VOLUME II

O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

Produção Didático-Pedagógica

2010

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

Ficha para catálogo de Produção Didático – Pedagógica

Professor PDE/2010

Título	**A Compreensão do número fracionário e suas operações básicas.**
Autor	**Indalecio Dos Santos Pacheco**
Escola de Atuação	**Colégio Estadual Dr. João Ferreira Neves**
Município da escola	**Goioxim -PR**
Núcleo Regional de Educação	**Guarapuava P/R**
Orientador	**Reinaldo Francisco**
Instituição de Ensino Superior	**UNICENTRO**
Área do conhecimento	**Matemática**
Produção Didático-Pedagógica	**Unidade Didática**
Relação Interdisciplinar	**Todas as disciplinas**
Público alvo	**Alunos do 6° ano do Ensino Fundamental**
Localização	**Colégio Estadual Dr. João Ferreira Neves- Rua- João Ferreira Neves, 77 – Centro -Goioxim - Paraná**
Apresentação	**Justificativa:**
	Atualmente um dos grandes desafios dos Professores é como propiciar uma Educação de qualidade suprindo as diversas necessidades dos alunos. No espaço escolar os professores de Matemática não podem ficar sem conhecer e utilizar os diferentes recursos didáticos disponíveis. É importante, pois, salientar que a aprendizagem de qualquer conteúdo requer uma fase inicial exploratória e concreta, que é fundamental.
	Para a construção de significados e a formulação de conceitos sobre o conteúdo inicialmente trabalhado. Diante disso justifica- se a apresentação deste material didático, que tem por título" A compreensão dos números fracionários e suas operações básicas", que se utiliza da

Matemática manipulativa (uso de materiais concretos) em forma de unidade didática que visa buscar soluções para as dificuldades encontradas por professores e alunos tornando mais eficaz o ensino e a aprendizagem das frações.

Objetivos:

Apresentar uma proposta didática fundamentada na construção de conceitos e significados sobre os números racionais na forma fracionária, utilizando materiais manipulativos como réguas de frações, discos de frações, material dourado entre outros, que auxiliem na aprendizagem dos educandos capacitando-os a, diante de um problema, ter pensamentos e ideias próprias, em que a real intenção é estimular o educando a raciocinar, relacionar ideias e ter autonomia de pensamento sendo ele o próprio protagonista do seu conhecimento.

Metodologia:

Serão propostas atividades aos alunos que serão realizadas em grupos em que será enfatizada a noção de frações abrangendo seus diferentes significados e suas operações básicas. Cada atividade irá tornar prazerosa o estudo das frações pois serão elaboradas por meio de materiais concretos, capacitando cada um dos alunos à aplicar os conhecimentos adquiridos sobre frações em seu dia a dia escolar, melhorando o seu raciocínio lógico sobre tal conteúdo.

Palavras- chave:

Compreensão; Números fracionários; Didática; Materiais concretos;

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE - UNICENTRO

PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL - PDE

INDALECIO DOS SANTOS PACHECO

CONTRIBUIÇÕES AO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM EM A COMPREENSÃO DO NÚMERO FRACIONÁRIO E SUAS OPERAÇÕES BÁSICAS.

Produção Didático-Pedagógica apresentada ao PDE – 2010, para complementação da Proposta de Implementação Didática, Ensino Fundamental, a ser aplicada no Colégio Estadual Dr. João Ferreira Neves - EFM, Município de Goioxim – PR, na disciplina de Matemática, sob orientação do Professor Ms. Reinaldo Francisco – Unicentro

Goioxim – Pr.

