três décadas e meia é que surgiu a geometria fractal, sendo que seu desenvolvimento só foi possível devido ao rápido aprimoramento dos recursos computacionais.

O termo fractal, criado e apresentado em 1975 por Benoit Mandelbrot, deriva do adjetivo do latim *fractus*, cujo verbo *frangere* significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar.

Antes de Mandelbrot outros matemáticos como Cantor, Peano, Von Koch, Sierpinski, Fatou e Julia, criaram figuras estranhas que não atendiam às definições convencionais da geometria euclidiana e, por isso, acabaram recebendo o nome de “monstros matemáticos” ou “entes patológicos”. Uma das razões para essa denominação, segundo Janos (2008), é que “ao contrário do que estamos acostumados, elas nunca são realmente retas ou curvas e não têm tangentes” (p.63). Hoje, estes monstros são chamados de fractais clássicos ou precursores, mas na época não recebiam a denominação de fractal, pois foram construídos com finalidades diversas. O próprio Mandelbrot reconheceu e estudou alguns dos fractais clássicos.

A geometria fractal apresenta-se intimamente ligada a uma nova ciência, chamada Caos. Esta ciência enfatiza que na natureza coexistem a ordem (o determinismo) e o caos (a imprevisibilidade). Assim, a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao Caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório (BARBOSA, 2005, p.9-10).

Mandelbrot (1991, p.207), considerado o pai da geometria fractal, define-a como "o estudo de diversos objectos, tanto matemáticos como naturais, *que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau em todas as escalas.*" Para Janos (2008, p.X), "é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza". Assim, a geometria fractal possibilita, por meio de algoritmos, a construção e representação de formas semelhantes às existentes na natureza e fornece ferramentas para o estudo das mesmas, revelando irregularidades e fragmentações. Importante ressaltar que essas formas encontradas na natureza, não estão presentes apenas nos vegetais, nas montanhas, nas nuvens, nas galáxias, mas também são encontradas na fisiologia animal como nos sistemas: circulatório, nervoso e respiratório, por exemplo. Além disso, a geometria fractal também está presente na arte e possibilita a descrição de fenômenos sociais. Entretanto, nem todas as formas da natureza são fractais, como assevera Alves (2007) e Janos (2008).

Hoje, a geometria fractal é um ramo da Matemática que estuda as propriedades e comportamentos dos fractais. Para Eberson (2004, p.15), esta geometria é "uma área ainda em efervescente desenvolvimento, mais voltada ao crescimento do que ao aprofundamento e nas quais novas descobertas e criações são anunciadas com novos enfoques e novas aplicações".

Ainda não existe uma definição formal e precisa para fractal. Isso, porém, não deprecia a importância do estudo dos fractais, pois se trata de um assunto recente, complexo e com muitas aplicações nas áreas do conhecimento como na Matemática, Biologia, Física, Medicina, Engenharia, Arte, dentre outras.

As principais características dos fractais são: auto-similaridade, iteração e dimensão. A auto-similaridade ou auto-semelhança é a mais elementar e marcante das características de um fractal. É identificada quando a invariância da forma independe da escala de ampliação. Já a iteração ou complexidade infinita se relaciona à existência de um processo recursivo, o que significa que um determinado procedimento repete-se infinitamente. É importante salientar que, de acordo com

esta propriedade, cada construção de iteração dispõe, muitas vezes, de um número infinito de procedimentos, resultando em uma estrutura demasiadamente complexa. Outra característica do fractal refere-se à dimensão fracionária, diferente do que ocorre na geometria euclidiana, na qual é sempre inteira.

Para fins didáticos, os fractais podem ser classificados em: geométricos e não lineares ou aleatórios. Os geométricos derivam de figuras geométricas tradicionais como triângulo, segmento de reta, quadrados, sendo repetidos continuamente. Os não lineares ou aleatórios são construídos por meio de funções iterativas complexas, geralmente com o auxílio de programas computacionais específicos; são simétricos na escala, mas a transformação não é previsível.

É importante salientar que o estudo da geometria fractal não anula a geometria euclidiana. Tais geometrias coexistem. Neste estudo foram articuladas atividades que abordam conceitos euclidianos e fractais, sendo utilizado para tanto, recursos computacionais.

2.2 Geometria dinâmica ou software GeoGebra.

O termo geometria dinâmica (GD) é comumente usado para designar programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas construídas a partir de suas propriedades. Esse termo foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen para diferenciá-lo dos softwares geométricos.

Os softwares de geometria dinâmica são projetados de forma que as figuras construídas possam ser manipuladas e tragam consigo suas propriedades geométricas, desde que construídas a partir das mesmas. Para Eberson (2004), esse dinamismo permite um maior controle e possibilita um feedback visual imediato das propriedades geométricas estudadas, percebendo-as como invariantes durante o contínuo movimento da figura. Os softwares e os ambientes de geometria dinâmica em geral, permitem ao aluno elaborar conjecturas e realizar testes e experimentações (ISOTANI E BRANDÃO, 2006), (BORBA E PENTEADO, 2005).

Dentre os softwares de geometria dinâmica tem se destacado atualmente em pesquisas e em ambientes educativos o GeoGebra, cujo projeto de criação iniciou-se em 2001, por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburgo, na

Áustria. Este software possui codificação aberta, que permite a colaboração de programadores do mundo inteiro e o seu constante aperfeiçoamento. É escrito em Java e suporta múltiplas plataformas, reunindo ferramentas de geometria, álgebra e cálculo. Sua vantagem didática está em apresentar ao mesmo tempo a representação geométrica e a representação algébrica, além de possibilitar sua principal característica, o dinamismo.

