

Versão Online

ISBN 978-85-8015-054-4

Cadernos PDE

VOLUME I

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS
DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2009



SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
Superintendência da Educação
Diretoria de Políticas e Programas Educacionais
Programa de Desenvolvimento Educacional



CLECIMARA DA SILVA MEDEIROS

**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA NOVA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E
A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA**

**CASCADEL - PR
2011**

CLECIMARA DA SILVA MEDEIROS

**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA NOVA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E
A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA**

Artigo desenvolvido no Programa de Desenvolvimento Educacional PDE – 2009 como requisito para a conclusão do Programa.
ORIENTADORA: Prof^a Ms. Arleni Elise Sella Langer.

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA NOVA PERSPECTIVA PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA.

Autora: *Clecimara da Silva Medeiros*¹

Orientadora: *Arlení Elise Sella*²

Resumo

O artigo tem por finalidade apresentar uma reflexão sobre a metodologia de investigação matemática, mais especificamente no conteúdo da geometria. Essa reflexão ocorreu por meio da fundamentação teórica buscada em fontes bibliográficas e da execução do projeto de intervenção pedagógica na escola, atividade desenvolvida no ano de 2010 com os alunos dos terceiros anos do ensino médio. Os estudos que fundamentaram o trabalho relatam dificuldades na aprendizagem da geometria e a busca de soluções por meio da metodologia da investigação matemática – esses estudos descrevem inclusive algumas dificuldades em entender essa nova metodologia. Na sequência foram descritas e discutidas as atividades realizadas durante a implementação do projeto, que teve por objetivo proporcionar aos alunos condições para que se tornassem ativos em seu processo de aprendizagem, possibilitando uma nova visão sobre a construção do conhecimento matemático. As situações de investigações geométricas propostas partiam de atividades desafiadoras e do uso de materiais manipulativos, explorando a construção de conceitos geométricos, a compreensão das fórmulas e a apropriação da linguagem matemática. Na sequência fez-se uma reflexão sobre os resultados obtidos por meio da avaliação final e de todos os momentos das aulas de investigação, permitindo constatar que os objetivos foram alcançados, principalmente quando se leem os relatos dos alunos transcritos no artigo.

Palavras-chave: Geometria; Investigações matemáticas; Construção do conhecimento matemático.

¹ Pós-graduada em Ensino da Matemática. UNIPAR – campus Umuarama. Graduada em Matemática. UNIOESTE – *campus* Cascavel. E. Presidente Costa e Silva.E.F.M.Cascavel, PR. E-mail: clecimara@hotmail.com

² Mestre em Educação. Linha de Pesquisa Educação Matemática. UFPR. Graduada em Ciências com hab. em Matemática. UNIOESTE – *campus* Cascavel. Professora da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino em Matemática: Estágio Supervisionado I e integrante do Grupo de Pesquisa em Formação de Professores de Ciências e Matemática. E-mail: arleni.sella@unioeste.br

1 Introdução

No exercício do magistério, ao longo dos anos, sempre me inquietei com o desinteresse muito grande, por parte dos alunos, com a geometria e, principalmente, com o “esquecimento” que ocorria de ano para ano. Essa realidade enfrentada nas aulas de matemática foi minha principal motivação na tentativa de mudar a forma de ensinar, buscando novos métodos, que não valorizassem apenas fórmulas e regras, e sim a compreensão e construção de significados, especialmente com as turmas do ensino médio.

Uma das primeiras tentativas para mudar o quadro acima descrito foi sempre iniciar um novo conteúdo com a utilização de materiais manipulativos e/ou com situações-problema. E, na sequência, deduzir as fórmulas e sistematizar o conteúdo.

Percebi que essa forma de ensinar aumentou o interesse dos alunos e até aumentou os seus desempenhos nas avaliações, mas, durante a resolução de problemas e exercícios, eles raramente se “aventuravam” na busca de outros caminhos; se não soubessem que fórmula utilizar, a questão era logo abandonada ou resolvida escolhendo-se aleatoriamente uma das fórmulas conhecidas, apenas para não deixar a questão em branco. Ou seja, apresentavam resoluções sem nenhuma compreensão. Era o fazer por fazer.

A necessidade de encontrar alternativas para o ensino coincidiu com o fato de começar a ministrar a disciplina de Metodologia para o Ensino da Matemática em uma universidade particular. Essa atividade exigiu a pesquisa sobre as diversas metodologias de ensino, proporcionando-me uma reflexão contínua sobre a minha prática em sala de aula. Para trabalhar com a nova tendência metodológica proposta pelas diretrizes curriculares oficiais, as investigações matemáticas, li alguns artigos e, principalmente, o livro intitulado “Investigações Matemáticas em Sala de Aula”, de João Pedro da Ponte e outros autores. Surgiu então a ideia de utilizar essa nova metodologia em minhas aulas, mas não conseguia organizá-las e planejá-las sob essa perspectiva.

Nessa mesma época fiz a minha inscrição para o programa do PDE e percebi que essa seria a oportunidade de estudar mais sobre o assunto. Sabia que isso me daria subsídio teórico para tentar algo novo e muito desafiador, que pudesse

levar o aluno à reflexão e à construção de seu próprio conhecimento, tornando-o ativo no processo de ensino-aprendizagem. Identifiquei-me com o que é proposto nas Diretrizes Curriculares de Matemática:

Pela Educação Matemática, almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias. Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas, para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade. (PARANÁ, 2008, p. 48).

Motivada pelo desejo de tentar algo novo, mas, até certo ponto, sem muita segurança, elaborei o projeto de pesquisa com o tema "Investigação Matemática como Metodologia de Ensino em Geometria", que teve por objetivo propor uma reflexão sobre a metodologia de investigação matemática, mais especificamente no conteúdo da geometria. As pretensões incluíam proporcionar aos alunos condições para que eles se tornem ativos em seu processo de aprendizagem, bem como possibilitar uma nova visão sobre a construção do conhecimento matemático.

A implementação do projeto de intervenção pedagógica ocorreu no Colégio Estadual "Presidente Costa e Silva", localizado na cidade de Cascavel, no Paraná. As atividades propostas foram trabalhadas com os alunos do 3º ano A e do 3º ano B do ensino médio no período matutino, para aproximadamente 60 alunos. Foram planejadas situações de investigações em questões geométricas, que possibilitassem ao aluno perceber as relações geométricas a partir de atividades desafiadoras e do uso de materiais manipulativos. As atividades visavam também a exploração e a construção de conceitos geométricos, a compreensão das fórmulas e a apropriação da linguagem matemática. Buscavam reconhecer a importância da Investigação em Geometria como um processo que envolve o reconhecimento e a formulação de questões, a formulação de conjecturas, a realização de testes para comprovar ou rejeitar essas conjecturas e, por fim, a avaliação de todo o processo.

O presente trabalho apresenta um breve estudo bibliográfico sobre as causas das dificuldades na aprendizagem da geometria, bem como a busca de soluções por meio da metodologia de investigação matemática, embasada nos estudos de diversos pesquisadores nessa área. Posteriormente destaca-se o início das atividades de investigações e as pré-concepções dos alunos com relação ao

conteúdo. Na sequência tem-se o relato e a discussão dos achados nas atividades de investigações trabalhadas.

