O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Produção Didático-Pedagógica

2010

VOLUME II

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

FICHA PARA CATÁLOGO
PRODUÇÃO DIDÁTICO PEDAGÓGICA

Título: Demonstrações em Matemática: uso do raciocínio lógico.	
Autor	Roseli Aparecida Barlati
Escola de Atuação	Colégio Estadual Rosa Delúcia Calsavara – Ensino Fundamental e Médio
Município da escola	Cambira
Núcleo Regional de Educação	Apucarana
Orientador	Prof. Drª. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Instituição de Ensino Superior	Universidade Estadual de Londrina - UEL
Disciplina/Área	Matemática
Produção Didático-pedagógica	Caderno Pedagógico
Relação Interdisciplinar	-
Público Alvo	Alunos da segunda série do ensino médio.
Localização	Colégio Estadual Rosa Delúcia Calsavara – Ensino Findamental e Médio, localizado à Rua Uruguai, nº 195, em Cambira.
Apresentação:	A Resolução de Problemas é uma das tendências em Educação Matemática que propicia o aluno a pensar por si. A demonstração tem por objetivo provar fatos proporcionando desta maneira a construção de novos conceitos. Aliadas, resolução de problemas e demonstração, podem ser uma alternativa para mostrar ao aluno a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos nos diversos campos do conhecimento. Este trabalho tem por objetivo investigar o uso da metodologia de resolução de problemas focando demonstração, identificando que tipo de demonstrações os alunos do ensino médio são capazes de desenvolver.
Palavras-chave	Resolução de problemas; demonstração; prova; lógica matemática.

ROSELI APARECIDA BARLATI

CADERNO PEDAGÓGICO:

DEMONSTRAÇÕES EM MATEMÁTICA: uso do raciocínio lógico.

Plano de Trabalho Apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional

Orientadora: Prof. Drª. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.

Londrina
2011

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esse Caderno Pedagógico é resultado de um estudo do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE pertencente ao Núcleo Regional da Educação de Apucarana, vinculado à UEL - Universidade Estadual de Londrina, que apresenta uma proposta de trabalho utilizando Resolução de Problemas no Ensino Médio focando Demonstrações Matemáticas.

Tema: Resolução de problemas focando demonstrações em matemáticas.

Justificativa: Nosso aluno questiona o professor sobre a aplicabilidade dos conteúdos, pois, estes são abordados pelos livros didáticos de forma solta e sem importância na vida real, desta forma, o aluno torna-se desinteressado por aprender algo que não tem relação com seu dia a dia. Cabe então ao professor, mostrar o porquê de aprender determinado conteúdo, para que o aluno tenha vontade de adquirir mais conhecimento.

Acreditamos que a Resolução de Problemas, focando demonstração é fundamental para desenvolver a capacidade de pesquisar e aprender, uma vez que trabalhando de forma mais contextualizada o aluno consegue relacionar os conteúdos de matemática às situações reais vividas por ele.

Outro motivo para a escolha do tema de estudo é poder trabalhar alguns tópicos da Lógica Matemática no ensino médio, uma vez que os livros didáticos não trazem atividades que exijam demonstrações.

Público Alvo: Alunos da segunda série do ensino médio.

Objetivos:

Geral: Investigar o uso da metodologia de resolução de problemas focando demonstrações.

Específicos:

- ✓ Identificar estratégias utilizadas pelos alunos para demonstrar resultados.
- ✓ Reconhecer eventuais dificuldades que os alunos possam apresentar no processo de aprendizagem com demonstração.

1 PROCEDIMENTOS

Exploraremos o uso de demonstrações com os alunos da 2ª série do período matutino do Ensino Médio, do Colégio Estadual Rosa Delúcia Calsavara de Cambira, no período de agosto a novembro de 2011, utilizando problemas previamente selecionados.

O método a ser usado será o da pesquisa qualitativa que não busca enumerar ou medir eventos nem usa dados estatísticos, seus dados são obtidos com contato direto do pesquisador com o objeto de estudo, e compreendendo o fenômeno estudado segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada. (TEIXEIRA; PACHECO, 2005)

Segundo Ludke e André (1986), as características de uma investigação qualitativa são

> (i)ter o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento; (ii) coletar dados predominantemente descritivos; (iii) ter maior atenção ao processo que ao produto; (iv) o processo de análise tende a ser indutivo, sendo que 'os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. As abstrações formam-se ou se consolidam, basicamente, a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima.'

Como prevê a pesquisa qualitativa a coleta de dados será feita mediante entrevistas, gravação (previamente autorizada) das conversas durante as aulas para posterior transcrição das mesmas, material escrito dos alunos em grupo ou individual, diário do professor pesquisador e atividades dos alunos.

As atividades serão desafiadoras e provocativas. Elas serão realizadas em duplas ou grupos de três a quatro alunos.

Ao final de cada atividade, cada grupo apresentará no quadro negro sua conclusão e um relatório escrito, expondo suas estratégias e conclusões.

As atividades serão realizadas uma vez por semana utilizando uma aula de cinquenta minutos.

Pode ocorrer que algumas atividades mais extensas exijam um pouco mais de tempo e outras possam requer menos tempo que o estipulado. Como a temática demonstração não é muito familiar aos alunos, pode haver alguma indiferença nos primeiros contatos com esse tipo de atividade.

1.1 ATIVIDADE 1: APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Objetivos:

- ✓ Investigar o que os alunos entendem por ‘demonstração’ e ‘demonstração em matemática’.
- ✓ Verificar se relacionam que ‘demonstração’ em matemática é uma resposta a um ‘por que’.

Recursos: Sala de aula, papel, papel quadriculado, caneta, lápis, tesoura, cola, quadro de giz.

Tempo: Duas aulas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

A professora pesquisadora iniciará fazendo a apresentação da proposta pedagógica e fazendo algumas indagações para reflexão dos alunos: O que é matemática para você? O que você acredita que é importante na matemática?

Os alunos deverão escrever sobre essas indagações e será feito uma mesa redonda para que cada um possa colocar a sua opinião.

A professora pesquisadora nesse momento continuará com as indagações para apresentar o termo demonstração.

1. O que é $(5 + 3)^2$?
2. E $5^2 + 2.5.3 + 3^2$ quanto vale?
3. O que podemos concluir?
4. O que é $(a + b)^2$?
5. A expressão vale para qualquer a?
6. Vale para qualquer b?

Em seguida a professora pesquisadora formará grupos para construir geometricamente o produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Para isso os alunos deverão utilizando papel quadriculado e executar os passos sugeridos:

1. Construa um quadrado de lado a.
2. Construa um quadrado de lado b, sendo $b \neq a$.
3. Construa agora dois retângulos de lados ab.
4. Recorte essas peças e monte um quadrado.
5. Que quadrado você montou?
6. Como pode ser representada a área desse quadrado?