O GeoGebra encontra-se instalado em todas as máquinas do laboratório de informática das escolas estaduais do Estado do Paraná, os chamados Laboratórios do Paraná Digital (PRD). Considerando, portanto, a facilidade de acesso e a contribuição desse software para um ensino baseado em investigações e explorações matemáticas, optou-se em utilizá-lo no processo de implementação do PDE, a partir de construções dos fractais e investigações matemáticas.

2.3 Investigações Matemáticas

O ensino e a aprendizagem de Matemática e de outras disciplinas, estão centrados em atividades a serem desenvolvidas pelos alunos. Essas atividades possuem diferentes graus de dificuldades e de estruturação.

Para Ponte (2003), existem quatro tipos diferentes de atividades matemáticas: exercício, problema, exploração e investigação. Os exercícios e problemas têm estruturas fechadas, sendo que o primeiro possui menor grau de dificuldade se comparado com o segundo. Já as investigações e as explorações são estruturas abertas, sendo que as primeiras apresentam maior grau de dificuldade. Os limites entre investigações e explorações nem sempre são evidentes, tanto que na maioria das vezes são chamadas apenas de investigações.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), os exercícios e os problemas apresentam claramente o que é dado e o que é pedido. Não há ambiguidades. A solução é conhecida pelo professor e a resposta do aluno será certa ou errada. Já na investigação matemática, por envolver situações mais abertas, a questão não está bem definida inicialmente, cabendo a quem investiga sua definição. Assim, os pontos de partida e de chegada podem variar de aluno para aluno e as situações e resultados alcançados são, por vezes, imprevisíveis.

Portanto, a investigação matemática apresenta aspectos específicos, momentos e fases distintas durante sua aplicação.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), consideram que, na realização de uma investigação matemática, ocorrem quatro momentos principais: exploração e formulação de questões, conjecturas, testes e reformulação e por fim a justificação e avaliação.

Exploração e formulação de questões	- Reconhecer uma situação problemática - Explorar a situação problemática - Formular questões
Conjecturas	- Organizar dados - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre a conjectura)
Testes e reformulação	- Realizar testes - Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	- Justificar uma conjectura - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Quadro 1: momentos na realização de uma investigação
Fonte: PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009, p.21.

Habitualmente no desenvolvimento de uma atividade de investigação, seja ela realizada em uma ou várias aulas, ocorrem três fases distintas:

> (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009, p.25).

A primeira fase, embora curta, desempenha especial relevância, pois dela depende todas as demais fases da investigação. Nessa fase o aluno precisa compreender o sentido da tarefa proposta, o que lhe é pedido e o que se espera dele no decurso da atividade e o objetivo principal é fazer com que o aluno compreenda o significado de investigar.

Quando os alunos estão pouco ou nada familiarizados com as atividades investigativas é necessário que o professor forneça algumas dicas ou peça sugestões de como eles iniciariam a resolução do problema, levantando as primeiras conjecturas. Não se deve esquecer, porém, que a interpretação da atividade deve ser feita pelos alunos. O professor deve apenas possibilitar a eles que tenham um raciocínio do tipo indutivo.

Após a fase introdutória da investigação é esperado que os alunos realizem os processos característicos da atividade investigativa como: “a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação das conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho” (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009, p.29).

Na exploração inicial da questão investigativa e na formulação de conjecturas, os alunos podem partir do levantamento e organização de dados para então levantar suas conjecturas. Podem partir, também, diretamente de suas conjecturas e, no decorrer da atividade, realizar testes e gerar novos dados.

Na fase de desenvolvimento das atividades investigativas deve existir a preocupação em centrar a aula nas atividades dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa.

Os resultados das investigações são apresentados na fase de discussão. É quando os alunos irão confrontar suas conjecturas, suas estratégias e suas justificativas com outras opiniões. Por isso, precisam ser estimulados a explicitar e argumentar suas ideias e a questionar seus colegas. Essa fase, conforme salienta Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), é adequada para clarificar ideias, sistematizar algumas conclusões e validar resultados. Também é uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho. Neste sentido, os autores consideram que:

> [...] é fundamental proporcionar aos alunos momentos onde possam pensar e sobretudo refletir sobre a actividade realizada. Por um lado esta reflexão permite, por exemplo,valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que estes não conduzam a uma resposta final correcta, criando nos alunos uma visão mais verdadeira da Matemática. Por outro lado, permite estabelecer conexões com outras ideias matemáticas, com questões extra-matemáticas e pode construir um ponto de partida para outras investigações. (FONSECA, BRUNHEIRA E PONTE, 1999, p.9).

Importante ressaltar que o tempo de cada fase dependerá de alguns fatores como: faixa etária, nível intelectual e cognitivo dos alunos, contato com essa metodologia e amadurecimento e responsabilidade dos estudantes. Nas primeiras atividades investigativas, a fase inicial será mais demorada justamente pelo fato de não se ter familiaridade com a metodologia. Mas, aos poucos, essa fase tende a ficar mais breve.

O papel do professor nas investigações matemáticas é determinante, sendo chamado a desempenhar vários papéis no decorrer do processo. É ele quem deve criar e garantir um ambiente de aprendizagem, no qual todas as ideias, conjecturas e argumentações sejam respeitadas e valorizadas, fazendo com que os alunos sintam-se à vontade para colocá-las perante o professor e demais colegas.

Além do ambiente favorável à investigação, o professor deve desafiar os alunos escolhendo questões ou situações iniciais que realmente os desafiem, estimulando-os a criar um espírito interrogativo não apenas no início da tarefa investigativa, mas durante todo seu desenvolvimento. Também é necessário apoiar os alunos no transcorrer das atividades.