2 Desenvolvimento

2.1 As dificuldades na Aprendizagem da Geometria

A geometria é um dos conteúdos estruturantes do ensino da matemática, sendo considerada muito importante para a compreensão, a descrição e a interação com o espaço em que se vive. Deve-se considerar, no entanto, que, embora a geometria derive do mundo físico e tenha por objetivo resolver problemas reais, o que se observa é que muitos alunos não têm essa percepção e as ligações com esse mundo são ignoradas.

As dificuldades na aprendizagem da geometria e suas aplicações são facilmente percebidas nas aulas de matemática durante a resolução de problemas que envolvam tal conteúdo, pois poucos alunos conseguem estabelecer as relações necessárias para a resolução desses problemas. Nota-se que o pensamento geométrico se resume ao conhecimento de algumas formas e fórmulas que foram decoradas, sem, no entanto, a verdadeira compreensão do significado delas.

Sem a pretensão de realizar uma análise mais profunda sobre as causas das dificuldades de aprendizagem em geometria, apresentaremos algumas dessas causas apontadas por pesquisadores na área de Educação Matemática. Uma delas pode ser observada na seguinte citação: “A geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, desenvolvida de uma forma muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna” (PAVANELLO, 2008, p. 2).

Essa “exclusão” do currículo, mesmo que não oficial, provavelmente contribuiu significativamente para a pouca percepção espacial que os alunos possuem, bem como para a falta de conhecimento geométrico que permitiria a

abstração e a generalização de conceitos, que são um dos objetivos principais da geometria.

A geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da "capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível" – que é um dos objetivos do ensino da matemática – oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. (PAVANELLO, 2008, p. 3).

Outra possível causa é a concepção que professores e alunos possuem sobre a geometria, sabendo-se que a concepção é construída durante toda a vida escolar e não apenas nos cursos de formação de professores.

O papel de intermediário dos futuros professores, entre o currículo e os alunos, não vai ser o de simples transmissor de diretrizes e sugestões oficiais. Isto é, mesmo que tentem ser esse simples transmissor não vão conseguir, pois as suas concepções vão interpor-se em todas as tarefas que vão preparar ou realizar na aula. (BARRANTES e BLANCO, 2006, p. 2).

Essa concepção do professor, formada ao longo de sua vida escolar, pode influenciar de modo direto na concepção que o aluno terá da geometria, bem como no seu interesse pelo estudo dessa mesma matéria escolar. Isso talvez justifique o fato de muitos -- inclusive professores -- não "gostarem" dessa área do conhecimento da matemática.

Na busca de transformar o "gosto" e o interesse pela geometria, muitos educadores e professores, ao longo da história da Educação Matemática, pesquisaram novos métodos de ensino e um deles veio da influência da Escola Nova. Segundo Pais (2000), isso ocorreu com a utilização de materiais manipulativos, em que o "aprender fazendo" era o princípio dessa tendência, mas o que geralmente acontecia era um fazer empírico, sem qualquer reflexão sobre o conteúdo geométrico envolvido nas experiências com os materiais utilizados na aula.

As situações destacadas acima podem apontar para o fraco desempenho dos alunos e uma construção do pensamento geométrico com muitas lacunas. Essa deficiência fica evidente principalmente na aplicação desse conteúdo em outras áreas do conhecimento e na resolução de problemas.

2.2 A busca de soluções para enfrentar as dificuldades

Apontamos algumas possíveis causas das dificuldades de aprendizagem em geometria, mas apenas apontá-las sem a busca de soluções não resolve o problema. Partindo desse pressuposto, muitos educadores e pesquisadores realizaram estudos que visam tentar reverter a atual situação deficitária do ensino-aprendizagem da geometria. Os estudos apontam para metodologias que tornem o aluno ativo em seu processo de aprendizagem, oportunizando o desenvolvimento da criatividade e da imaginação.

Dentre outros, podemos destacar os estudos feitos por Abrantes (1999), que procura discutir a importância e a “facilidade” em trabalhar a geometria por meio de investigações. Segundo o autor citado, as atividades exploratórias e de investigações em geometria se justificam, pois:

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo. (ABRANTES, 1999, p. 4).

Segundo as Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica, do Estado do Paraná, “A prática pedagógica de investigações matemáticas tem sido recomendada por diversos estudiosos como forma de contribuir para uma melhor compreensão da disciplina em questão” (PARANÁ, 2008, p. 67).

É importante destacar que existem muitas dúvidas com relação a essa nova metodologia. Assim, em muitas conversas com colegas professores, uma questão sempre surge: -- Qual é a diferença entre resolução de problemas e investigação matemática? A citação a seguir talvez permita esclarecer essa dúvida:

Assim, na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada. (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 2000, p. 4).

Pode-se perceber que, na resolução de problemas, o resultado sempre é esperado, independente do caminho pelo qual se chegou a ele, enquanto que, na investigação matemática, o mais importante são os caminhos percorridos durante o processo, pois que a resposta nem sempre é conhecida e muitas possibilidades podem surgir no decorrer do percurso, sendo que “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 13).

Em uma aula de investigação matemática, o aluno é convidado a pensar matematicamente, pois “Investigar envolve formular questões, propor conjecturas, realizar testes para validar ou rejeitar essas conjecturas, avaliar a sua plausibilidade, encontrar provas da sua correção e levantar novas questões para investigar” (ROCHA; PONTE, 2006, p. 31). Sendo assim, a aula de geometria que utiliza a metodologia de investigação matemática parte do pressuposto de que:

A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver a capacidade, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 71).

Nesse sentido, ressaltamos que o trabalho com essa metodologia poderá proporcionar um novo olhar sobre a aula de matemática, bem como sobre o papel do professor e do aluno. A aula em que o professor ensina e o aluno aprende não cabe nessa metodologia, pois aluno e professor estarão “juntos”, buscando soluções ou, melhor, buscando caminhos diversos para as questões levantadas em sala. Vale destacar ainda que, nas aulas de investigação, “[...] o professor continua a ser um elemento-chave [...], cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 26).

O professor precisa selecionar ou criar atividades de investigação em que o aluno se sinta desafiado a se “aventurar” em busca das possíveis soluções para resolver as atividades propostas.

A parte introdutória de aula de investigação é fundamental, pois dela depende o “sucesso” ou não da atividade, visto que, nessa fase, o professor deixará claro para os alunos o que é investigar, bem como verificará se todos compreenderam o que está sendo solicitado na tarefa proposta. Por outro lado, o excesso de explicações também pode prejudicar o trabalho de investigação e até desmotivar os alunos na busca de caminhos e de estratégias. Vale ainda destacar a importância dessa fase no seguinte trecho:

Nesta fase de arranque é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma. Pode optar-se pela distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral que pretenderá, por um lado, clarificar a tarefa e explicitar o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações e, por outro, criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 2000, p. 6).

Após a seleção criteriosa das atividades e da fase introdutória da aula, em que “[...] o professor tem que garantir que todos os alunos entenderam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade” (PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2003, p. 26), cabe ao professor acompanhar todo o processo de desenvolvimento do trabalho investigativo, participando através de questionamentos desafiadores que estimulem os alunos a refletirem sobre a formulação e exploração das conjecturas.

O desenvolvimento do trabalho de investigação passa por algumas etapas, que são: “[...] a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho” (PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2003, p. 29).

A exploração e formulação de questões em turmas que não estão acostumadas com o trabalho de investigação pode exigir algum tempo até que todos adquiram uma atitude investigativa, principalmente no trabalho em grupo, pois precisam se familiarizar com a tarefa, principalmente na organização das ideias e das questões levantadas. Para tanto, o papel do professor como orientador é fundamental, pois “Diversas são as situações em que o professor é chamado a

intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 2000, p. 7).