Nesse momento deverá ser feito uma tabela no quadro de giz com os dados obtidos por cada grupo. Após analisar a tabela os alunos deverão ser capazes de concluir a construção sugerida.

A professora pesquisadora então perguntará: O que foi que nós fizemos? Quando podemos afirmar que uma 'coisa' vale sempre?

Com essas perguntas os alunos deverão ser capazes de pensar no significado de estabelecer a verdade.

1.2 ATIVIDADE 2: CONHECENDO OS TERMOS TÉCNICOS

Objetivo: Proporcionar aos alunos familiarizarem-se com os termos utilizados na matemática formal.

Recursos: Recortes de texto, caderno, caneta, lápis.

Tempo: Duas aulas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

Os alunos em grupo de 4 a 5 elementos receberão um texto onde aparecem algumas palavras já sublinhadas, que são utilizadas na matemática formal. Em seguida deverão fazer a leitura e conceituar as palavras de acordo com o que entenderam que a mesma representa no contexto, fazendo relatório escrito. Após, a professora pesquisadora deverá escrever as palavras no quadro de giz e pedir que cada grupo coloque a sua conclusão. Depois que todos colocarem sua resposta a professora pesquisadora fará as comparações, destacando as ideias parecidas e então apresentará a definição correta de cada palavra selecionada relacionando-a com a apresentada pelos grupos.

Apresentamos sugestão de textos que poderão ser trabalhados nessa atividade.

Texto I: **Um pouco de História**[1]

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha egéia de Samos, na Grécia, não longe de Mileto, lugar do nascimento de Thales. Sua figura está envolta em mitos e lendas, uma vez que não existem relatos originais sobre sua vida e trabalhos. O grande mérito de Pitágoras teria sido a percepção de que os números existem independentemente do mundo concreto. Desse modo, ele poderia descobrir verdades que ficariam acima de preconceitos ou opiniões.

O lema da escola pitagórica, "Tudo é número", deixa transparecer uma forte afinidade com a Mesopotâmia. Segundo os historiadores, mesmo o Teorema, ao qual o nome de Pitágoras está tradicionalmente ligado, já era conhecido dos babilônios, havia mais de um milênio antes. Porém foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo, o que justificaria a denominação de "Teorema de Pitágoras", como ficou conhecido.

No livro I dos Elementos de Euclides de Alexandria (300 a.C.), a Proposição (47, I) é o teorema pitagórico, com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides; e a Proposição final (48, I) é o recíproco desse teorema.

É possível que Pitágoras tenha dado uma demonstração do Teorema baseada na proporcionalidade das medidas dos lados de figuras semelhantes. Posteriormente, com a constatação de que nem todos os segmentos são necessariamente comensuráveis, essa prova perdeu sua validade. A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos, pois abalava sua filosofia, segundo a qual tudo dependia dos números inteiros.

A prova do Teorema dada por Euclides não utiliza as proporções, o que pode ter sido uma estratégia para evitar a questão da incomensurabilidade. As

[1] Trecho extraído de: BASTIAN; ALMOULOUD **O Teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente.** Educação Matemática em Revista. Ano 10. N° 14, 2003. P.45-46.

circunstâncias que desencadearam a primeira percepção desse obstáculo constituem tema bastante polêmico. Poderiam estar em conexão com a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles; com o cálculo da diagonal de um quadrado em função do lado ou com as diagonais de um pentágono.

Texto II: **Um Pouco sobre Euclides**[2]

É desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Há uma história, contada por Stobaeus, segundo a qual Euclides, indagado por um aluno sobre a utilidade prática da matéria que estava sendo vista, ordenou a seu escravo que desse a ele uma moeda “para que tivesse algum ganho com o que estava aprendendo”.

Embora Euclides fosse autor de pelo menos dez trabalhos, sua fama repousa principalmente sobre seus Elementos. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado, e provavelmente nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

É lamentável que não se tenha descoberto nenhuma cópia dos Elementos de Euclides que date verdadeiramente da época de seu autor. As edições modernas da obra se baseiam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides.

Contrariamente à impressão muito difundida, os Elementos de Euclides não tratam apenas de geometria – contem também bastante teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de 465 <u>proposições</u> distribuídas em treze livros.

O Livro I começa com <u>definições</u>, <u>postulados</u> e <u>axiomas</u> preliminares necessários. Este livro apresenta quarenta e oito proposições, tratando das propriedades do triângulo, teoria das paralelas, paralelogramos, triângulos e quadrados. A proposição I 47 é o teorema de Pìtágoras com uma demonstração

[2] Texto extraído de EVES. Introdução à história da matemática. Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 2004. P.166-169.

atribuída universalmente ao próprio Euclides. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos.

1.3 ATIVIDADE 3: A LÓGICA MATEMÁTICA

Objetivo: Oportunizar ao aluno o trabalho com argumento.

Recursos: Papel e lápis.

Tempo: Uma aula de 50 minutos.

Desenvolvimento:

Será apresentada aos alunos a seguinte situação:

“Se fizer frio não vou tomar sorvete.

Está frio.

O que você pode concluir?”

Os alunos deverão responder oralmente a questão acima, dando sua opinião.

O que se espera é que os alunos digam que a conclusão é que não fui tomar sorvete.

Logo depois, a professora pesquisadora fará uma alteração na situação acima, mudando a afirmação para a seguinte: “Se fizer frio não vou tomar sorvete. Está muito quente. Qual a conclusão que podemos chegar?”

Os alunos novamente deverão dar sua opinião sobre a questão, dessa vez acreditamos que alguns alunos afirmarão que fui tomar sorvete e outros dirão que não podemos chegar a essa conclusão, pois, na afirmação nada esclarece sobre o fato de estar quente.

Diante disso, será dito aos alunos que esse tipo de afirmação é um argumento e que um argumento é formado de uma ou mais premissas e de uma conclusão. Também deverá ser informado que se trata de um de um argumento de Modus ponens.

Como podemos ver no exemplo temos:

Premissa 1: Se fizer frio não vou tomar sorvete.

Premissa 2: Está frio.

Conclusão: Não vou tomar sorvete.

Outros argumentos serão apresentados, para que os alunos identifiquem as premissas e a conclusão de cada um deles.

Sugestão de argumentos a serem trabalhados:

a) O ônibus escolar da zona rural não deverá vir amanhã, porque a prefeitura municipal estará fechada e sempre que a prefeitura não trabalha o ônibus não vem.
b) No Brasil se produz milho; logo o milho deveria ser barato, pois os produtos importados é que são caros.
c) Como nenhuma flor fala e orquídea é uma flor, as orquídeas não falam.
d) O aço é um material sólido. Como o gelo é sólido, podemos concluir que o gelo é um tipo de aço.