Na fase de desenvolvimento das investigações o professor assume um papel de orientador da atividade, devendo ter sempre uma atitude questionadora perante as solicitações dos alunos. O professor, segundo Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), deve provocar o raciocínio dos alunos, levando-os a analisar e refletir sobre o trabalho investigativo e procurar significados para suas descobertas. Para esses autores são perguntas questionadoras: Por quê? Como explicam isso? Qual a relação entre essas ideias?

Na fase das discussões de resultados, o professor tem a função de moderador e orientador, sendo necessário que estimule a comunicação entre os alunos.

Desde o início da investigação o professor deve avaliar o progresso dos alunos, procurando verificar se entenderam a proposta da tarefa e se estão formulando, testando e justificando suas conjecturas. Deve buscar compreender o pensamento dos alunos por meio de perguntas e explicações e não emitir parecer imediato quando as afirmações ou conceitos não estão corretos. O professor tem, assim, a possibilidade de identificar se os alunos estão compreendendo os conceitos e quais são suas dificuldades. Por isso, em suas intervenções e interações, precisa

levantar questionamentos e reflexões, assumindo um papel de mediador, moderador e orientador.

Com as informações sobre o progresso dos alunos, o professor tem dados para adotar a estratégia mais adequada para cada situação, podendo, por exemplo, ampliar o tempo para a realização da investigação, fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma, caso estejam trabalhando em grupos, ou passar à discussão final (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009, p. 49).

Dada a natureza da investigação matemática é praticamente impossível antever todas as possibilidades de investigações, podendo surgir em conexões com diversos conceitos matemáticos ou até mesmo extramatemáticos. Para tanto, o professor deve conhecer profundamente os conteúdos matemáticos e ter a capacidade de explorar cabalmente essas conexões, estimulando os alunos a refletir sobre elas. Também deve existir no professor uma predisposição em manifestar perante os alunos seu raciocínio matemático, para que esses possam compreender melhor o processo investigativo.

Assim, quando o professor propõe uma investigação matemática em sala de aula assumindo funções específicas, o aluno também é chamado a um papel específico, ao qual não está acostumado a desempenhar normalmente em sala de aula, mas que, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), traz o espírito genuíno da atividade matemática. Conforme os autores:

> O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009,p.23).

Além disso, na investigação matemática o desenvolvimento da atividade depende da iniciativa do aluno, principalmente porque envolve situações abertas, cujas questões não estão completamente formuladas. Para estes autores, o envolvimento do aluno é uma condição fundamental de aprendizagem, pois desenvolve o senso de responsabilidade e compromisso com o ato de aprender. Conforme ressaltam, “o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos

e afetivos com vista a atingir um objetivo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p.23).

As atividades investigativas, de um modo geral, são realizadas por pequenos grupos. Nessas atividades, os alunos precisam aprender a respeitar as opiniões dos colegas, bem como expor e argumentar suas próprias conjecturas. Precisam também elaborar conjuntamente relatórios escritos, no qual devem expor suas ideias e raciocínios de como chegaram a uma determinada conclusão ou conclusões.

Portanto, a investigação matemática é um desafio tanto para o professor quanto para o aluno. Para o aluno o desafio é assumir um papel mais atuante, no qual deve agir, interagir e pensar matematicamente. Para o professor, é conseguir elaborar tarefas investigativas desafiadoras, criar um ambiente propício onde os alunos possam expressar o pensamento matemático, enfrentar uma multiplicidade de situações, muitas vezes inesperadas e realizar uma avaliação contínua de todo o processo.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) salientam que, apesar das numerosas experiências realizadas com trabalhos investigativos, onde os alunos demonstraram uma aprendizagem de grande alcance e um grande entusiasmo pela matemática, as investigações matemáticas não representam “a chave que permite por si só resolver todos os problemas do ensino da matemática” (p.10-11). As investigações constituem-se em mais uma metodologia que pode ser aplicada em sala de aula, mas não a única. O grande desafio aos professores é a articulação de várias metodologias no ensino de Matemática e, por meio delas, possibilitar a melhor apropriação dos conhecimentos matemáticos aos alunos.

3 Desenvolvimento

O projeto foi desenvolvido em duas fases distintas. Primeiramente foi apresentado para a direção, equipe pedagógica, funcionários e professores de um colégio da rede pública do estado do Paraná que aprovaram, elogiaram e incentivaram a aplicação do mesmo. Os professores da área de Matemática, em especial, entenderam como uma proposta desafiadora pela abrangência do conteúdo, metodologia e utilização de recursos tecnológicos.

Nas primeiras semanas do segundo semestre a proposta de trabalho foi explicada para os alunos de duas turmas de oitava série (B e C) do período matutino do colégio. O objetivo era estimulá-los a participar, apresentando-lhes as finalidades do projeto, metodologia, forma de avaliação e a logística da proposta. Esclareceu-se que as atividades seriam realizadas no laboratório de informática do colégio, em cinco encontros, no período vespertino e em contra-turno, com aproximadamente duas horas de duração cada encontro. Também que seriam desenvolvidas no segundo semestre de 2010.

Após a exposição do projeto aos alunos, percebeu-se que metade dos estudantes da turma C demonstrou interesse. Já na turma B o interesse foi menor em relação ao número total dos alunos. Percebeu-se também que o que mais chamou atenção dos alunos foi a possibilidade de desenvolver as atividades com a utilização do computador.