A formulação e o teste das conjecturas é o ponto culminante do trabalho investigativo, pois é nessa fase que os alunos se tornam exploradores e são chamados a agir como matemáticos, buscando regularidades e testando-as. É importante, nessa fase, o registro das conjecturas e dos testes, pois “É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas idéias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 33).

Após os caminhos percorridos na aula de investigação, será necessário justificar as conjecturas e avaliar todo o processo, testando todas as possibilidades, bem como partir para novos caminhos, envolvendo a formulação de outras questões.

O professor precisa também estar atento ao processo de justificar as conjecturas, pois é nessa etapa que o aluno poderá perceber o “caráter provisório das conjecturas” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 38).

E, para finalizar, o professor deve proporcionar momentos de discussões do trabalho de investigação, pois:

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perde o sentido da investigação. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Sendo assim, o professor tem um papel fundamental no fechamento de cada atividade de investigação, cabendo-lhe mediar as discussões finais, a fim de que todos consigam expressar os caminhos percorridos e os resultados alcançados, permitindo assim “[...] uma sistematização das principais idéias e uma reflexão sobre o trabalho realizado” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p.41). É nessa fase que o professor deve estimular os alunos a explicitarem suas ideias, argumentando

e defendendo cada uma delas, bem como estimular os questionamentos, entre todos os grupos, confrontando as conjecturas e as estratégias para validá-las.

A realização de atividades de cunho investigativo na área de geometria poderá contribuir para a aprendizagem de forma significativa e possibilitar a formação de uma nova concepção, tanto para alunos como para professores.

2.3 Início das atividades e as pré-concepções dos alunos

A elaboração do projeto e do material didático pedagógico teve por objetivo propor situações de investigações geométricas para aplicação em sala de aula. Foram selecionadas situações que possibilitassem ao aluno perceber as relações geométricas a partir de atividades desafiadoras e do uso de materiais manipulativos.

Para a implementação do material didático em sala de aula foi proposta uma conversa inicial com os alunos a fim de conhecer as expectativas frente à nova metodologia e, principalmente, conhecer as pré-concepções em relação à geometria.

Durante essa conversa com os alunos do 3º ano A, percebeu-se que muitos não expressavam suas ideias, poucos falavam e não foi possível identificar que conhecimento geométrico eles possuíam de fato. Optou-se, portanto, pela realização de mapas conceituais em duplas, em que, a partir do tema geometria, eles deveriam escrever, em forma de tópicos, tudo o que entendessem que estivesse relacionado com o tema. Após isso, deveriam elaborar um pequeno texto explicativo. Ao término dessa atividade foi construído um mapa conceitual coletivo no quadro com a participação de um aluno de cada dupla. E, para encerrar essa atividade, foi feita uma “mesa redonda”, para a discussão das ideias colocadas no mapa coletivo.

Foi possível perceber que a grande maioria dos alunos tinha um conhecimento geométrico muito limitado, em que os conceitos se resumiam a nomenclaturas e somente da geometria plana, sendo praticamente isolados uns dos outros. Uma dupla, após a elaboração do mapa escreveu: *“Na geometria estudamos*

figura geométricas como quadrados, triângulos e círculos. No triângulo temos o cosseno, a tangente e o seno”. Provavelmente essa última informação relacionada à trigonometria ocorreu pois eles estavam estudando geometria analítica e utilizavam os conhecimentos trigonométricos.

Outra dupla escreveu: *“Na geometria estudamos um pouco de tudo, mas especificamente estudamos pontos e retas, raio e diâmetro. Tem também a circunferência, estudos dos círculos ou área. E no teorema de Pitágoras tem várias coisas como cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa, seno, cosseno, tangente e o ângulo, seu cálculo, entre muitos outros”*.

Pode-se perceber um ensino basicamente euclidiano, mas uma aprendizagem cheia de lacunas e de incoerências. Essa observação, após a realização dos mapas e textos elaborados pelos alunos, possibilitou mais a reflexão sobre a realidade da “exclusão” da geometria do currículo escolar, bem como sobre o ensino e a aprendizagem da geometria “[...] desenvolvida de uma forma muito mais formal a partir da introdução da Matemática Moderna” (PAVANELLO, 2008, p. 2).

Outro ponto que vale a pena destacar é que nenhum aluno relacionou a geometria com outras áreas da atividade humana, revelando novamente um ensino e uma aprendizagem formal, distante de seus contextos e muito livresca.

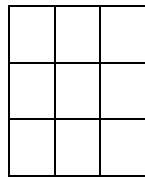
O Ensino de geometria, tal como se apresenta na maioria dos livros didáticos, parece ainda seguir o modelo euclidiano. Começa de premissas e definições como ponto, reta e plano, a partir das quais estrutura-se o conhecimento geométrico. A geometria apresentada e estruturada apenas como um conjunto de leis bem determinadas sempre me incomodou, pois assusta e faz com que os alunos tenham a falsa idéia de que nunca se relacionaram com absolutamente nada a respeito do que estão aprendendo. (CRISTOVÃO, 2001, p. 51).

2.4 Descrição e discussão das atividades desenvolvidas

As atividades trabalhadas durante a implementação do projeto foram desenvolvidas em duplas e serão descritas uma a uma ou em blocos nos quais duas atividades que se complementam foram reunidas visando facilitar a compreensão do leitor. Na sequência serão relatados os desenvolvimentos das aulas de investigações.

Na elaboração do material didático foram planejadas treze atividades de investigações geométricas, sendo que a primeira tinha por objetivo a familiarização com a nova metodologia. Para isso foram utilizadas duas aulas geminadas, sendo apresentada a proposta de trabalho e feita uma explanação sobre o que é investigar e quais os passos de uma aula de investigação. Após essa explanação e a resposta aos questionamentos dos alunos, percebeu-se que muitos ficaram “preocupados” com essa nova “ideia”, pois não sabiam ao certo o que deveriam fazer e o que seria esperado deles. Isso foi muito natural, pois nunca tinham estudado dessa forma.

1ª Atividade: O quadrado abaixo foi construído com palitos de fósforos.



- 1) Quantos palitos de fósforos foram utilizados para construir o quadrado acima? E quantos palitos são necessários para construir um quadrado com 4, 5, 6 ou 8 palitos de lado?
- 2) Quantos palitos são necessários para construir qualquer quadrado?

Essa primeira atividade dos quadrados com fósforos, descrita acima, deixou a todos muito empolgados. Rapidamente começaram a resolver, mas não registravam nenhuma conjectura. Alguns alunos realizaram os cálculos até um número x de palitos; outros observaram apenas os padrões e regularidades, mas não conseguiram generalizar. Nesse momento a professora interrompeu a atividade e novamente explicou a importância de levantarem conjecturas e testá-las. Só após esse momento as duplas começaram a escrever e partiram em busca da generalização. Várias tentativas foram surgindo. Uma dupla escreveu: “Fazendo lado vezes altura ao quadrado, $L.H^2$. Mas logo perceberam que não seria possível e escreveram: “Só que não dá o resultado correto em todos os casos”. Outro grupo

escreveu: *“Do primeiro para o segundo quadrado a diferença é de 8. A diferença do 2º para o terceiro é 12. Do 3º para o 4º é 16. E a diferença do 4º para o 5º é 20. E essas diferenças são múltiplos de 4. E as diferenças das diferenças é 4.”*

Percebeu-se que essa atividade motivou a maioria dos alunos, principalmente quando foram estimulados a resolverem a questão "2", que necessitaria da “descoberta” da fórmula. Conforme avançavam em suas deduções, a empolgação também aumentava, e chamavam a professora para contar as suas descobertas. Queriam inclusive explicar para as outras duplas que ainda não tinham conseguido generalizar.