2011

1. DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

Professor PDE: **Indalecio dos Santos Pacheco**

Área PDE: **Matemática**

NRE: **Guarapuava**

Professor Orientador: **Reinaldo Francisco**

IES vinculada: **UNICENTRO**

Escola de Implementação: **Colégio Estadual Dr. João Ferreira Neves - EFM**

Público alvo: **Alunos do 6º ano do ensino fundamental.**

2. TÍTULO: Material Didático-Pedagógico – **A compreensão do número fracionário e suas operações básicas.**

INTRODUÇÃO:

No ensino das frações como em toda a matemática o importante é evitar a memorização de regras e definições sem a devida compreensão. Desde os anos iniciais: 3º ano, 4º ano e as séries mais avançadas é importante que o trabalho com as frações seja realizado de forma clara e compreensiva objetivando facilitar a aprendizagem das operações com números fracionários.

Todo o ensino das frações deve ser iniciado com a utilização de material concreto: disco de frações, bloco de frações, folha de papel vegetal, jogo de cartas, entre outros. Na medida em que os estudantes vão compreendendo o processo vão naturalmente deixando de usar materiais concretos, resolvendo mentalmente e com a ajuda do professor orientador, descobrirá regras e técnicas de resolução que serão aplicadas com compreensão, possibilitando avançar em seu conhecimento com segurança e clareza.

Com essa proposta de atividades pretende-se facilitar o trabalho do professor e a aprendizagem dos estudantes, devolvendo o prazer das explorações e redescobertas de caminhos para se chegar ao resultado. Esta produção didático-pedagógica referente ao Plano de Desenvolvimento Educacional (PDE), e tendo como título: A Compreensão do Número Fracionário e Suas Operações Básicas serão em forma de unidade didática.

O objetivo principal desse material é tornar significativo o ensino de frações para evitar a aprendizagem mecânica de regras sem a devida compreensão do processo realizado para se chegar a essa regra.

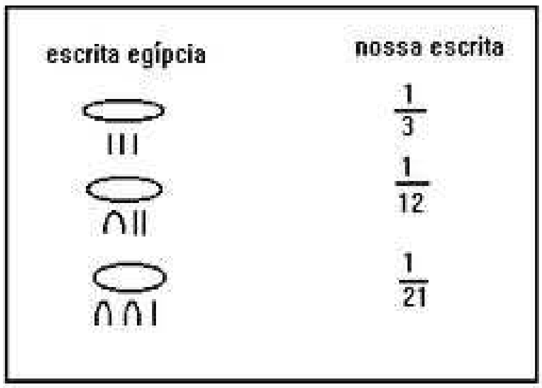
1) **UM POUCO DE HISTÓRIA:**

Baseando-se em registros antigos, uns dos primeiros povos a utilizar as frações foram os egípcios. Sua real aplicação dá-se a um fenômeno natural, ou seja, o grande rio Nilo inundava as terras às suas margens durante o período de chuvas, com isso era necessário fazer demarcações nessas terras, porque as famílias que ali habitavam pagavam tributos proporcionais às terras cultivadas.

Os números fracionários surgiram da necessidade de representar medidas que não são inteiras, isto é, da subdivisão da unidade de medida.

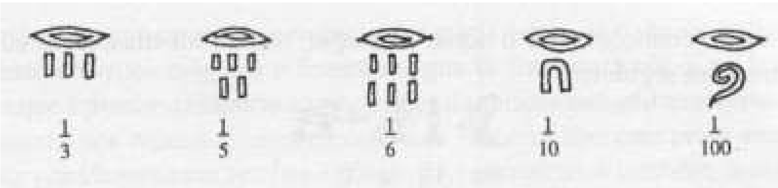
O papiro de Rhind, século XVII A. c., comprova o conhecimento e o uso das frações pelos egípcios. Os egípcios trabalhavam com frações de numerador um e raramente com outros numeradores.

Veja como eles representavam algumas frações:



A figura mostra o Papirus Rhind datado de 1650 a.C. e conhecido também Papirus de Ahmes.