Nesse momento algumas perguntas deverão ser feitas para dar encaminhamento e serem retomados os termos técnicos utilizados na matemática formal que os alunos tiveram contato na aula anterior.

- ✓ Uma frase pode ser considerada falsa ou verdadeira? (falar de proposição)
- ✓ Podemos ter premissas verdadeiras e conclusão falsa? (falar de argumento válido e argumento inválido (sofisma))
- ✓ Você vê alguma aplicação dos argumentos em nosso dia a dia?

1.4 ATIVIDADE 4 – INICIANDO AS DEMONSTRAÇÕES

Objetivos:

- ✓ Estabelecer as hipóteses necessárias para a resolução de problema.
- ✓ Justificar a resolução do problema utilizando demonstração.
- ✓ Identificar quais demonstrações os alunos são capazes de realizar.
- ✓ Verificar se os alunos estabelecem a verdade de um teorema.

1.4.1 - O TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivos:

- ✓ Reconhecer as propriedades do triângulo retângulo.
- ✓ Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras.
- ✓ Identificar quais demonstrações do Teorema de Pitágoras os alunos são capazes de realizar.

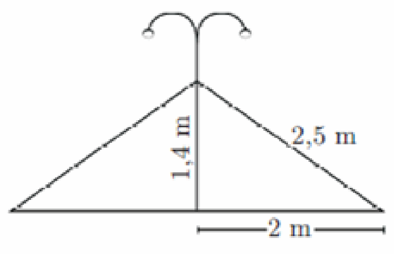
Recursos: Papel quadriculado, papel, lápis, lápis de cor, cola, régua, compasso, tesoura, esquadros, transferidor.

Tempo: Três aulas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

Os alunos agrupados em trios receberão uma folha com um problema pré-selecionado; deverão resolvê-lo e no final fazer a demonstração do teorema utilizado na resolução, seguindo os passos sugeridos pela professora pesquisadora.

Poste elétrico[3] – Uma companhia de eletricidade instalou um poste num terreno plano. Para fixar bem o poste, foram presos cabos no poste, a uma altura de 1,4 metros do solo e a 2 metros de distância do poste, sendo que um dos cabos mede 2,5 metros, conforme a figura.



Um professor de Matemática, após analisar estas medidas, afirmou que o poste não está perpendicular ao solo. Você acha que o professor está certo? Justifique sua resposta.

---

[3] Problema retirado do Banco de Questões da OBMEP 2010 p.73.

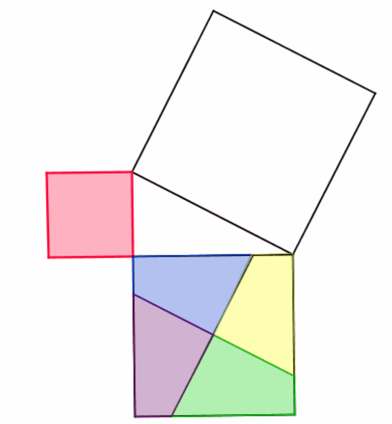
Depois que os grupos resolverem o problema a professora pesquisadora deverá pedir que façam a demonstração do teorema utilizado na resolução do problema seguindo os passos sugeridos, relembrando aos alunos que existem muitas demonstrações desse teorema. Os passos a serem seguidos levarão a construção da demonstração feita pelo matemático hindu Bhaskara.

1. Construir um triângulo retângulo de lados 5, 4 e 3 cm.
2. Construir um quadrado a partir de cada lado do triângulo e determinar a área de cada um dos quadrados.
3. Chame a área do quadrado formado pela hipotenusa de A_H e a área dos quadrados dos catetos de A_{C1} e A_{C2}.
4. Verifique se $A_H = A_{C1} + A_{C2}$.
5. Escreva essa relação em função dos lados do triângulo retângulo.
6. O que você pode concluir?

Também serão sugeridas outras formas de demonstração do Teorema de Pitágoras.

Sugestão I: Os passos a seguir, mostrarão a demonstração feita por um livreiro de Londres em 1873, Henry Perigal.

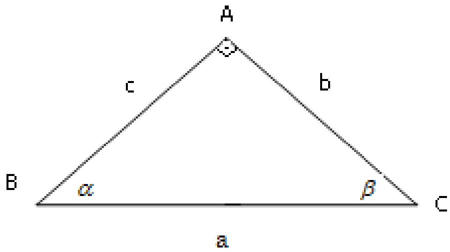
1. Construir um triângulo retângulo de lados 13, 12 e 5 cm.
2. Construir um quadrado a partir de cada lado do triângulo.
3. Encontre o centro do quadrado do maior cateto.
4. Trace uma paralela à hipotenusa passando pelo centro do quadrado do maior cateto.
5. Trace uma perpendicular passando pelo centro do quadrado do cateto maior. Dessa maneira o quadrado ficará dividido em quatro partes congruentes. Colorir cada parte da divisão e o quadrado do cateto menor de uma cor diferente. (A figura deverá ficar como o desenho a seguir)



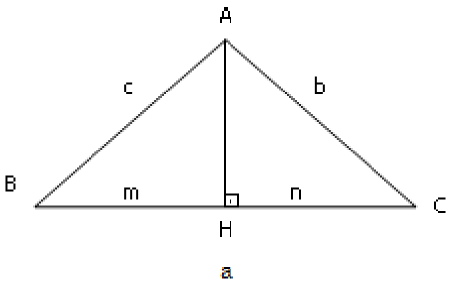
6. Recorte o quadrado do cateto maior nas quatro partes congruentes.
7. Recorte o quadrado do cateto menor.
8. Cubra o quadrado da hipotenusa com as partes recortadas do quadrado do cateto maior e o quadrado do cateto menor.
9. Finalize a demonstração.

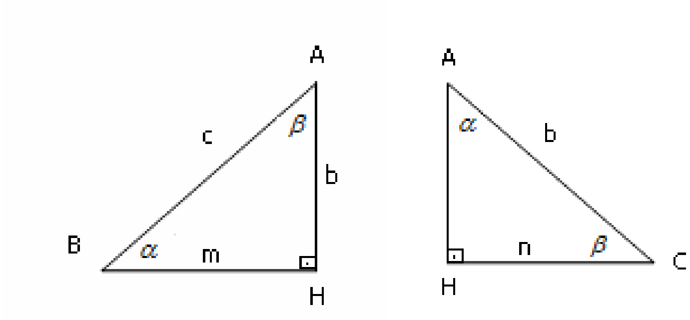
Sugestão II: Demonstração por meio de semelhança de triângulos.