Ao término da atividade foi realizada uma mesa redonda e eles discutiram as descobertas, explicando o que fizeram. Alguns foram ao quadro para expor melhor a toda a turma. Uma dupla, que tinha conseguido deduzir a fórmula, disse: *“Se contarmos na vertical e na horizontal daria o resultado e descobriríamos a quantidade de palitos. Mas com um valor grande não daria para contar. E fazendo uma conta, podemos saber o resultado sem precisar contar. Exemplos: Pegando o número de palitos do lado e multiplicando pelo seu sucessor, dá a metade dos palitos. Multiplicando por 2 dará o resultado final de palitos”*. E outro aluno veio ao quadro e escreveu a fórmula que tinha escrito, seguindo o mesmo raciocínio da dupla anterior, ou seja: $p(p+1) + p(p+1)$. Nesse momento a professora questionou se seria possível escreverem essa fórmula de outra forma. Um aluno foi ao quadro e simplificou a fórmula escrevendo, p^2+p+p^2+p e, na sequência, com a ajuda de outros alunos da sala, chegou à fórmula $2p^2+2p$.

A primeira atividade de investigação superou as expectativas, principalmente no momento da discussão final, pois a empolgação dos alunos gerou até mesmo algumas discussões entre eles, pois todos queriam falar sobre suas descobertas. Foi nesse momento que a intervenção da professora foi importante para que eles entendessem o que é investigar e a importância de se comunicarem matematicamente, bem como do poder de argumentação. Quando comentamos que eles estavam fazendo o que os matemáticos fazem, a reação foi imediata, muitos comentários surgiram, tais como: *“É isso aí, professora, nós somos bons mesmo”*.

Essa superação, por parte dos alunos, provavelmente se deve ao papel do professor no planejamento e na condução da atividade de investigação. A elaboração das atividades de investigação exige do professor uma atitude de

investigação. Na primeira atividade percebeu-se que o planejamento, bem como a intencionalidade e os objetivos bem definidos, possibilitou à professora maior segurança e, por consequência, um envolvimento maior por parte dos alunos. Outro fator importante foi a experiência do professor no planejamento e a condução da aula, o que facilitou o trabalho.

O momento final da investigação, no qual as discussões foram realizadas e os alunos expuseram as suas conjecturas e justificações, contribuiu principalmente para desafiar e motivar os alunos na construção de seu próprio conhecimento. Percebeu-se também a importância do papel do professor:

O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também a sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. É, ainda, um momento privilegiado para despertar os alunos para a importância da justificação matemática das suas conjecturas. No caso de alunos ainda pouco familiarizados com as investigações, o modelo que o professor possa oferecer nessa fase da aula é determinante para que esses comecem a perceber o sentido de uma demonstração matemática. (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Para facilitar a compreensão do leitor quanto aos achados das atividades, considera-se importante expor o roteiro proposto, ainda que sinteticamente. As atividades dois e três são apresentadas, sendo que as discussões e os comentários encontram-se na sequência.

2ª Atividade:

- 1) Construa, no papel quadriculado, diversos retângulos de tamanhos diferentes e calcule o perímetro e a área de cada um deles, utilizando os quadradinhos como unidade de medida.
- 2) Construir uma tabela para registrar os valores:

| | Comprimento | Largura | Área | Perímetro |
|-------------|-------------|---------|------|-----------|
| Retângulo 1 | | | | |
| Retângulo 2 | | | | |
| Retângulo 3 | | | | |

- 3) O que você conseguiu observar? Construa mais retângulos que tenham áreas iguais. O que você pode concluir?

- 4) Diante de suas conclusões, discuta sobre a importância desse conhecimento em outros campos da atividade humana.

3ª Atividade:

- 1) Construir, em folha de papel quadriculado, duas de cada uma das seguintes figuras geométricas planas: quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio e triângulo.
- 2) Calcular a área de cada uma delas, utilizando como unidade de medida os quadradinhos da folha. Supondo que cada quadrado tenha medida l , determinar a área em função de l .
- 3) Agora complete a tabela abaixo e investigue sobre a relação entre as medidas e o cálculo da área.

| Quadrilátero | Comprimento (base) | Altura | Largura (lado) | Área |
|---------------|--------------------|--------|----------------|------|
| Quadrado | | | | |
| Retângulo | | | | |
| Paralelogramo | | | | |
| Trapézio | | | | |

- 4) Desenhe um paralelogramo e, recortando, tente formar um retângulo. Com relação à área, o que é possível afirmar?
- 5) Desenhe e recorte dois trapézios que possuam as mesmas dimensões. Faça composições com esses trapézios e estabeleça conjecturas.

A atividade 2 tinha por objetivo estabelecer a relação entre comprimento (base) e largura (altura) e o cálculo da área de retângulos; bem como, investigar se, em retângulos diferentes que tenham a mesma área, o perímetro se conserva. Para a realização dessa tarefa, as duplas receberam uma folha com a atividade. Na sequência a professora fez uma breve explanação sobre a atividade proposta, sem se deter excessivamente em minúcias, para que os alunos não perdessem o interesse, sabendo que a interpretação da atividade proposta já faz parte da atividade de investigação: “Não devemos esquecer que a interpretação da tarefa deve ser, ela própria, um dos objetivos dessas aulas, pelo que, gradualmente, deve esperar-se que o aluno a realize autonomamente ou com os seus colegas” (PONTE, BROCARDI e OLIVEIRA, 2003, p. 28).

Após esse momento, os alunos iniciaram a atividade, mas novamente eles apresentaram resistência para escreverem as conjecturas. Alguns prontamente se

empenharam a resolver a atividade, considerando-a de fácil resolução. O que chamou a atenção durante a realização da segunda atividade é que nenhum aluno sabia que retângulos com a mesma área podem possuir perímetros diferentes.

Durante toda a atividade a professora passava questionando sobre as conjecturas e a validação dessas conjecturas, excluindo hipóteses que não se confirmavam e sofisticando as que persistiam. Um aluno logo observou, por meio da tabela, que, se mantivesse a mesma largura e, aumentando-se uma unidade no comprimento, a área aumentava de dois em dois. A professora então questionou o que aconteceria se a largura fosse aumentada três ou quatro unidades. Uma aluna afirmou que essa era uma nova conjectura, que exigia uma nova investigação e motivou o grupo a escrever as novas hipóteses, para depois testá-las. Pode-se constatar que a tabela nessa atividade favoreceu a observação das regularidades.

A atividade três foi proposta em outra aula, e o objetivo era investigar as relações entre as medidas dos elementos que compõem um quadrilátero e o cálculo da sua área. A metodologia foi a mesma da atividade dois e, incentivados pela professora, todos tentaram encontrar a fórmula para o cálculo da área de todas as figuras, porém, nenhuma dupla, ao contrário do ocorrido na atividade anterior, utilizou a tabela para encontrar a área. Escreviam suas conjecturas observando apenas as figuras desenhadas no papel quadriculado.