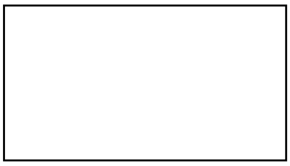
Vejam outras frações:



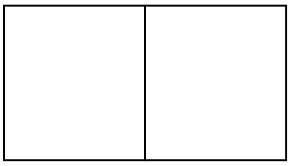
Trabalho de pesquisa:
Pesquisar em livros ou na internet mais histórias sobre as frações.

2) **Apresentando as frações:**

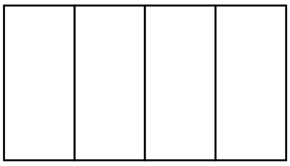
Cada aluno recebe 4 folhas de papel, todas de mesmo tamanho, e deverá descobrir como dobrá-las, de modo a dividi-las em 2 ou 4 ou 8 partes iguais.



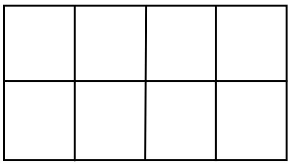
Folha inteira



Folha dividida ao meio



Folha dividida em 4 partes iguais



Folha dividida em 8 partes iguais

A primeira folha representa o todo - referência (inteiro)
Cada parte da segunda folha representa o número fracionário $\frac{1}{2}$.
Cada parte da terceira folha representa o número fracionário $\frac{1}{4}$.
Depois os alunos devem ser incentivados a descobrir qual a fração que representa as partes iguais da ultima folha.
Conhecida as frações o professor pode propor exercícios:

2.1) Em uma tira de papel represente a fração $\frac{2}{3}$, depois cole em seu caderno de anotações.

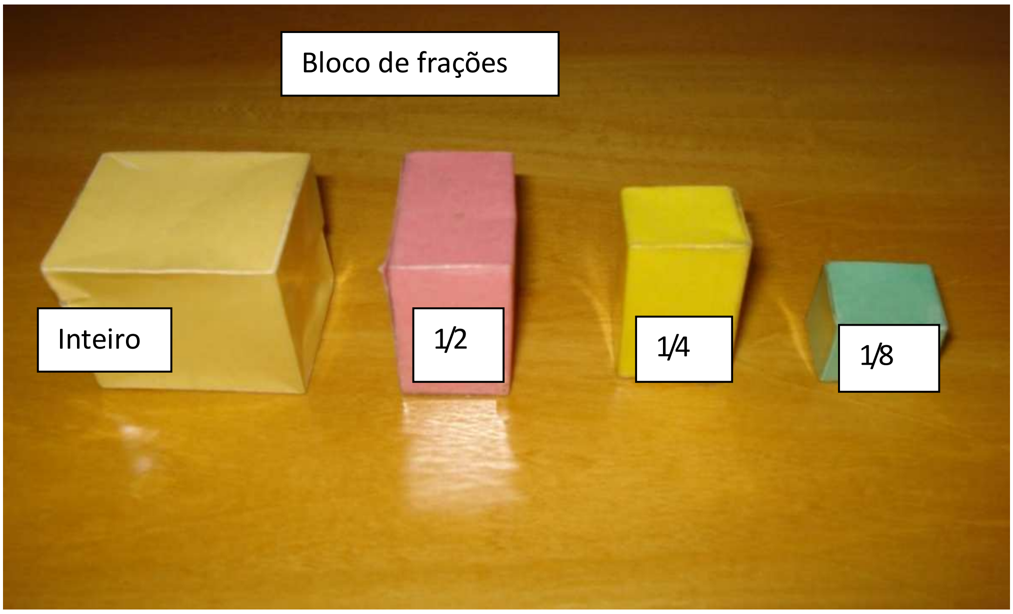
2.2) Em uma tira de papel represente a fração $\frac{7}{8}$, depois cole em seu caderno.

2.3) Seguindo o mesmo procedimento dos exercícios anteriores represente a fração $\frac{8}{8}$.