Após a fase preparatória, deu-se início à fase de aplicação do material didático, elaborado para a implementação do projeto. Todas as atividades foram realizadas no Laboratório de Informática do colégio, ou seja, no Laboratório do Paraná Digital, que possui 20 máquinas (5 multiterminais), que rodam na plataforma Linux. Nessas máquinas, encontram-se instalados diversos programas, entre eles o GeoGebra e o Writer (editor de texto do BrOffice), utilizados durante as atividades. Esse laboratório localiza-se numa área onde há grande circulação de pessoas, apresentando em certos momentos, problemas de acústica, que dificultam a concentração e a comunicação.

O material didático desenvolvido apresenta uma proposta de estudo de alguns fractais construídos por meio do software GeoGebra, sendo aplicada a metodologia da investigação matemática.

No primeiro encontro participaram onze alunos, sete da oitava B e quatro da oitava C. Neste encontro foi apresentado, primeiramente, o que é uma investigação matemática, as fases dessa metodologia, o procedimento para desenvolver os relatórios e os diários de bordo. Também foi estabelecido um contrato didático onde ficaram estabelecidas as regras para o desenvolvimento das atividades e para o uso dos computadores como: não ouvir música, não entrar no Orkut ou similares, não baixar ou visualizar vídeos. Ficou estabelecido que, após o desenvolvimento de todas as atividades programadas, seria reservado um tempo para outras atividades na internet. Outras regras de comportamento também foram estabelecidas no

contrato como o respeito às ideias e opiniões dos colegas; interagir com os colegas e a professora; dar oportunidade para que todos expressem suas opiniões.

Segundo Ponte *et al.* (1998), faz-se necessário estabelecer normas de relacionamentos, enfatizando com clareza o que é e o que não é permitido. Pois, de uma maneira geral os alunos não estão acostumados a trabalhar em grupos durante as aulas de matemática e muito menos realizar investigações. Pais (2002), neste sentido, reforça a necessidade de um contrato didático em sala de aula, estabelecendo as obrigações mais imediatas e recíprocas entre professores e alunos. A importância desta ação ficou evidenciada no comportamento dos alunos que respeitaram as regras estabelecidas. Uma aluna, inclusive, menciona em seu diário de bordo que: "*Eu achei certo nós entrarmos em um acordo no horário para entrar na internet*".

Estabelecido o contrato didático, iniciou-se a primeira atividade do material didático, que já se encontrava disponibilizada nos computadores. O objetivo da atividade era introduzir as primeiras noções da geometria fractal, despertar o interesse dos alunos pelo assunto e fazer com que percebessem as diversas formas geométricas existentes nas figuras.

A atividade foi realizada individualmente pelos alunos e consistia em observar algumas figuras presentes no cotidiano como: um ponto de ônibus, uma casa, nuvens, uma dália, uma couve-flor e relatar o que era possível observar nas figuras quanto à forma que possuíam. Após as primeiras observações, os alunos deveriam fazer sobreposições de figuras geométricas nas figuras anteriores, utilizando a ferramenta de desenho disponibilizada pelo editor de texto Writer (BrOffice), relatando por escrito e oralmente ao grupo suas observações.

A partir do relatório apresentado pelos alunos e das observações realizadas pela pesquisadora constatou-se que todos os alunos identificaram formas geométricas na figura do ponto de ônibus e na casa, como quadrados, retângulos e triângulos. Dos onze alunos presentes, seis não conseguiram lembrar o nome da figura que representava o telhado da casa, ou seja, do trapézio. Já na imagem de nuvens não conseguiram identificar nenhum tipo de forma geométrica e nas imagens da flor e da couve-flor, apontaram como sendo círculos, mas salientaram em seus relatórios a dificuldade de identificar tais figuras. Uma aluna até anotou: "*A geometria da natureza é bem difícil*".

Com relação à utilização dos recursos tecnológicos, apenas dois alunos apresentaram dificuldades, mas isso não os impediu de atingirem os objetivos da atividade.

Após o relato oral das observações realizadas pelos alunos, deu-se início à explanação sobre o que é um fractal, suas características, o surgimento da geometria fractal e suas aplicações, sendo utilizados para isso vídeos e apresentações, projetados na tv multimídia.

Nesse primeiro encontro, as atividades planejadas foram cumpridas com êxito pelos alunos e a pesquisadora não encontrou dificuldades em aplicá-las. A impressão foi de que os alunos gostaram de realizá-las. Era algo diferente e "legal" como muitos afirmaram em seus diários. Observou-se que os alunos tiveram certa dificuldade em expressar suas ideias, tanto oralmente, quanto na forma escrita.

No segundo encontro da implementação, dos onze alunos compareceram dez e mais um aluno se incorporou ao grupo. Após uma rápida revisão sobre fractais e a apresentação de mais um vídeo que complementava os anteriores, iniciou-se a segunda atividade do material didático, cujo objetivo era que os alunos conhecessem recursos básicos do software GeoGebra, necessários para a construção dos fractais geométricos que seriam trabalhados posteriormente. Aproveitou-se o momento também para realizar uma revisão de alguns conceitos de geometria plana como: ponto, reta, plano, polígonos regulares e irregulares, ponto médio, perímetro e área. A atividade foi realizada individualmente, cada aluno em um computador.

Nos relatos dos alunos, em seus diários de bordo, percebeu-se que eles gostaram de trabalhar com o software. A maioria não encontrou dificuldades na utilização dos recursos, com exceção de uma aluna que não possuía noções básicas de computação como os demais. Em seu diário ela descreve: "*Eu aprendi a mexer melhor no computador e também gostei de aprender a desenhar... eu me perdi um pouco mas foi bem legal*". Também relata que: "*hoje também me senti mais a vontade na aula, não estava tudo estranho*". Importante ressaltar que nenhum dos alunos havia realizado anteriormente atividades com algum tipo de software de geometria.