No cálculo da área do paralelogramo alguns alunos estavam calculando o produto do comprimento pelo lado, mas, quando questionados pela professora se a diagonal desenhada na folha tinha a mesma medida do lado, logo perceberam o erro, e partiram para novas conjecturas.

Dois grupos encontraram dificuldades para calcular a área do losango e do trapézio e desistiram das investigações. Logo chamaram a professora solicitando que a professora passasse logo a fórmula que era mais fácil do que tentar descobrir. Mesmo estimulados pela professora, o avanço foi quase insignificante. Para os demais grupos essa dificuldade foi a principal motivação para continuarem a investigação, e a manifestação foi imediata, tais como: *“Não passa a resposta não, professora; agora que estamos quase conseguindo”* ou *“agora que tá ficando interessante”*. Uma dupla chamou uma diagonal de comprimento e a outra diagonal de largura e sua conjectura inicial foi calcular o produto do “comprimento” pela “largura”. Quando foram testar a conjectura logo perceberam que seria sempre a

metade e chegaram à dedução de que a área do losango era igual à metade do produto do “comprimento” pela “largura”.

No cálculo da área do trapézio, muitas conjecturas surgiram. Um grupo escreveu que a área seria o produto da base pela altura menos duas unidades. A professora questionou se eles tinham testado essa conjectura e, prontamente, afirmaram que sim e dava certo. Quando, no entanto, foram expor, verificou-se que eles estavam contando a área de meio quadrado com se fosse um quadrado inteiro. Foi aí que perceberam o erro, mas não conseguiram chegar à conclusão correta. Outro grupo logo percebeu que essa figura tinha dois comprimentos e chamou de x e y e escreveram: Juntando a área de dois trapézios temos a área de um paralelogramo, então a área de um trapézio é a área da metade de um paralelogramo. Ou seja a área do paralelogramo é $(x + y) \cdot h$ e a área do trapézio é $(x+y) \cdot h/2$.

Nessa situação percebeu-se a importância do momento de justificação de uma conjectura, conforme já apontava João Pedro da Ponte e outros autores em seu livro "Investigações Matemáticas na Sala de Aula":

A justificação ou prova das conjecturas é uma vertente do trabalho investigativo que tende, com alguma frequência, a ser relegada para segundo plano ou até mesmo a ser esquecida, em especial nos níveis de escolaridade mais elementares. No entanto, é fundamental, para que o processo investigativo não saia empobrecido, que o professor procure levar os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas. Se, por um lado, é necessário insistir na realização de testes de conjecturas e se, de fato, uma conjectura parece tornar-se mais credível à medida que resiste a sucessivos testes, só por si, não confere o estatuto de conclusão aos seus resultados. (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2003, p. 37-38).

Depois da realização das atividades dois e três, novamente foi realizada uma mesa redonda para todos apresentarem as conjecturas, explicarem os caminhos percorridos para testá-las e os resultados alcançados. Algumas duplas, quando não conseguiam provar uma conjectura, abandonavam-na e partiam para outra questão. Durante as explanações muitos alunos utilizavam o quadro para exporem suas ideias e tentavam convencer os colegas, até mesmo quando estavam errados. Nesse momento a professora, por meio de questionamentos, promovia a reflexão e o debate com todos os alunos. Esse foi um momento muito importante da

aula, no qual os alunos conseguiram argumentar matematicamente e discutir suas ideias, o que não ocorria nas aulas tradicionais de matemática.

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 41).

4ª Atividade:

Essa atividade tinha por objetivo promover a familiarização com as principais funções do *software* Geogebra. A sala foi dividida em duplas para desenvolver as atividades no laboratório de informática. Foram propostas diversas atividades em que os alunos deveriam seguir o tutorial e explorar o *software* Geogebra. Foi uma atividade relativamente simples. Cada vez que não conseguiam utilizar uma das ferramentas do *software* solicitavam ajuda da professora ou dos colegas e assim conheceram as principais ferramentas e suas utilidades.

Para conhecer e explorar todo o *software* seria necessário um tempo muito maior, no entanto, nessa aula, os alunos tiveram apenas noções básicas e muitas dúvidas ainda ficaram. Outro fator que restringiu o melhor aproveitamento da turma foi o número limitado de computadores, pois se observou que o aluno que não estava trabalhando diretamente no programa não se interessava muito no desenvolvimento das atividades propostas. O laboratório de informática possui 20 computadores, sendo que existe um CPU³ para quatro telas, sendo todos ligados em rede, inclusive a mesma rede da secretaria da escola. Esse fato torna a execução do programa mais lenta, prejudicando o trabalho com alguns *softwares* e gerando desmotivação.

Ao retornarem à sala, novamente foi realizada uma pequena discussão sobre a atividade realizada no laboratório. A maioria dos alunos não demonstrou muito interesse, sendo que a maior argumentação foi com relação ao tempo, pois gostariam de ficar mais aulas para explorar melhor o *software*. A professora informou

³ CPU - *Central Processing Unit* (**Unidade Central de Processamento**, em português) ou o **processador** é a parte de um sistema de computador que executa as instruções de um programa de computador e é o elemento primordial na execução das funções de um computador.

que retornariam ao laboratório para trabalhar uma atividade específica de investigação em outro momento.

5ª e 6ª Atividades:

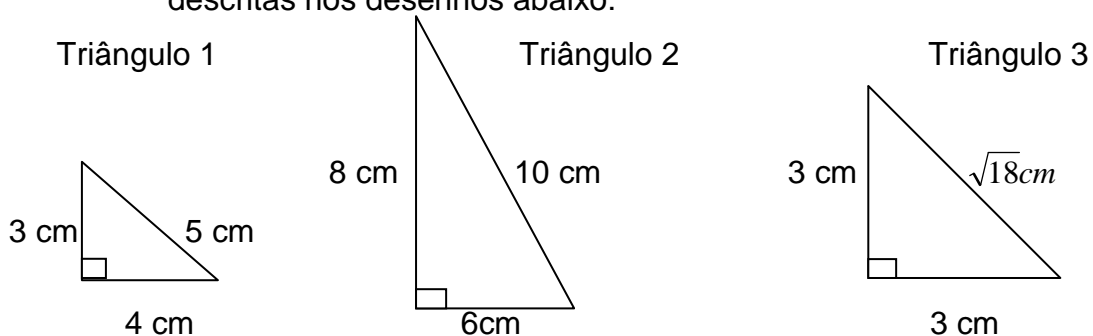
Essas duas atividades pretendiam explorar a investigação das relações entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, deduzindo a fórmula do teorema de Pitágoras, bem como investigar a validade do teorema de Pitágoras para outras figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo.

Nas duas atividades os alunos deveriam construir triângulos retângulos de tamanhos diferentes e, na sequência, construir quadrados sobre os lados desses triângulos. Por meio das figuras, do cálculo da área e da construção de tabelas, cada dupla estabeleceria suas conjecturas com o objetivo de deduzir a fórmula do teorema de Pitágoras.

Foi proposta também a investigação se a relação entre as áreas de figuras construídas sobre os lados do triângulo retângulo é válida para outras figuras planas, tais como: triângulos equiláteros, retângulos, hexágonos, paralelogramos, semicírculos, entre outros.