1. Construa um triângulo retângulo Δ ABC, de hipotenusa a e catetos b e c.



2. Trace a altura AH relativa ao lado BC e veja que ela dividi esse triângulo em dois outros: Δ BHA e Δ CHA.





3. O que podemos concluir sobre esses triângulos?

   Nesse momento espera-se que os alunos concluam que eles são semelhantes.

4. Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo somam 90º, segue que os triângulos retângulos Δ ABC, Δ HBA e Δ HAC possuem os mesmos ângulos, logo são semelhantes.

5. A que conclusão podemos chegar observando a semelhança dos triângulos Δ ABC ~ Δ HBA?

   Espera-se que os alunos concluam que:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BH} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a.m$$

6. O que concluímos da semelhança dos triângulos Δ ABC ~ Δ HAC?

   Os alunos deverão concluir que:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a.n$$

Logo temos:

$$b^2 + c^2 = a.m + a.n$$

$$b^2 + c^2 = (m+n)a$$

Pelo triângulo Δ ABC $a = m + n$

Assim: $b^2 + c^2 = a.a \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2$

Como queríamos demonstrar (CQD).

Depois de realizar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras a professora pesquisadora incentivará os alunos a tentarem elaborar uma demonstração do referido teorema.

1.4.2 – TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

Objetivos:

- ✓ Reconhecer triângulo retângulo e seus elementos.
- ✓ Identificar as razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- ✓ Utilizar a relação entre seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

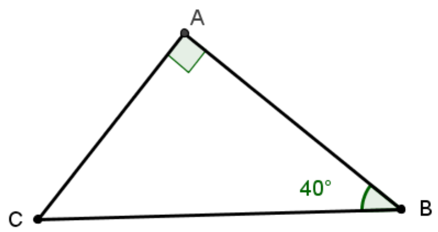
Recursos: Papel, lápis, canetas, compasso, régua, esquadros, transferidor, quadro de giz.

Tempo: Duas aulas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

Os alunos em grupo deverão resolver o problema abaixo utilizando a relação entre seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Problema[4]: Dados sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,76, AC e AB me dindo respectivamente, x e 10 cm, determinar o valor de *x* na figura.



Após resolver o problema os grupos deverão expor no quadro a sua resolução. Nesse momento a professora pesquisadora deverá dar as orientações necessárias para que os alunos possam demonstrar que $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$.

1. Construir um ciclo trigonométrico.
2. Marcar um ângulo α qualquer.
3. Localizar seno de α, cosseno de α.

[4] Problema adaptado de PAIVA, M. **Matemática – Paiva**. São Paulo: Moderna, 2009. P. 34.

4. Projetar sen α e cos α, formando um triângulo retângulo.
5. Pela razão trigonométrica, como definimos tangente de α?
6. Dessa forma o que se pode concluir?

Espera-se que os alunos identifiquem o cateto oposto a α como sen α e cateto adjacente a α como cos α.

Logo, concluirão que: $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$.

1.5 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Objetivos:

- ✓ Averiguar se os alunos compreenderam os termos usados na matemática formal.
- ✓ Verificar se os alunos são capazes de realizar demonstrações.
- ✓ Reconhecer as propriedades do triângulo retângulo.
- ✓ Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras.
- ✓ Justificar a resolução do problema utilizando demonstração.
- ✓ Identificar as razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- ✓ Utilizar a relação entre seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Recursos: Papel, papel quadriculado, papel colorido, canetas, lápis, régua, esquadro, transferidor, compasso.

Tempo: Quatro aulas de 50 minutos.

Desenvolvimento:

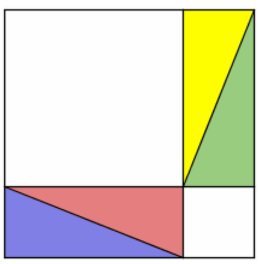
Os alunos em grupo deverão resolver as atividades propostas, fazendo o registro de toda hipótese levantada, do processo de resolução e da demonstração do teorema utilizado. Depois de resolvido deverão fazer um relatório escrito que servirá para a avaliação do processo ensino aprendizagem. Serão orientados para registrar também qual a dificuldade encontrada durante a realização da atividade.

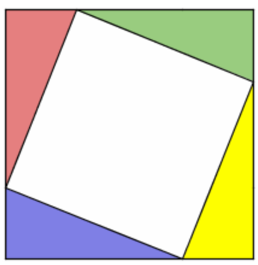
Atividades

1. Quais das frases abaixo são proposições? Justifique sua resposta.
    a. Seja educado!
    b. Que dia é hoje?
    c. Hoje o dia está muito frio.
    d. 5x + 3y
    e. Todo número par é divisível por dois.
    f. 7 + 3 < 9

2. Bárbara é uma pessoa de palavra e disse “se eu for aprovada no colégio, serei mais dedicada nos estudos”. O que se pode concluir, caso:
    a. Bárbara seja aprovada.
    b. Bárbara não seja dedicada nos estudos.
    c. Bárbara venha a ser reprovada no colégio.
    d. Bárbara seja dedicada nos estudos.

3. Os quadrados abaixo apresentam áreas iguais, porém foram construídos de formas diferentes. Os triângulos que aparecem são congruentes. Observando as figuras, demonstre o Teorema de Pitágoras. Registre todo seu raciocínio para justificar sua resposta.

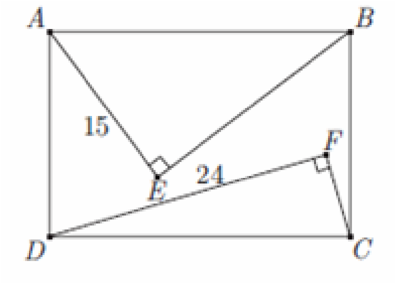




4. **Medida do cateto**[5] – Na figura dada, ABCD é um retângulo e ΔABE e ΔCDF são triângulos retângulos. A área do triângulo ΔABE é 150 cm^2 e os

[5] Problema extraído do Banco de Questões da OBMEP 2010, p. 74.

segmentos AE e DF medem, respectivamente, 15 e 24 cm. Qual é o comprimento do segmento CF?



5. Um triângulo Δ ABC, retângulo em B, tem um de seus ângulos agudos (Â) medindo 55°. Sabendo que o lado AB mede 27 cm, que sen 55° = 0,81 e cos 55° = 0,57; determine a medida do outro cateto desse triângulo.

2 CONTEÚDOS DE ESTUDO

As atividades possibilitarão contemplar os seguintes conteúdos:

1. Quadrado da soma de dois números.
2. Termos utilizados na matemática formal.
3. Teorema de Pitágoras.
4. Triângulo retângulo e suas características.
5. Semelhança de triângulos.
6. Razões trigonométricas no triângulo retângulo.
7. Relação entre seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

3 ORIENTAÇÕES

3.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Com as reformas no ensino de matemática os currículos escolares foram sofrendo alterações, passando do ensino matemático por repetição ao ensino por compreensão. Dentro do ensino de matemática por compreensão começou-se a falar em resolver problemas para se aprender matemática, exigindo assim mudanças na prática do docente.