2.4) Indicado para grupos de 3 pessoas

Usando o material concreto, bloco de frações, represente as frações abaixo e, após a montagem das figuras com os blocos reproduza essas figuras em seu caderno.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{8}{8}.$$



Um número racional pode se referir a diversas situações com diferentes significados: relação parte/todo e medidas, quociente, razão, operador.

Objetivos: ampliar e consolidar os diferentes significados dos números racionais apartir de diferentes usos em seus contextos matemáticos e sociais.

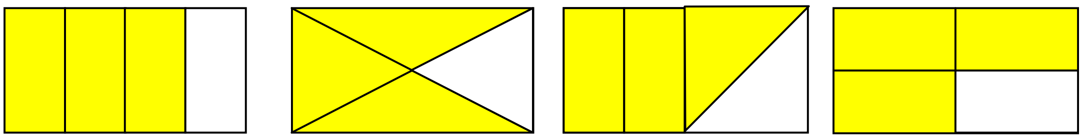
3) O NÚMERO RACIONAL E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS

3.1) FRAÇÃO COMO RELAÇÃO PARTE – TODO

Refere-se a situações em que o todo se divide em partes iguais e a fração indica a relação entre o número de partes e o total de partes

3.2) PARTE-TODO DE GRANDEZAS CONTÍNUAS:

Em duplas, os estudantes representarão por meio de uma folha sulfite a fração $\frac{3}{4}$, dobrando a folha em quatro partes iguais e tomando três dessas partes fazendo o desenho dessa figura em seus cadernos.



Obs.: A divisão é feita em partes congruentes, porém não significa que devem ter a mesma forma.

Dividindo-se uma folha retangular em 10 partes iguais e tomando uma ou duas partes fica claro que os números decimais estão vinculados na relação parte-todo. Ex: $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ ...

Frações como ponto de uma reta numérica é um caso particular em relação à parte todo.

3.3) Parte- todo de grandezas discretas:

A fração $\frac{3}{4}$ sugere outra interpretação: Um grupo de unidades divididas em quatro partes iguais e não somente uma unidade isolada. Consideram-se três dessas partes.

3.3.1) Com uma cartela de ovos, de 12 unidades, cada dupla fará a seguinte representação:

1º - Divide-se a cartela em quatro grupos iguais, cada grupo representa uma parte do todo.

2º- Destacam-se três grupos dessa cartela.

3º- Cada grupo representa a fração $\frac{1}{4}$ que e igual a três unidades.

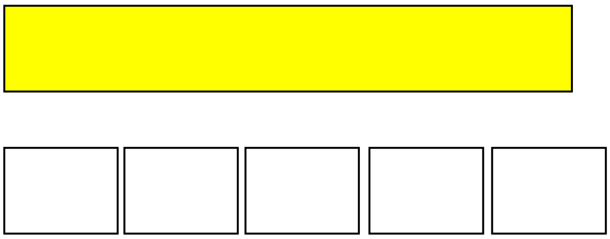
4º- Logo $\frac{3}{4}$ de doze e igual a nove unidades.

3.3.2) $\frac{3}{4}$ Dos estudantes da sala de aula:

Qual o número de estudantes da nossa sala? Pegando como exemplo um total de trinta e seis alunos, primeiramente dividem-se os estudantes em quatro grupos iguais, cada grupo de aluno representa a fração $\frac{1}{4}$, que equivale a nove alunos e $\frac{3}{4}$ de trinta e seis são vinte e sete.

3.4) Números racionais fracionários como medida:

a) Considerando uma régua branca como unidade pergunta-se: Quanto mede a régua amarela?



RÉGUA AMARELA

RÉGUA BRANCA

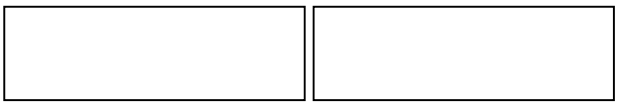
Observa-se a proporcionalidade da régua amarela em relação à régua branca, portanto observa-se:

Cada parte da régua branca é $\frac{1}{5}$ da régua amarela.

b) Tomando como unidade a régua branca pergunta-se: Quanto mede a régua preta?