A atividade cinco foi realizada com a utilização de material de desenho e das questões expostas a seguir:

- 1) Construa, em uma folha, os triângulos retângulos cujas dimensões estão descritas nos desenhos abaixo:



- 2) Sobre cada um dos seus lados, construa quadrados e calcule a área desses quadrados.
- 3) Complete a tabela abaixo e investigue as relações entre as áreas de cada um dos quadrados construídos sobre os lados de cada triângulo.

| Áreas dos quadrados Triângulos | Cateto | Cateto | Hipotenusa |
|-----------------------------------|--------|--------|------------|
| Triângulo 1 | | | |
| Triângulo 2 | | | |
| Triângulo 3 | | | |

4) Construa outros triângulos retângulos escolhendo outras medidas para os catetos. Calcule a área e continue investigando as relações entre elas.

5) Investigue se essas relações são válidas para outras figuras planas construídas sobre os lados dos triângulos.

Para a realização dessa atividade foram necessárias duas aulas. Como todos já conheciam o teorema de Pitágoras, logo concluíram a primeira parte da investigação, que abrangia as questões de um a cinco. O que gerou um pouco de dúvida foi o preenchimento da tabela, pois todos solicitaram informação sobre como completá-la. Nesse momento, a professora explicou para eles preencherem com a medida da área dos quadrados construídos sobre os catetos e sobre a hipotenusa. Verificou-se que a apresentação da atividade não estava clara, particularmente o preenchimento da tabela, necessitando de melhorias para sua utilização em outra aula de investigação, o que possibilitaria sua exploração de modo mais autônomo por parte dos alunos.

Na investigação da validade do teorema de Pitágoras para outras figuras construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, as duplas levaram mais tempo. Foi, contudo, foi nesse momento que as duplas se empenharam mais e muitas hipóteses surgiram. Uma dupla logo escreveu: *“O Teorema de Pitágoras é válido para o retângulo e para o triângulo equilátero quando construídos sobre os catetos e sobre a hipotenusa”*. Questionados se eles tinham verificado a afirmação para mais de uma figura, responderam que não e prosseguiram nas verificações. Então escreveram: *“Para dar certo no retângulo é necessário haver uma proporcionalidade entre as áreas”*. Outra dupla nessa mesma questão afirmou: *“Só é possível calcular se o lado do retângulo é múltiplo da aresta dos catetos e da hipotenusa”*. Após essas descobertas, a professora os incentivou ao aprofundamento dessa questão e a investigação das demais figuras. Pelo fato de se sentirem verdadeiros “pesquisadores”, partiram prontamente em busca dos novos desafios.

Logo as dúvidas começaram a surgir: *“Professora, como se calcula a área do triângulo equilátero? e do hexágono?”*. Foi necessário decidir rapidamente se o melhor seria encerrar a atividade nesse momento e iniciar a atividade sete, que tratava das áreas desses polígonos, ou se explicar rapidamente como calcular a área dessas figuras seria a escolha mais adequada, pois assim não se trabalharia a sétima atividade. Optou-se por fornecer as informações necessárias ao cálculo das áreas, para não desmotivar os alunos e não perder o objetivo da atividade, pois faz parte do papel do professor em uma aula de investigação fornecer e recordar informações pertinentes para o desenvolvimento da aula, conforme asseveram Ponte et alii: *“Outro aspecto do trabalho do professor é proporcionar informação útil aos alunos, ajudando-os a recordar ou a compreender conceitos matemáticos e formas de representação importantes”* (2000, p. 19).

Esse fato permitiu que todos conseguissem continuar na atividade investigativa e muitas hipóteses surgiram. Logo perceberam que a relação permanecia a mesma para triângulos equiláteros e para hexágonos, mas as dificuldades surgiram para triângulos quaisquer, triângulos retângulos e semicírculos. Uma dupla escreveu: *“É difícil chegar a um acordo com a área do semicírculo, mas a área do triângulo dá certo quando for proporcional”*.

A sexta atividade, conforme comentado anteriormente, teve os mesmos objetivos da anterior, mas foi desenvolvida no laboratório de informática. Os alunos deveriam desenvolver as investigações seguindo um tutorial que se encontra na unidade didática.

Os objetivos dessa atividade não foram plenamente alcançados. O primeiro obstáculo foi a falta de familiaridade com o *software*. Constantemente os alunos solicitavam a presença da professora para a utilização das ferramentas, demorando demasiadamente na atividade. Ao término da aula, poucas duplas tinham conseguido concluir a atividade e mesmo os que terminaram não demonstraram muito interesse. Outra possível causa da desmotivação da turma pode ser que essa atividade já tinha sido feita em sala de aula.

A pergunta norteadora da pesquisa de Norma Allevalo, descrita em artigo publicado em 2008, chama a atenção por assemelhar-se à problemática vivenciada: *“De que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática quando estão utilizando*

o computador na resolução de problemas fechados sobre funções?” (p. 185). A autora percebeu que, na realidade, em decorrência de sua pesquisa, emergiram relações que poderiam permitir estabelecer um paralelo entre as atividades que os alunos realizavam em sala de aula e as que executavam no laboratório de informática. A reflexão a respeito de quais as verdadeiras razões para o desinteresse dos alunos ao realizarem a mesma atividade no laboratório de informática, assim como a busca por uma metodologia que permitisse identificar as razões que contribuíram para tal postura, poderia provavelmente gerar diversas pesquisas acadêmicas.

Prosseguindo o relato das atividades, descrevem-se as considerações a respeito das investigações que vinham sendo realizadas.

Optou-se pela realização de um único debate envolvendo a quinta e a sexta atividade. Isso prejudicou um pouco as discussões, eles não lembravam mais dos detalhes e a “empolgação” que ocorrera na realização da quinta atividade não estava tão evidente. Mesmo assim, muitos defenderam suas conjecturas e, quando um aluno ia ao quadro para explicar, todos prestavam atenção e participavam expondo suas ideias. Quando questionados sobre a mesma atividade feita no laboratório de informática, o descontentamento foi grande. A maior sugestão foi para irem mais vezes no laboratório para conhecer melhor o programa, pois não conseguiram realizar todas as questões propostas. Um aluno afirmou: *“Professora, é legal, mas eu não entendi direito”*.

Sendo assim, percebeu-se que, para uma atividade de investigação no laboratório de informática utilizando *softwares*, seria necessário um planejamento mais adequado e um tempo maior para a familiarização com o programa e para a resolução das questões propostas.

8ª atividade:

Pretendia-se, com a oitava atividade, investigar a relação existente entre os números de arestas, de faces e de vértices dos poliedros convexos, e possibilitar a percepção da importância dos elementos da história da matemática. Para isso foram distribuídos, às duplas, objetos que possuíam a forma de poliedros convexos, para que, em seguida, completassem uma tabela com o número de faces, arestas e vértices de cada objeto e assim estabelecer a relação entre esses elementos. A

atividade foi resolvida rapidamente por todas as duplas e, apesar da facilidade, todos se empenharam e permaneceram motivados com as aulas de investigação.

Durante a explanação da atividade em forma de mesa redonda não houve discussões, pois todas as duplas “descobriram” a relação de Euler, que envolve os poliedros convexos. A única diferença entre as duplas foi a forma de apresentar a fórmula.

A realização de todas as atividades planejadas na unidade didática estava ultrapassando o tempo previsto. Decidiu-se então não realizar a nona atividade, que pretendia investigar as características para a classificação de poliedros e de polígonos em regulares e irregulares. A professora optou por utilizar alguns momentos da aula para expor a diferença entre objetos regulares e não regulares, utilizando materiais manipulativos. Em seguida se propôs a próxima atividade.