O professor de matemática em sua trajetória profissional já ouviu ou leu, mesmo que superficialmente sobre Resolução de Problemas, pois os problemas possuem seu lugar garantido no currículo escolar desde a antiguidade, quer seja na forma de desafios, diversão, verificação de aprendizado entre outras.

A Resolução de Problemas é também uma das tendências em educação matemática e de acordo com as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCEs) um conteúdo pode ter diferentes abordagens.

> No processo da resolução, recomenda-se usar uma metodologia que propicie chegar a um modelo matemático. Tendo o modelo sistematizado, parte-se para a solução do problema, cujas alternativas podem ser buscadas em resolução de problemas. (DCEs MATEMÁTICA, 2008, p. 68)

Na busca de informações sobre a trajetória da Resolução de Problemas, constatamos que essa tendência em educação matemática passou por vários momentos:

1. anterior a 1960 preocupava-se com a solução do problema e não com o processo de resolução
2. nas décadas de 60 a 80 é que começou a preocupação com o processo envolvido na resolução, considerando importantes as diferentes estratégias utilizadas para resolução dos problemas.

Não podemos negar a importância da resolução de problemas no ensino da matemática, visto que muitos são os pesquisadores nessa área de ensino, iniciando-se com George Polya por volta de 1945 e sendo a "era da resolução de problemas" fundamentada a partir de recomendação feita no documento "Uma Agenda para a Ação", do NCTM – National Council ol Teachers os Mathematics - em 1980, dizendo que Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80.(ONUCHIC, 2004)

De acordo com Onuchic

> Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade de resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. (ONUCHIC, 1999a, p. 203)

Mas afinal, o que é problema?

De acordo com Ferreira (2009), na rubrica matemática problema é: Questão matemática proposta para que se lhe dê a solução.

Houaiss (2009) define problema na matemática como: tarefa de calcular uma ou várias quantidades desconhecidas (incógnitas) relacionadas a outras conhecidas (dados).

Diante disso a concepção de alguns pesquisadores sobre o que é um problema:

> [...] é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004a, p. 221)

> [...] é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (VAN WALLE apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2004b, p. 221)

> É qualquer situação que exija o pensar do individuo para solucioná-la. (DANTE, 1998a, p. 9)

O desafio do ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas é permitir que o aluno utilize seus conhecimentos, levante hipóteses e crie estratégias para solucionar a atividade proposta.

Para Buriasco (1995) resolver problemas tem três significados, primeiro resolver problemas como meio para alcançar determinados fins: como justificativa, motivação, atividade recreativa, meio para desenvolver novas habilidades e como prática; segundo resolver problemas como habilidades, dessa forma é instrumento para adquirir: conceitos matemáticos básicos, capacidade de resolver problemas rotineiros e não rotineiros e terceiro resolver problemas como “fazer matemática”.

Segundo Dante (1998b) os objetivos da resolução de problemas são:

- ✓ Fazer o aluno pensar produtivamente.
- ✓ Desenvolver o raciocínio do aluno.
- ✓ Ensinar o aluno a enfrentar situações novas.
- ✓ Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações matemáticas.
- ✓ Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.
- ✓ Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas.
- ✓ Dar uma boa base matemática às pessoas.

Sabemos que os problemas podem ser de diversos tipos como podemos observar abaixo:

- ✓ Problemas de reconhecimento são os que necessitam apenas que o aluno reconheça ou lembre-se de uma situação.

  Exemplo:

  O triângulo que tem os três lados iguais é chamado ....
- ✓ Problemas de algoritmos são os que podem ser resolvidos utilizando um algoritmo.

  Exemplo:

  Resolva: $x^2 – 16 = 9$.
- ✓ Problemas de aplicação são aqueles que precisam ser escritos em linguagem matemática para serem resolvidos.

  Exemplo: Quanto irei gastar na compra de 15 cadernos iguais que custam R$ 23,40 cada?

- ✓ Problemas em aberto são os que não trazem em seu enunciado pista para sua solução.

  Exemplo: Quantos triângulos podem ser formados tendo os dois lados menores a medida de 3 cm e 4 cm?
- ✓ Situação Problema é aquela que a primeira coisa a ser feita é identificar o problema para depois estudar a questão procurando solucioná-la.

  Exemplo: Dengue mata.

Os passos sugeridos por Onuchic (1999b) para se resolver problemas são: 1) formar grupos e entregar a atividade; 2) o papel do professor; 3) resultados na lousa; 4) plenária; 5) análise dos resultados; 6) consenso e 7) formalização das atividades.

Esses passos serão seguidos durante a implementação do projeto de intervenção pedagógica.

3.2 AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Na busca em conhecer o significado da palavra demonstração encontramos:

> Demonstração: **1** ato ou efeito de demonstrar. **2** qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; prova. **3** raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, ideia ou teoria. (HOUAISS, 2009)

> Demonstração: 1 ato de demonstrar. 2 tudo que serve para provar qualquer coisa; prova. 3 manifestação, sinal, testemunho. 4 lição pratica e experimental. 5 exibição, apresentação. 6 lóg. Dedução que prova a verdade de sua conclusão por se apoiar em premissas admitidas como verdadeiras. (FERREIRA, 2009)

Como observamos, nos dois dicionários pesquisados aparece o termo prova como sinônimo de demonstração. Dessa maneira achamos conveniente fazer a comprovação buscando o significado do termo prova.

> Prova: aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros; evidência, comprovação. Ato que dá uma demonstração cabal (de afeto, fidelidade etc.); manifestação, sinal; experiência científica; demonstração, experimento. (HOUAISS, 2009)
>
> Prova: Aquilo que atesta a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; demonstração evidente. Processo pelo qual se verifica a exatidão de um cálculo. O que leva à admissão de uma proposição ou da realidade de um fato. (FERREIRA, 2009)

No dicionário de filosofia o termo prova apresenta um sentido mais amplo que demonstração:

> Prova: procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui prova: todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são provas tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto, esse termo é mais extenso que demonstração: as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações. (ABBAGNANO,1982, p.678)

Com as definições e rubricas a respeito das palavras demonstração e prova pudemos constatar, que nos dois dicionários da língua portuguesa aparecem como sinônimo, porém na matemática ocorrem divergências entre os pesquisadores sobre a definição entre demonstração e prova.

Carvalho cita a distinção que Balacheff faz entre explicação, prova e demonstração.