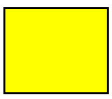
RÉGUA PRETA

RÉGUA BRANCA

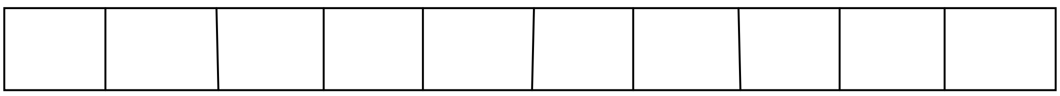


Logo, a régua preta é igual a 2 vezes a régua branca.

c) Tomando como unidade a régua amarela pergunta-se: Quanto mede a régua preta?



RÉGUA AMARELA



RÉGUA PRETA

Logo, a régua preta é igual a 10 vezes a amarela e cada parte da régua amarela é $\frac{1}{10}$ da régua preta.

A relação parte – todo se refere às situações em que um todo (unidade) se divide em partes iguais, e a fração indica a relação entre o número de partes e o total de partes.

Linhares (1998) finaliza o estudo dizendo que se pode indicar que a relação parte- todo, tanto em sua representação contínua quanto discreta, constitui o fundamento da interpretação das frações como medida.

3.5) A FRAÇÃO COMO QUOCIENTE:

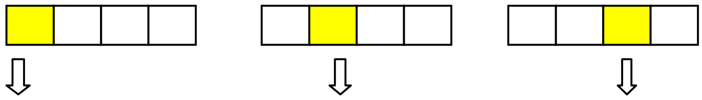
Outro significado é um quociente de um inteiro por outro $\left\{a : b = \frac{a}{b};\ b \neq 0\right\}$. Ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma unidade em três partes e tomar duas dessas (parte – todo) é uma situação diferente daquela que é preciso dividir duas unidades em três partes iguais. Em ambos os casos os resultados é dado pelo mesmo número $\frac{2}{3}$.

3.5.1) Atividade indicada para grupos de 3 pessoas.

a) Divida 3 folhas de sulfite para 4 crianças.
Cada estudante receberá três folhas.

1º passo

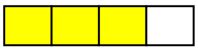
Cada folha deverá ser dividida em 4 partes iguais, cada parte dessa folha representa $\frac{1}{4}$ do inteiro.



$\mathbf{\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

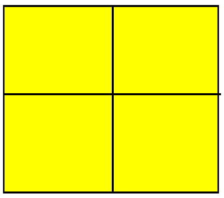
2º passo

Cada criança deve receber $\frac{1}{4}$ de cada folha, totalizando no total $\frac{3}{4}$ do total.



b) $\frac{4}{4}$ como quociente.

Nessa imagem tem-se $\frac{4}{4}$:



$\frac{4}{4} = 1$

Aqui o traço da fração identifica-se com o símbolo da divisão. Nesse caso dizemos que a fração é aparente.

3.6) A FRAÇÃO COMO RAZÃO:

Outro significado é aquele em que o número racional é usado como índice comparativo entre duas unidades.

3.6.1) Atividade indicada para duplas

a)Cada caixa de ovos contém doze unidades, portanto 3 caixas contém 36 ovos, sendo assim pergunta-se: qual é a razão entre o número de caixas e o número de ovos?

$\frac{3 \div 3}{36 \div 3} = \frac{1}{12}$, ou seja uma caixa para 12 ovos.

b) Em um concurso existem 100 candidatos para 10 vagas, sendo assim pergunta-se: qual a razão entre o número de vagas e o número de candidatos?