10ª atividade:

Os objetivos da décima atividade eram investigar a área dos seguintes sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cones e cilindros; e possibilitar a percepção da importância da generalização para o cálculo da área de sólidos geométricos. Para tanto foram distribuídos objetos diversos que possuíam as formas dos seguintes sólidos geométricos: prismas, pirâmides, cones e cilindros. A sequência propunha:

- 1) Utilizando os conhecimentos de área de geometria plana, é possível calcular a quantidade de papel (em cm^2) suficiente para revestir cada objeto que está sobre a mesa?
- 2) É possível calcular a área de qualquer objeto semelhante aos da mesa, sabendo somente as suas dimensões? Justifique.
- 3) Quais foram as dificuldades encontradas? Discuta, com outras duplas, sobre as conjecturas estabelecidas para solucionar as questões 1 e 2.

Novamente eles iniciaram a atividade fazendo os cálculos, sem se preocupar com a generalização e com o registro de suas hipóteses. Percebendo isso, a professora solicitou que anotassem as ideias e tentassem generalizar. Questionou muito os grupos sobre a importância da validação para todos os objetos que

possuísem a mesma forma. Só então alguns grupos se empenharam em busca das “fórmulas”.

O cálculo da área dos prismas foi encontrado por todos os grupos. Alguns grupos inclusive verificaram a diferença entre paralelepípedos e prismas de bases regulares, estabelecendo fórmulas distintas. Na investigação das pirâmides, o tempo gasto foi maior, principalmente devido às provocações da professora, tais como: “*Como faríamos para descobrir a área lateral se só tivéssemos a medida da aresta da base e da altura?*”. Esses questionamentos e dificuldades, conforme ocorreu em outras aulas, motivaram muitas duplas, mas algumas ainda pediam para a professora “*passar logo a fórmula que assim era mais fácil*”.

A maioria dos alunos já estava acostumada com as aulas de investigação e com as insistentes questões da professora, e até brincavam: “*lá vem à professora com suas perguntas*”. Isso é fundamental nesse tipo de atividade, pois:

Uma das grandes vantagens de apresentar uma postura interrogativa nas aulas com investigações é o fato de ajudar os alunos a compreenderem que o papel principal do professor é o de apoiar o seu trabalho e não simplesmente validá-lo. (PONTE, BROCARDI e OLIVEIRA, 2003, p. 52).

A professora decidiu iniciar as discussões após as descobertas das áreas dos prismas e das pirâmides, deixando a investigação de cones e cilindros para a aula seguinte, para não perder os detalhes da aula. O debate foi surpreendente, pois aqueles que tinham avançado mais em suas descobertas queriam logo expor suas ideias e os demais ficaram mais atentos às explicações dos colegas do que em uma aula expositiva.

Na aula seguinte foram distribuídos cilindros e cones construídos de diversos materiais, madeira, papel e acrílico a todas as duplas para a continuação da atividade. Na investigação do cilindro, após várias tentativas e vários questionamentos, todos descobriram como calcular a área, no entanto foi necessário lembrar-se de como se procede para obter o comprimento da circunferência. As maiores dúvidas surgiram com os cones. A professora desmontou um cone de papel para que observassem que figuras planas o compunham. Nesse momento houve discussão, pois uns falavam que era um triângulo, outros “*uma fatia de pizza*”. Foi necessário parar a investigação e explicar o que era um setor circular. Se houvesse

mais tempo, isso possibilitaria outra questão para ser investigada. Não houve tempo para o debate nessa aula e optou-se por não fazê-lo, pois já haviam discutido, enquanto a professora explicava, como calcular a área do setor circular e do comprimento da circunferência.

11ª atividade:

Para a realização dessa atividade foram distribuídos 12 cubinhos do material dourado e foi solicitado que construíssem diferentes paralelepípedos. Os objetivos eram investigar o volume de um paralelepípedo e possibilitar a percepção da importância da generalização para o cálculo do volume de um paralelepípedo. Para isso foram propostas as seguintes questões:

- 1) O que cada paralelepípedo tem em comum?
- 2) É possível encontrar o volume de um paralelepípedo conhecendo apenas as suas dimensões: comprimento, largura e altura? Investigue e anote suas conclusões.

A atividade motivou a todos e logo resolveram as duas questões. A generalização surgiu com naturalidade na maioria dos grupos e a mesa redonda foi apenas para expor o que todos haviam descoberto. Percebeu-se que essas atividades de resolução simples, em meio a outras mais complexas, permitiam o envolvimento maior de todos. Mesmo sem essa intencionalidade no planejamento, isso possibilitou uma integração de toda a sala no processo de investigação.

12ª e 13ª atividades:

As duas atividades planejadas no material didático foram desenvolvidas em uma única aula. Para a sua realização foram distribuídos objetos em forma de prismas, pirâmides, cilindros e cones em acrílico, todos eles possuindo uma abertura com tampa. A sala foi dividida em grupos de cinco alunos, pois não haveria objetos suficientes para serem distribuídos a todas as duplas. Pretendia-se investigar a relação entre o volume de um prisma e o de uma pirâmide, e entre o volume de um cilindro e de um cone, que possuíssem a mesma área da base e a mesma altura, e possibilitar a percepção da importância da generalização para o cálculo do volume. As questões abaixo foram propostas às equipes:

- 1) O que a pirâmide e o prisma ou o cone e o cilindro têm em comum?

- 2) Encha a pirâmide, ou o cone, com arroz (ou água) e despeje dentro do prisma ou do cilindro;
- 3) Que relação você conseguiu observar entre os volumes.
- 4) Quando essa relação é válida? Anote suas considerações.
- 5) É possível calcular o volume conhecendo a aresta da base (a) e a altura (h)?

As questões movimentaram toda a sala. Enquanto alguns grupos trabalhavam com cilindros e cones, outros trabalhavam com pirâmides e prismas. Isso exigiu um empenho maior da professora, que era chamada pelos grupos para esclarecimento de dúvidas. Um grupo, logo no início, chamou a professora e afirmou: *“Professora, no prisma cabe a mesma quantidade de três pirâmides”*. Então a professora questionou: *“E se vocês tivessem que escrever para alguém como calcular o volume de um prisma e de uma pirâmide, como vocês fariam isso?”*. Após esse momento eles começaram as discussões e os cálculos, buscando validá-los.

Os grupos que receberam primeiro o cone e o cilindro tiveram mais dificuldades para estabelecer a relação entre esses objetos. Foi necessária a intervenção da professora em muitos momentos. Isso foi também constatado na resposta da questão seis. Uma dupla que explorou cone e cilindro escreveu: *“Encontramos um pouco de dificuldade para fazer a fórmula do volume do cone e do cilindro, mas com a experiência da água ficou mais fácil a compreensão”*. Ocorre, no entanto, que outra dupla, que trabalhou com o prisma e a pirâmide, escreveu: *“Conseguimos verificar com facilidade como calcular o volume de prismas e pirâmides, devido à experiência com o material e com a água. Percebemos que há relação entre o prisma e a pirâmide quando os mesmos têm a base e a altura iguais, sendo que o da pirâmide corresponde a 1/3 do volume do prisma. As fórmulas encontradas não são tão complexas quanto parecem. Foi simples e divertido”*.