> *Explicação* é o termo adotado para um discurso, através da fala, visando produzir de forma clara a característica de veracidade, adquirida pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado. [...] *Prova* é o termo utilizado para uma explicação aceita em uma dada

> comunidade em um dado momento. [...] podem ser aceitas como provas explicações que adotam uma forma particular: um conjunto organizado de enunciados válidos seguindo regras determinadas. Um enunciado, por sua vez, ou é reconhecido como verdadeiro ou é deduzido de uma verdade precedente por um conjunto de regras de dedução bem definido e pré-fixado. A este tipo particular de prova, chama *Demonstração.* (BALACHEFF apud CARVALHO, 2004a, p.43) Grifo da autora.

Procurando contextualizar o uso da demonstração em matemática, cito Bicudo (1999, p.117) que afirma que “o matemático profissional, eliminado tudo o que seja supérfluo, está constantemente preocupado com duas operações de sua razão: DEFINIR os conceitos de uma certa teoria e DEMONSTRAR as propriedades desses conceitos.”

O autor ainda nos diz que as teorias matemáticas estão determinadas sobre conceitos primitivos (axiomas: conceitos que não precisam ser justificados) e conceitos derivados (teoremas: necessita de demonstração).

Segundo Tarski, podemos considerar a busca pela verdade matemática como a essência da atividade do matemático. (TARSKI apud DOMINGUES, 2002). E nessa busca pela verdade o trabalho fica focado na demonstração, para que possa afirmar a veracidade do que se pretende mostrar.

O trabalho com demonstração aparece ao longo dos séculos; de acordo com Eves (2004), os últimos séculos do segundo milênio a.C. ocorreram muitas mudanças, civilizações desapareceram, invenção do alfabeto, introdução de moedas, muitas descobertas geográficas o e homem começou a indagar ‘como e por quê’. Assim também na matemática, essas indagações científicas ocorriam, nascendo uma atmosfera de racionalismo. O autor ainda cita que atribui-se a Tales de Mileto o início da geometria demonstrativa.

Para Domingues (2002), as contribuições de Pitágoras de Samos e sua escola, foram responsáveis pela criação da matemática pura e imprimiu a matemática algum caráter dedutivo, mesmo sem nenhuma base axiomática pré-estabelecida. Para os pitagóricos, todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados por meio dos números inteiros, o que foi contrariamente demonstrado por Hipaso de Metaponto quando encontrou na diagonal do quadrado de lado um, um número irracional, gerando deste modo uma crise na matemática grega.

Para Arsac e Barbin, a evolução da demonstração ao longo da história se deu em três etapas: (1) A gênese com os gregos no séc V a.C.: a demonstração é a ordem da convicção num debate contraditório. (2) A primeira modificação no séc XVII: a demonstração tem como objetivo esclarecer antes de convencer, e os métodos de descoberta fazendo um papel central. (3) A segunda modificação no séc. XIX: o retorno ao rigor e a aparição do formalismo, isto é, o surgimento de uma nova concepção de objetos matemáticos. (ARSAC; BARBIN apud MELLO, 1999, p. 30)

Diante da necessidade de se estabelecer a veracidade ou falsidade das proposições, se torna essencial utilizar critérios que possam assegurar a confiabilidade dessas conclusões, esses critérios são assegurados com a utilização do método axiomático.

Segundo Silva (2002) a origem do método axiomático em matemática não é bem conhecido, mas certamente é longo e está ligado ao desenvolvimento matemático da Grécia, acredita-se que Tales de Mileto foi o primeiro a formular propriedades das figuras como afirmações gerais.

O primeiro modelo axiomático e o mais famoso foi o da geometria plana, estabelecido por Euclides, por volta do século III a.C., em seu famoso tratado Os Elementos. (MORAES FILHO, 2007, p. 62)

Mas o que é um modelo axiomático?

Segundo Moraes Filho, um modelo axiomático é um conjunto finito de axiomas, de noções primitivas e de regras de inferência, usadas para deduzir certas afirmações (que são os teoremas) e definir objetos.

O autor ainda comenta que no final do século XIX e começo do século XX, houve uma grande preocupação em tornar a matemática mais rigorosa, e nesse período a Lógica Matemática começou a ser desenvolvida em sua grande parte, com essa finalidade o modelo axiomático ressurgiu com força total.

De acordo com Domingues (2002)

> Até perto do final do século XIX, a demonstração em matemática tinha um caráter grandemente material. A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava a nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição. A partir de algum momento, porém, tornou-se necessário submeter a noção de demonstração a uma

> análise mais profunda, com vistas a reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva.

O conceito de demonstração, então começa a ser reformulado e foi com Frege que aparece a idéia de demonstração formal que é sintetizada por Tarski da seguinte maneira: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que precedem na sequência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. (DOMINGUES, 2002)

Carvalho (2004) afirma que a demonstração ou prova rigorosa é apontada, há muito tempo, como tema central na Matemática, por vários autores, e diz ainda que

> O tema aparece relacionado com questões tais como comunicação de idéia matemática, linguagem e formalismo, critérios de aceitação de argumentos pela comunidade matemática, convencer e explicar, funções na prática pedagógica, situações e processos de validar, critérios para refutar argumentos, atitudes dos estudantes diante das demonstrações, entre outros. (CARVALHO, 2004b. p. 42).

Ainda para Carvalho (2004) o ato de ensinar por meio de demonstração deve incluir a possibilidade de se fazer da própria demonstração a resposta de como o resultado foi possível de ser provado e não apenas demonstrar o resultado.

De acordo com Hanna, “... a prova está viva e saudável na prática matemática e continua a merecer um lugar de destaque no currículo de matemática”. (HANNA apud CARVALHO, 2004c, p.i).

Ela ainda distingue a demonstração formal da demonstração aceitável, e ambas da demonstração no contexto da matemática escolar. Ela assim define:

> Demonstração formal: a demonstração como conceito teórico da lógica formal (ou meta-lógica), que pode ser encarado como ideal do qual a prática matemática apenas se aproxima. Demonstração aceitável: a demonstração como conceito normativo que define o que é aceitável para os matemáticos profissionais. O ensino da

> demonstração: a demonstração como uma atividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias que valem a pena tornar conhecidas dos alunos. (HANNA apud MOCROSKY et al, 2009, p.1186)

No contexto da matemática escolar é relevante lembrar De Villiers (2002) quando comenta que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem na qual as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas.