Como docente foi a primeira experiência na utilização do software de geometria dinâmica que a pesquisadora desenvolveu com alunos. Não houve dificuldades em apresentar os principais recursos do software GeoGebra, nem nas

orientações para o desenvolvimento das atividades propostas. Foi possível constatar que o software de geometria dinâmica permite uma visualização, uma percepção e um dinamismo que a régua e o quadro de giz limitam, principalmente porque o software possibilita que o aluno perceba certas propriedades das figuras geométricas e desenvolva seu raciocínio lógico e geométrico. Gravina e Santarosa (1998), há cerca de duas décadas, já salientavam que as representações feitas por meio de recursos tecnológicos dinâmicos passam a ser mutáveis, diferentes das representações feitas com lápis e papel ou giz e quadro-negro.

Nessa aula observou-se também que, inicialmente, alguns alunos não conseguiam utilizar algumas ferramentas, mas as dificuldades logo foram superadas, com um atendimento individualizado e com a ajuda dos colegas.

No terceiro encontro compareceram nove alunos e foi desenvolvida a primeira construção de um fractal, a Curva de Koch, e trabalhada a primeira investigação matemática propriamente dita. Desse modo, os objetivos da atividade sintetizavam-se em: construir e investigar a Curva de Koch; possibilitar o reconhecimento das características do fractal; identificar as cópias do fractal que se repetem, bem como, a razão de semelhança desse fractal; rever conceitos como: segmento de reta, razão, comprimento, triângulo equilátero; e trabalhar com noções básicas de desenho geométrico.

Nesse encontro, cada aluno construiu o fractal individualmente com as ferramentas do software GeoGebra, seguindo os passos indicados pela professora-pesquisadora, conforme o material didático. Utilizou-se, para tanto, um projetor multimídia.

Percebeu-se durante a construção que a maioria dos alunos sentiu dificuldades na construção da macro, ferramenta que possibilita fazer as repetições (lei de formação), ou seja, o processo iterativo do fractal, tendo sido necessária a repetição dos passos por várias vezes. Mesmo assim, alguns alunos necessitaram de atendimento individualizado.

Após a construção do fractal foi solicitado o desenvolvimento das seguintes atividades:

Vamos investigar este fractal! Relate tudo o que observou respondendo cada item desta atividade.

a) No passo 4, foi realizada a operação a/3. Explique qual o objetivo dessa operação, ou seja, por quê isso foi feito.

b) A cada iteração realizada, estará concluído um nível, conforme mostra a figura, sendo que o nível zero é o segmento inicial:

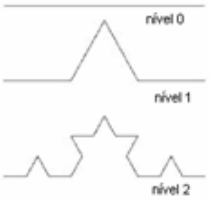

Figura 30: Curva de Koch iterações

Agora, preencha a seguinte tabela. Relate o que observou e quais os cálculos que realizou para o preenchimento da tabela:

	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da linha
Nível 0			
Nível 1			
Nível 2			
Nível 3			

c) Qual será o valor do comprimento total da linha no nível 4? Como chegou a este resultado?

d) Relate as características que foram observadas neste fractal.

Quadro 2: atividade realizada no terceiro encontro
Fonte: unidade didática

Primeiramente foi solicitado que cada aluno preenchesse a tabela da questão b. Todos sentiram dificuldades em preenche-la sozinhos, sendo necessária a intervenção da professora-pesquisadora, que refez a Curva de Koch no projetor multimídia e explicou como eles conseguiriam os respectivos valores. Mesmo assim, persistiram as dificuldades na realização dos cálculos.

Em seguida, foi solicitado que os alunos fizessem grupos de dois ou três alunos para discutirem e responderem as questões. Existiu certa resistência por parte dos alunos quanto à formação de grupos. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.29) sobre isso asseveram: “[...] há que se ter em atenção que, se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupos nem a realizar investigações, fazer

entrar na aula, simultaneamente, esses dois elementos novos pode trazer alguns problemas de gestão ao professor".

Observou-se que os alunos não conseguiam interpretar as questões e nem quais operações deveriam realizar, sendo necessária a intervenção constante da professora-pesquisadora.

Em relação à primeira questão, durante as intervenções percebeu-se que apenas uma aluna conseguiu identificar que a/3 significava um terço do segmento inicial, mas em seu relato não deixou claras suas observações. Na segunda questão, quando instigados, alguns alunos conseguiam responder oralmente que "*o número de segmentos era sempre multiplicado por quatro*", "*o comprimento total da linha nós multiplicamos por quatro a medida que deu esse pedaço*", mas no relatório não conseguiram escrever ou demonstrar como chegaram a tal conclusão, apenas preencheram a tabela. Essa situação é explicada por D'Ambrosio que afirma:

> Na comunicação oral nossos alunos utilizam uma linguagem natural e não formal que nos oferece um olhar mais profundo para o seu entender matemático. Sua facilidade em se expressar com linguagem oral pode revelar um conhecer ainda não formalizado em linguagem mais simbólica. (D'AMBROSIO, s/d, p.1).

Percebeu-se que além da dificuldade de interpretação, os alunos, em geral, não conseguem escrever suas conclusões. Estas dificuldades ficaram evidentes durante todo o desenvolvimento dessa pesquisa. Oliveira, denuncia tais fragilidades no ensino enfatizando que:

> Hoje, estou convencido de que as deficiências no uso da linguagem escrita e o pouco desenvolvimento da capacidade de compreensão da matemática, claramente detectados em observação diárias, não se configuram apenas como eventos simultâneos, como sintomas paralelos que indicavam que o sistema de ensino estava doente, mas, sim, que esses fenômenos estão intimamente ligados por uma relação causa-efeito: sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à apreensão de conceitos abstratos (e, portanto extremamente dependentes da linguagem que os constrói) nos seus diversos níveis, não pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático (também em seus diversos níveis). (OLIVEIRA, s/d, p.7)

O registro escrito numa investigação se constitui, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), num desafio adicional para os alunos porque exige um tipo de representação que não estão acostumados a utilizar.