O momento de discussão dessa atividade foi um dos mais “ricos” de todos, pois os alunos explicavam as tentativas e caminhos percorridos, enquanto que outros ajudavam nas conclusões. O que uma dupla não tinha conseguido avançar, a outra logo se manifestava com novas ideias e até mesmo com perguntas. O que nunca tinha acontecido em outras aulas de matemática. Muitos pesquisadores destacam a importância desse momento para a concretização da aprendizagem,

para o desenvolvimento de argumentações, entre outros. Isso é possível observar no trecho a seguir:

Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificativas diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas. É também esta a altura adequada para se clarificarem ideias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados. (FONSECA, BRUNHEIRA e PONTE, 1999, p. 8).

Para avaliar todo o processo, os alunos realizaram, por escrito, a avaliação das aulas, das atividades, do envolvimento da professora e, por fim, desenvolveram uma autoavaliação. Por meio dessa avaliação e dos momentos em sala foi possível observar que a maioria dos alunos compreendeu o processo, se envolveu com as atividades e se tornou ativo no processo de construção do conhecimento matemático, mais especificamente do conhecimento da geometria.

3 Algumas Considerações

O objetivo geral do projeto de intervenção pedagógica na escola era propor a reflexão sobre a metodologia de investigação matemática, mais especificamente investigações em geometria. Pretendia-se, por meio dessa abordagem, possibilitar ao aluno condições para tornar-se ativo no processo de aprendizagem, bem como permitir-lhe uma nova visão sobre a construção do conhecimento matemático. Por meio da avaliação final e de todos os momentos das aulas de investigação foi possível constatar que esse objetivo foi alcançado, constatação que se confirma principalmente quando se leem os relatos dos alunos. Isso nos motiva a continuarmos os estudos e a incrementarmos o planejamento com outras atividades para novas aulas.

Após o desenvolvimento de todas as atividades de investigações planejadas, como já cima informado, os alunos realizaram uma avaliação escrita das aulas, do trabalho da professora e uma autoavaliação, avaliação na qual deveriam expressar

os pontos positivos e negativos, bem como escrever as críticas e as sugestões para a utilização dessa metodologia nas aulas de Matemática.

Um dos relatos descritos a seguir mostra a rejeição à nova metodologia, que foi superada pela persistência e pelo envolvimento durante as aulas. Uma aluna afirmou: *“Eu nunca fiz uma aula assim e quando a professora chegou com as aulas práticas, confesso que no começo odiei, queria faltar na aula e tudo mais, mas com o passar do tempo vi que com essas aulas eu entendia. Depois de tentar coisas diferentes, comecei a amar a aula de matemática. No cursinho eu estava aprendendo a mesma coisa, porém não entendia nada, já no colégio com as investigações entendia e assim não esquecia as fórmulas.”*

Outros alunos valorizaram a importância do trabalho em duplas ou valorizaram os vários caminhos para se obter uma resposta, sendo este um dos principais objetivos de uma aula de investigação. E, ainda, a “descoberta” das fórmulas motivou a muitos. Isso está destacado em diversos trechos recortados dos relatos dos alunos:

“As aulas de investigação são as melhores, pois podemos resolver em duplas, e ver que há várias maneiras de se obter um resultado.”

“... realmente, tudo que a professora ensinou fazendo experiências, trazendo materiais em sala de aula, deixando a gente descobrir várias fórmulas é muito interessante. Em minha opinião é mais fácil e melhor do que o professor passar a matéria no quadro.”

“Foi muito bom. As aulas diferentes, com os trabalhos tínhamos de pensar mais.”

“Eu achei um trabalho importante, porque os alunos ficaram interessados em descobrir novas fórmulas, novas maneiras de calcular a área, o volume, entre outros.”

Outro argumento muito interessante, descrito abaixo, foi a valorização do aprender utilizando os erros:

“Pensar e descobrir coisas que estavam guardadas na mente é um trabalho muito bom para conseguirmos aprender. Ir fazendo os erros para no final chegarmos aos acertos”.

A seguir destacam-se algumas sugestões dos alunos, que trazem motivações para a implementação dessa metodologia nos próximos anos de trabalho docente.

“Minha sugestão é que esses trabalhos com investigação continuem porque, além de ser importante, é uma atividade diferente que ajuda os alunos a descobrirem fórmulas para não esquecerem.”

“Deveria ter mais tempo para fazer atividades como essas, pois desta maneira foi mais fácil de se aprender onde você não fica somente imaginando.”

“Penso que as aulas investigativas devem continuar, não somente em geometria, mas em todo o conteúdo de matemática, pois isso faz com que os alunos tenham mais interesse pela matéria.”

Vale ainda destacar que, para a realização da avaliação final, não foi necessário que os alunos se identificassem e a professora deixou claro que todos deveriam ser sinceros em suas colocações. Alguns escreveram sobre suas dificuldades e, principalmente, sobre como viam as aulas de matemática:

“Para mim esse método não foi legal, pois foi mais difícil de aprender, pois sou acostumada a decorar fórmulas, mas acho que tendo um pouco mais de paciência seria muito interessante.”

“Foi um trabalho bom, legal, porém eu não consigo aprender muito desta maneira, mas para a maioria foi uma forma mais fácil de aprender.”

No período de implementação do projeto, além das atividades de investigação, foram trabalhados problemas, exercícios e avaliações envolvendo os conteúdos abordados nessas aulas. O que chamou a atenção foi a forma como os alunos resolviam as questões propostas. Raramente perguntavam sobre que fórmula deveriam usar, como habitualmente se ouvia em anos anteriores, pois começavam investigando e resolviam por caminhos diversos. As fórmulas muitas vezes eram deduzidas novamente, como que “redescobertas”. A autonomia foi se consolidando.

Por fim, o presente trabalho possibilitou a reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, e a importância do estudo de novos métodos que

permitam a construção de conceitos, a compreensão das fórmulas e a apropriação da linguagem matemática, relacionando-os com problemas vivenciados no cotidiano.

Referências

ABRANTES, P. **Investigações em geometria na sala de aula**. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/p_153-167.PDF>. Acesso em: 14 abr. 2010.

ALEVATTO, N. S. G. O modelo de Romberg e o percurso metodológico de uma pesquisa qualitativa em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, Ano 21, n. 29, p.175-197, 2008.

BARRANTES, M.; BLANCO, L. J. Caracterização das concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da geometria. **ZETETIKE**, Campinas, nº 25, v. 14, p. 65-92, jan./jun. 2006.

CRISTOVÃO, E. M. Pelos caminhos de uma nova experiência no ensino da geometria. In: FIORENTINI, D. **Por trás da porta, que matemática acontece?** Campinas, SP: Editora Graf. FE/Unicamp – Cempem, 2001.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. **As atividades de investigação, o professor e a aula de matemática**. Disponível em: <<http://www.amma.com.pt/cm/af29/trabalhos/s7/Textos/texto18.pdf>>. Acesso em: 9 abr. 2010.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.PDF>>. Acesso em: 14 abr. 2010.

PARANÁ, SEED – **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. SEED/DEB: Curitiba, 2008.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender geometria**. Disponível em: <http://mil.tonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/mr21-Regina.doc>. Acesso em: 9 abr. 2010.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. et alii. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/ponte%20etc.doc>>. Acesso em: 1º maio 2011.

ROCHA, A.; PONTE, J. P. Aprender matemática investigando. **ZETETIKE**, Campinas. n. 6, v. 14, p. 29-48, jul./dez. 2006.