Para ele a demonstração tem também, outras funções em matemática:

> i) Verificação: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
> ii) Explicação: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
> iii) Descoberta: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
> iv) Comunicação: negociação do significado de objetos matemáticos;
> v) Desafio intelectual: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
> vi) Sistematização: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas. (DE VILLIERS apud ALMOULOUD, p.3)

A utilização de demonstração como vimos acima teve uma modificação no século XIX, originando o formalismo, porém sabemos das dificuldades que encontramos para trabalhar com demonstração em sala de aula, de acordo com Wheeler

> [...] é óbvio que a demonstração será sempre difícil na sala de aula de matemática, porque não aparece aí por nenhuma razão aparente que não seja a de imitar a atividade dos matemáticos. Nunca ninguém parou para pensar se é apropriada para a sala de aula ou, em caso afirmativo, que tipo de demonstrações seriam adequadas. (...) ... é um programa terrivelmente sofisticado. Não admira que não seja muito bem ensinado, e que todos os alunos tenham dificuldade em apanhá-lo. Nunca ninguém analisou a dificuldade disto tudo, e a maior parte dos professores não estão conscientes de todas as exigências cognitivas da demonstração. (WHEELER apud MOCROSKY et al, 2009, p.1186)

Para PIETROPAOLO, o ensino de demonstração ainda necessita de preparo do professor, como podemos observar

> Não caberia a simples reprodução – pelo aluno ou professor – das provas presentes nos livros, mas sim o "fazer matemática" em sala de aula, envolvendo assim, experimentações conjecturas, argumentações. Mas, para tal, o professor precisaria ter uma formação que levasse em conta esse princípio. (PIETROPAOLO apud ORDEM, 2010, p.26)

Com o decorrer do tempo os livros didáticos deixaram de trazer atividades sobre demonstrações e o professor perdeu o costume de exigir que seus alunos justifiquem suas respostas, um hábito que faz parte do estudo de demonstrações.

3.2.1 TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO

Para Moraes Filho (2007), uma demonstração é o processo utilizado para provar resultados matemáticos, satisfazendo as condições das hipóteses garantindo o que afirma a tese.

Ainda para o autor o que torna uma demonstração convincente são os argumentos utilizados para garantir a eficácia da teoria empregada.

Colocamos novamente a idéia de demonstração formal que é sintetizada por Tarski da seguinte maneira: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que precedem na sequência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. (DOMINGUES, 2002)

Achamos que se faz necessário nesse momento, relembrarmos o significado de alguns termos utilizados na matemática formal, por isso elaboramos a tabela a seguir.

TERMO	SIGNIFICADO
Axioma	Uma proposição aceita sem demonstração.
Proposição	Um conjunto de palavras que exprimem um pensamento de sentido completo.
Teorema	Uma sentença matemática condicional “se P, então Q” ou implicativa, cuja validade depende de uma demonstração. Onde P é a hipótese e Q é a tese.
Premissas	Elementos usados como ponto de partida para armar um raciocínio.
Argumento	Encadeamento de razões que devem conduzir à conclusão.
Silogismo	Um argumento lógico-dedutivo da forma: A é B. C é A. Logo, C é B.
Conjectura	Uma sentença cuja verdade ou falsidade ainda não foi determinada.
Tautologia	Uma sentença que informa algo certamente verdadeiro.
Sofisma ou Falácia	Um argumento não válido.
Dilema	Um argumento que conduz a uma conclusão desagradável ou inaceitável, a partir de duas premissas opostas, uma das quais deverá ser considerada verdade.
Modus ponens	Argumento que afirma que o antecedente é de fato verdadeiro. (Afirmação do antecedente AA)
Modus Tollens	Argumento onde a premissa nega a verdade do consequente. (negação do consequente NC)

Queremos citar Fossa quando coloca sua posição sobre a matemática, [...] a matemática não é meramente uma atividade interessante com algumas aplicações práticas, mas faz parte daquela busca da verdade que é o grande empreendimento do homem. (FOSSA, 2009, p.47)

Nesse sentido, um dos objetivos da matemática é descobrir e provar se proposições são verdadeiras ou falsas, para isso são utilizadas as técnicas de demonstração, das quais falaremos um pouco.

- ✓ Demonstrações diretas: essas demonstrações são chamadas diretas porque não usam artifícios, utilizam axiomas ou teoremas para realizar a prova.

  Todo teorema na forma ‘se p, então q”, através de uma sequência de *modus ponens* se chega a conclusão desejada.

  Exemplo: Se n é par, n é divisível por 2.

  Aplicando a afirmação do antecedente teremos:

  Se n é par, n é divisível por 2.

  n é par.

  Portando, n é divisível por 2.(conclusão)

- ✓ Demonstrações por contrapositiva: essa é uma técnica de demonstração indireta, pois vamos utilizar o *modus tollens,* ou seja, vamos negar o consequente(tese) para se negar a hipótese. A notação de negação de uma sentença P é ~P.

  Exemplo: Se n é par, n é divisível por 2.

  Fazendo a negação do consequente obtemos:

  Se n é par, n é divisível por 2.

  Mas, n não é divisível por 2.

  Portanto, n não é par.

- ✓ Demonstrações por absurdo: também conhecida como reductio ad absurdum, é um tipo de demonstração indireta que consiste em assumir a negação da proposição (hipótese) a ser demonstrada e tentar deduzir uma contradição. Isto é, mostre que (B e ~B) é consequência lógica de ~A, onde A é a proposição a ser demonstrada.

  Exemplo: Sejam x e y pertencentes ao conjunto dos números reais. Se $xy = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

  Demonstração:

  Assumir que $xy = 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Uma vez que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade $xy = 0$ por xy, obtendo $1 = 0$, o que é uma falsidade. C.Q.D.

✓ <u>Demonstrações por indução finita</u>: também chamada Método da Indução, é um argumento dedutivo. A indução matemática serve para provar que uma sequência de proposições é verdadeira, sem ter que provar cada uma delas. Funciona da seguinte forma: uma propriedade dependente de um número natural é válida para todos os números naturais se provarmos que, P(1) é válida e assumindo P(n) válida para algum número natural, então P(n+1) também é valida.

Exemplo: Prove que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

Verificamos P(1): $\frac{1(1+1)}{2}=1$.

Assumimos P(n) e mostramos P(n + 1), somando (n +1) nos dois lados da igualdade: $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.

Manipulando o lado direito temos: $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$. CQD

Moraes Filho (2007) elaborou um roteiro de algumas atitudes que podem ser tomadas diante de uma demonstração e achamos conveniente mencioná-las aqui.

1. O que quero provar?
   Diante do resultado a ser demonstrado, muitas vezes, vemos algumas pessoas perdidas, sem ao menos saberem dar o primeiro passo. Primeiramente, é necessário entender o que se quer demonstrar. Não importa quantas vezes seja necessário repetir a pergunta anterior, só continue quando respondê-la sem titubear. É necessário compreender plenamente o resultado, antes de ensaiar qualquer tentativa de prová-lo.
2. Conheço todos os elementos que compõem o resultado? Estou empregando uma notação adequada para entendê-lo e para usar posteriormente na demonstração?
3. Identifique precisamente e entenda a hipótese e a tese do que se deseja demonstrar.
4. É possível checar o resultado com alguns exemplos? Posso detectar nesses exemplos algumas propriedades ou características comuns, que sejam fundamentais para o resultado funcionar? Essas

propriedades ou características podem ser usadas na demonstração?