Nos diários de bordo, os alunos relataram que sentiram dificuldade em realizar as atividades propostas, principalmente os cálculos, mas que mesmo assim gostaram de construir a Curva de Koch no computador.

As questões c e d não foram desenvolvidas em decorrência do horário combinado para o término do encontro e também porque os alunos estavam cansados. A continuação da atividade poderia desmotivá-los para os próximos encontros.

Esta primeira atividade investigativa com fractal produziu alguns resultados diferentes dos idealizados pela professora-pesquisadora e que diante dessas situações, percebeu-se a necessidade de flexibilização quanto às estratégias a serem aplicadas.

Quanto à flexibilidade do planejamento, Abegg e Bastos (2005, p.4) consideram que: “o planejamento geral deve ser flexível para adaptar-se aos imprevistos e às limitações anteriormente indiscerníveis. Tem por função também capacitar os professores para atuar mais adequadamente numa dada situação educativa”.

No quarto encontro participaram somente quatro alunos, quando foi desenvolvida a quarta atividade do material didático. Os objetivos da atividade foram: construir e identificar as características do fractal geométrico Floco de Neve, comparar e diferenciar as características do Floco de Neve e da Curva de Koch construída no encontro anterior, rever conceitos da geometria plana e proporcionar aos alunos o desenvolvimento de atividades investigativas.

Primeiramente cada aluno construiu o Floco de Neve seguindo as orientações da professora-pesquisadora que constam no material didático produzido. Durante a construção os alunos ainda tiveram dificuldades em construir a macro, mas essa foi bem menor que na atividade do encontro anterior.

Após a construção do fractal, Floco de Neve, formaram-se dois grupos para realizar as seguintes atividades investigativas:

Após a construção deste interessante fractal, chegou o momento de fazermos algumas investigações. Vamos lá!

a) Complete os dados das seguintes tabelas. Após, relate o que observou.

	Número de lados	Comprimento de cada lado	Perímetro
Nível 0			
Nível 1			
Nível 2			

	Área inicial	Área acrescida	Área total
Nível 0			
Nível 1			
Nível 2			

b) Investigue qual seria o valor do lado, do perímetro e da área da terceira iteração (nível 3). Não esqueça de relatar como chegou a este valor.

c) Descreva como ocorre o processo de iteração (lei de formação) desse fractal.

d) Observe este fractal e o anterior. O que você percebe?

e) Você poderia identificar este modelo de fractal em algo na natureza.

Quadro 3: atividade realizada no quarto encontro
Fonte: unidade didática

Percebeu-se que na primeira questão os grupos encontram dificuldades para perceber quais os cálculos que deveriam ser realizados, sendo necessárias várias intervenções.

Na segunda questão os dois grupos chegaram à conclusão que a melhor forma para contar os lados no nível 3 seria inicialmente completar um lado do Floco de Neve e depois multiplicar por três. Importante ressaltar que a construção desse fractal foi realizada apenas até o nível 2.

Na terceira questão observou-se que os grupos entenderam a lei de formação, no entanto, em seus relatos não conseguiram expressar-se claramente, escrevendo que: "*do triângulo equilátero foram feitos triângulos pequenos e cada vez mais fomos fazendo mais triângulos até formar a figura*".

Quanto à comparação entre o Floco de Neve e a Curva de Koch, os alunos identificaram a principal característica dos fractais e conseguiram expressar oralmente suas conclusões de forma correta. Conforme a fala de uma aluna: "*cada lado desse triângulo* [apontando para o triângulo inicial do Floco de Neve] *é a Curva*

de Koch". Nos escritos, entretanto, os alunos não expressaram com clareza suas ideias.

A última questão sobre o modelo de fractal na natureza, um grupo relatou que são semelhantes ao floco de neve.

Considerando a evasão ocorrida, principalmente no quarto encontro, foi realizado um levantamento dos motivos pelos quais os alunos não estavam comparecendo, através dos seguintes questionamentos:

1) Você está gostando de estudar matemática no laboratório de informática, de usar o GeoGebra?

2) O que está achando das atividades do projeto?

3) Justifique sua falta ao encontro do dia 06/10/10 e/ou de outros encontros?

Nas respostas observadas, os alunos afirmaram que estavam gostando de estudar no laboratório de informática, bem como das atividades que apontaram como legais e divertidas. Apenas um aluno escreveu que estava gostando razoavelmente do trabalho. Justificaram suas ausências alegando que precisavam ajudar os pais, cuidar da sobrinha, terminar os documentos ou que perderam o horário, saíram com o pai, estavam estudando música para a fanfarra ou simplesmente esqueceram.

Tendo em vista a ausência de muitos alunos, o convite para participar do projeto foi estendido a novos alunos, sendo que no quinto e último encontro participaram doze alunos. Desses, seis estavam participando pela primeira vez do projeto.

A quinta e última atividade do material didático objetivava construir e verificar as características do Triângulo de Sierpinski, proporcionar o desenvolvimento de atividades investigativas e rever conceitos de geometria plana.

Tendo em vista a presença de novos alunos, este encontro foi iniciado com novas explicações, de forma sucinta, sobre o conceito de fractal e suas características, para que os mesmos entendessem o que iriam fazer. Após a revisão inicial, cada aluno construiu, no GeoGebra, o fractal Triângulo de Sierpinski, até o segundo nível. Naturalmente, os novos alunos tiveram maior dificuldade tendo sido auxiliados pelos demais alunos e pela professora-pesquisadora.