5. Antes de começar a desenvolver a demonstração: Conheço a demonstração de algum resultado semelhantes?
6. Caso conheça algum resultado semelhante: Posso utilizar a técnica de demonstração que conheço para esse resultado? É preciso introduzir algum elemento auxiliar, extra, que me ajude nesse sentido?
7. É necessário reenunciar o resultado de modo a torná-lo mais simples de ser manipulado? É necessário trabalhar com algum resultado mais simples, com algum caso particular do original, de forma a me dar mais argumentos para fazer a demonstração.
8. Esboce um esquema de demonstração (ao menos mental), levando em conta todas as respostas às perguntas anteriores. O resultado depende de casos particulares? É preciso dividir a demonstração em alguns casos distintos? Preciso usar demonstrações deferentes em cada caso?
9. Ao longo da demonstração tome cautela para não usar raciocínios ou definições errôneamente; muita atenção, também, com as falsas deduções. Analise cada passo dado. Siga uma cadeia de raciocínio lógico. Deixe claro onde está usando cada hipótese. Conclua a demonstração ressaltando que chegou na dedução da tese. Caso a demonstração seja longa demais, é conveniente dividi-la em passos ou em teoremas mais curtos (lemas, teoremas ou corolários); siga todas as dicas anteriores para cada um desses passos ou desses teoremas.
10. Escreva a demonstração. Esse passo é tão importante quanto fazer a demonstração.
11. Terminada a demonstração, é necessário analisá-la criticamente, o que pode ser muito enriquecedor para o aprendizado. Todos os dados disponíveis foram usados? Há algum supérfluo? O resultado admite generalização? O método pode ser aplicado para outros resultados? Quais? (MORAES FILHO, 2007, p.176)

4 PROPOSTA DE AVALIAÇÃO

A avaliação da proposta será feita mediante a participação dos alunos nos grupos; da apresentação oral da equipe; realização de atividades complementares e relatório final escrito de cada equipe.

INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Tradução de A. Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

ALMOULOUD , S. A. **Prova e Demonstração em Matemática:** Problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. Disponível em < http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf > Acesso em: 07 de junho de 2011.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. **Iniciação à Demonstração Apreendendo Conceitos Geométricos.** Disponível em:< http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf> Acesso em: 14 de março de 2011.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução: Orlando de A. Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BASTIAN, I. V.; ALMOULOUD, S. A. **O Teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente.** Educação Matemática em Revista. Ano 10. N°14, 2003. P.45-46.

BICUDO, I. História da Matemática: O Pensamento da Filosofia Grega Antiga e Seus Reflexos na Educação Matemática do Mundo Ocidental. In: BICUDO, M.A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas. São Paulo: Ed. da UNESP, 1999. Cap. 6, p. 117-127.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. In: **Bolema:** Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP: UNESP, 2002. N18, ano 15, p. 65-72.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – 1° e 2° ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:** Matemática. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BURIASCO, R. L. C. de. Sobre a Resolução de Problemas. **Nosso Fazer**, ano 1, n 5, Secretaria Municipal de Educação,Londrina, 1995.

CARVALHO, A. M. F. T. **A Extimidade da Demonstração**. 2004. Tese (Doutorado) – Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo. Disponível em: < http://www.uel.br/pessoal/tcarvalho/ensino/todatese.pdf> Acesso em: 15 de março de 2011.

CARVALHO, A. M. F. T. Discursos de Verdade & Demonstrações em Matemática: Aspectos para a Educação Matemática. III Seminário Nacional Interdisciplinar em Experiências Educativas - III SENIEE. In: **Anais...** Francisco Beltrão, PR, 2009, p. 898 - 905.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Atica, 1998.

DEMO, P. **Metodologia da Investigação em Educação**. Curitiba: Editora IBPEX, 2005. Cap 3, p. 103-126.

DOMINGUES, H. H. A Demonstração ao Longo dos Séculos. In: **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP: UNESP, 2002. N18, ano 15, p. 46-55.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Higyino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira S.A., 1986.

FIORENTINI, D.; LORENZATTO, S. **Investigação em Educação Matemática**: Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Cap 1, p. 3-13.

FOSSA, J.A. **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. In: **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP: UNESP, 2002. N18, ano 15, p. 73-81.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa 3.0.** Editora Objetiva, 2009.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. da **Lógica e linguagem cotidiana** – verdade, coerência, comunicação, argumentação. – 2. Ed. - Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MELO, E. G. S. de **DEMONSTRAÇÃO "Uma Sequência Didática para a Introdução de seu Aprendizado no Ensino de Geometria".** 1999. Dissertação(Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em: < http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/elizabeth_g_mello.pdf > Acesso em 06/07/2011.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à Matemática:** Fundamentos Lógicos, com Técnicas de Demonstração, Notas Históricas e Curiosidades**.** Campina Grande: EDUFCG, 2007.

NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. L. Um Estudo Histórico-Filosófico acerca do Papel das Demonstrações em Cursos de Bacharelado em Matemática. In: **Bolema**: Boletim de Educação em Matemática. Rio Claro, SP: UNESP, 2010. v. 23, nº 37, p. 1081 a 1110.

ONUCHIC, L. L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções & Perspectivas**.** São Paulo: Ed. Da UNESP, 1999. Cap. 12, p. 199-218.

ONUCHIC, L. L R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. & BORBA, M. C. (orgs). **Educação Matemática Pesquisa em Movimento.** São Paulo: Cortez editora, 2004. P.213-231.

ORDEM, J. **Prova e Demonstração em Geometria**: uma busca da organização Matemática e Didática em Livros Didáticos de 6ª e 8ª séries de Moçambique. Disponível em < http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/jacinto_ordem.pdf > Acesso em 02 de junho de 2011.

PAIVA, M. **Matemática – Paiva**. V. 1. São Paulo: Moderna, 2009.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática**. Curitiba, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SILVA, J. J. A Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. In: **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP: UNESP, 2002. N18, ano 15, p. 56-64.

TEIXEIRA, R. F.; PACHECO, M. E. C. **Pesquisa social e a valorização da abordagem qualitativa no Curso de Administração:** a quebra dos paradigmas científicos**.** Caderno de Pesquisa em Administração. São Paulo, 2005. V. 12, n. 1, p. 55-68.

TINOCO, L.; SILVA, M. M. Argumentação no Ensino de Matemática. In: **Anais** do VIII ENEM – Minicurso GT 3 – Educação Matemática no Ensino Médio. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/MC02128926734.pdf> Acesso em: 14 de março de 2011.