Após a construção, foram formados cinco grupos, sendo solicitado aos alunos que estavam realizando as atividades pela primeira vez que se reunissem com os que já participaram dos demais encontros.

A atividade proposta era a seguinte:

Que tal fazermos algumas investigações explorando o Triângulo de Sierpinski!

Este fractal também foi construído através de nível, sendo o nível zero o triângulo equilátero inicial, conforme a figura:

Figura 37: processo de iteração do Triângulo de Sierpinski

a) Quantos triângulos existem em cada nível a partir do nível 1? Lembre-se que o triângulo central é retirado. Qual a relação existente a cada nível?

b) No nível 4, qual é o número de triângulos existentes? Como chegou a esse valor?

c) Colete os dados para a tabela seguinte. Investigue o que acontece com relação aos dados coletados.

	Número de lado	Comprimento de cada lado	Perímetro
Nível 0			
Nível 1			
Nível 2			
Nível 3			

	Área inicial	Área retirada	Área restante
Nível 0			
Nível 1			
Nível 2			
Nível 3			

d) Observe o Floco de Neve e o Triângulo de Sierpinski, e as respectivas atividades desenvolvidas. O que existe de semelhante e de diferente entre eles? Relate todas as suas observações.

e) Observe as figuras abaixo, a primeira você já conhece e a segunda é uma representação do Triângulo de Pascal. Encontre relações entre estas duas figuras, mas antes complete a sequência do Triângulo de Pascal.

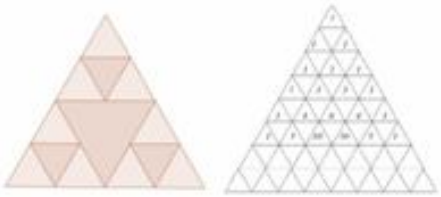

Figura 38: Triângulo de Sierpinski e Triângulo de Pascal

Quadro 4: atividade realizada no quinto encontro
Fonte: unidade didática

A primeira questão solicitava a contagem dos triângulos em cada nível e qual a relação existente. Os grupos estavam com dificuldades em registrar a contagem em cada nível, então foi sugerido aos alunos que fizessem uma tabela, o que facilitou suas observações. Após a intervenção da professora-pesquisadora, dois grupos conseguiram os valores fazendo a contagem, três fizeram através da multiplicação e outros três grupos conseguiram encontrar a relação existente entre o número de lados do triângulo através da potenciação. Desses, apenas um grupo não conseguiu observar que o expoente correspondia ao nível do fractal.

Na questão b quatro grupos conseguiram encontrar o número de triângulos através da multiplicação do número de triângulos do nível anterior por 3. Apenas um grupo não respondeu a questão.

A coleta de dados para a tabela e a investigação das relações existentes foi realizada apenas até o nível 2, tendo em vista o tempo para que as demais atividades fossem realizadas para este último encontro. Todos os grupos conseguiram preencher os dados, mas não encontraram as devidas relações.

Na questão d, todos os grupos relataram como característica comum dos dois fractais a repetição contínua. Com relação à diferença entre eles, não observaram ou pelo menos não descreveram, nenhuma diferença. Nesta atividade esperava-se que eles observassem, entre as diferenças, que para a construção do Floco de Neve, existe um fator de acréscimo. Consequentemente, o perímetro e a área serão maiores que o anterior. Isso não ocorre com o Triângulo de Sierpinski, tendo em vista que o fator é de redução e a cada nova iteração são retirados triângulos.

Na última questão todos os grupos conseguiram completar a sequência numérica do Triângulo de Pascal e observaram que o número um, forma dois lados desse triângulo. Quatro grupos conseguiram identificar no Triângulo de Pascal o Triângulo de Sierpinski e desses, apenas três grupos conseguiram observar que nos triângulos retidos do fractal, são números pares.

Após esta última tarefa investigativa, os alunos individualmente responderam a um questionário cujo objetivo era verificar o conhecimento adquirido e o desenvolvimento do projeto. Importante ressaltar que este questionário foi respondido por seis alunos que participaram do projeto pela primeira vez.

Com relação ao conteúdo fractal percebeu-se por meio do questionário que os alunos compreenderam o conceito de fractal, identificando sua presença na

natureza e suas principais características: auto-similaridade e a interação, que foram mais enfatizadas neste trabalho. A terceira característica, a dimensão fracionária, fora apenas citada e explicada sem aprofundamento, devido sua complexibilidade para esta faixa etária.

Questionados a respeito da dificuldade em realizar os cálculos nas atividades investigativas, três alunos afirmaram que não encontraram dificuldades, outros três que foi difícil e seis consideraram de dificuldade razoável.

Com relação à elaboração dos relatórios, seis alunos afirmaram que encontraram dificuldade, dois mais ou menos e três afirmaram que não encontraram dificuldades. Também foi questionado se já haviam estudado algum conteúdo e/ou atividade de matemática onde precisavam fazer relatórios descrevendo como foram desenvolvidos os cálculos e o raciocínio utilizado. Para esta questão, dos doze alunos somente um afirmou que já realizou relatórios dessa forma.

Indagados sobre a experiência de usar o software GeoGebra na confecção dos fractais todos relataram que gostaram. E sobre a participação no projeto, se este aumentou o interesse pela matemática, seis responderam que aumentou, cinco afirmaram que permaneceu o mesmo e um não respondeu.

Considerações finais

Este trabalho teve como foco o estudo dos três eixos: a geometria fractal, a investigação matemática e a geometria dinâmica, especialmente do software GeoGebra, utilizado como instrumento para a construção de alguns fractais geométricos. Ao se refletir sobre a amplitude e profundidade do estudo, acredita-se que sua maior contribuição é a inovação pedagógica que caracterizou todo o processo, a partir da proposta de articulação entre as tendências: mídias tecnológicas e investigações matemáticas.

A proposta se constituiu portanto, em uma experiência desafiadora, instigadora e laborosa para a professora-pesquisadora, resultando na ampliação de conhecimento pessoal sobre esses temas, mas sobretudo no fortalecimento da prática pedagógica, não só para o estudo dos fractais como para outros conteúdos matemáticos, tanto do ensino fundamental como médio.

Por meio da análise das atividades desenvolvidas conclui-se que, a construção dos fractais no GeoGebra além de motivar os alunos, possibilitou um processo de iteração de maneira rápida e objetiva, mesmo para os alunos com pouca habilidade nos recursos de informática. O computador na verdade, representou o principal fator de motivação e curiosidade inicial dos alunos para a participação no projeto, o que sinaliza para a necessidade de uma mudança na postura do professor e nos currículos escolares, a fim de atender as expectativas de um público que nasceu numa era digital.

O estudo desenvolvido apresenta indícios de que a metodologia das investigações matemáticas em sala de aula possibilita a exploração de ideias e a argumentação, representando um desafio no processo educativo, tanto para o professor, na criação de um ambiente favorável à investigação, como para o aluno, de quem se exige uma postura inquiridora e ativa. Do ponto de vista de ambiente de aprendizagem, o software GeoGebra potencializa a criação de situações que estimulam o raciocínio, a formulação de hipóteses e conjecturas, a simulação e a generalização, devido à rápida visualização e representação, contribuindo para a atribuição de significados no estudo de fractais e de outros conteúdos.

Destaca-se a importância de que na proposição de atividades desta natureza, seja estabelecido um contrato didático, deixando claras as obrigações mais imediatas e recíprocas, pois os alunos em geral, não estão acostumados a realizar atividades investigativas e/ou em ambientes informatizados.

Em relação às dificuldades na implementação ressalta-se o estranhamento dos alunos em trabalhar com investigações matemáticas, principalmente quanto à organização e o registro escrito dos resultados, de seus pensamentos e suas justificativas. Destaca-se também a resistência dos estudantes na realização de trabalhos em grupos, a falta de entrosamento e a ausência de discussão dos resultados.

Outro obstáculo foi a rotatividade e a falta de assiduidade dos alunos durante a aplicação do projeto, o que dificultou a aplicação da própria metodologia. A participação dos alunos em período contra-turno, não apresentou bons resultados, pois dos onze que iniciaram, cinco foram assíduos até o final do projeto, existindo um rodízio de novos alunos, o que dificultou o desenvolvimento das atividades.

Assim, considerando-se que a aplicação das atividades investigativas insere-se em papéis específicos, tanto para o docente, como para o aluno, essa

metodologia para ser melhor compreendida e para que seus objetivos sejam plenamente atingidos são necessárias várias experiências para seu fortalecimento enquanto prática pedagógica. Neste trabalho não foi possível verificar todas as possibilidades dessa metodologia, tendo em vista a rotatividade e a falta de assiduidade dos alunos participantes.

Entretanto, pode-se verificar que a articulação entre as mídias tecnológicas e a investigação matemática é possível e que tal articulação pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, sendo um campo amplo para novas pesquisas.

Referências

ABEGG, I; BASTOS, F. P. **Fundamentos para uma prática de ensino-investigativa em ciências naturais e suas tecnologias: exemplar de uma experiência em séries iniciais.** Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias vol. 4 nº 3, 2005.

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário.** Mestrado em Matemática para o Ensino. Universidade de Lisboa – Lisboa, 2007.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal:** para a sala de aula. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção Tendências em Educação Matemática, v.6)

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

D'AMBROSIO, B. **Leitura, escrita e educação matemática.** s/d. Disponível em: <http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais17/txtcompletos/conferencias/Beatriz_d_Ambrosio.pdf> Acessado em 23 mai. 2011.

EBERSON, R. R. **Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano.** Mestrado em Educação Matemática. PUC – São Paulo, 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. (Tópicos de História da matemática para uso em sala de aula; v.3). Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. da. **As actividades de investigação, o professor e a sala de aula de matemática**. 1999. Disponível em <http://www.amma.com.pt/cm/af29/trabalhos/s7/Textos/texto18.pdf>. Acessado em: 8 fev. 2010.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** IV Congresso RIBIE, 1998, Brasília - DF.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. **Como o usar a geometria dinâmica?** O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias. In: Anais do XXVI Congresso da SBC, 2006. Campo Grande – MS, 2006. p. 120-128.

JANOS, M. **Geometria fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

MANDELBROT, B. **Objetos fractais: forma, acaso e dimensão.** Lisboa: Gradiva,1991.

OLIVEIRA, A.F.F. **Dificuldades de aprendizagem da matemática: leitura e escrita matemática.** s/d. Disponível em: <http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica1.pdf> Acessado em 23 mai. 2011.

PAIS, L.C. Jogo pedagógico ou o contrato didático. In: _____.**Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. p. 77-87. (Coleção Tendências em Educação Matemática, v.3)

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede Pública da Educação Básica do Estado do Paraná** – Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Coleção Tendências em Educação Matemática, v.7)

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/fonseca-etc99.pdf> Acesso em: 23 ago. 2009.

PONTE, J.P. **Investigar, ensinar e aprender.** Actas do ProfMat, (CD-ROOM, p. 25-39). Lisboa: APM, 2003.