$\frac{10 \div 10}{100 \div 10} = \frac{1}{10}$, ou seja, 1 vaga para cada dez candidatos.

c) Dois de cada cinco trabalhadores de uma empresa são mulheres, a razão do numero de homens para o número de mulheres é de $\frac{2}{5}$

As situações que envolvem probabilidades, como a chance de sortear uma bola preta de uma caixa que a três bolas pretas e 8 bolas de outras cores é de $\frac{3}{8}$. Ou ainda situações com escalas em plantas e mapas (escala de um centímetro para 100 metros, representada 1:10000) e as que envolvem porcentagens(70 em cada 100 pessoas gostam de televisão, ou seja, $\frac{70}{100}$ das pessoas gostam de televisão).

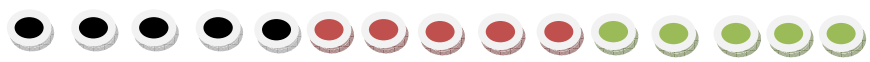
3.7) FRAÇÃO COMO OPERADOR:

Neste caso o número racional desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica.
Exemplo:

Qual é o número que multiplicado por 2 resulta $\frac{2}{5}$?

É $\frac{1}{5}$, pois $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Quanto é $\frac{1}{3}$ de 15 bolinhas?



$\frac{1}{3}$ de 15 bolinhas é 5.

3.7.1) Exercícios para memorização:
Identifique em cada situação abaixo o significado das frações inseridas nos contextos, representando-as graficamente.

a) João dividiu uma torta em 4 pedaços e comeu 3.

b) Preciso repartir 5 folhas para 10 crianças.
c) Cinco de cada sete alunos são meninas.
d) Que número deve ser multiplicado a 2 para obter 1?
e) Um terço de uma dúzia de ovos é 4.
f) Um quarto de 20 quilômetros é 5 quilômetros.
g) $\frac{3}{4}$ de 20 pessoas de uma festa de aniversário.

4) COMPARAÇÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS:

4.1) Atividade indicada para duplas

Objetivo: explorando o material concreto, disco de frações comparar frações com denominadores iguais, denominadores diferentes com numeradores iguais e frações que representam a mesma parte do inteiro.

Material concreto:


(http://br.ruadireita.com/ref-33-023-discos-de-fracoes-com-03-placas_49860/) (03/8/11, 14:30h)

- disco de frações em EVA (disponível nas escolas);
- disco inteiros com centro desmarcado;
- disco dividido pela metade;
- disco dividido em 3 partes iguais e 6 partes iguais;
- disco dividido em 4 partes iguais e 8 partes iguais;
- disco dividido em 5 partes iguais e 10 partes iguais;
- caderno de anotação, lápis, borracha, régua.

Desenvolvimento:
- distribua os discos aos estudantes;
- proponha a formação de todos os discos com suas divisões sobre as carteiras;
- peça aos alunos que escolham um disco formado por ex: disco composto por 5 partes iguais.
- agora desenhe em seu caderno o disco dividido em 5 partes iguais;
- desenhe o disco e pinte a fração que representa $\frac{1}{5}$ do disco;
- desenhe o disco novamente e pinte a parte que representa $\frac{2}{5}$ desse disco;
- desenhe o disco e pinte a parte que representa $\frac{3}{5}$ desse disco;

- desenhe e pinte a parte que representa $\frac{4}{5}$ desse disco;

- desenhe e pinte a parte que representa $\frac{5}{5}$ desse disco;

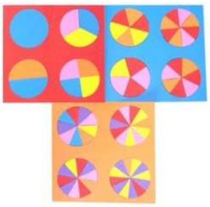
- ordene as frações na ordem crescente:

Ex: $\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{5}{5}$

- agora represente com frações as partes que não foram coloridas em cada figura no seu caderno;
- coloque na ordem decrescente essas frações.

(Imagem meramente ilustrativa)

4.2) Com todos os discos montados sobre a tampa da carteira:


(http://br.ruadireita.com/ref-33-023-discos-de-fracoes-com-03-placas_49860/) (03/8/11, 14:30h)

a) coloque em ordem crescente as frações que representam cada uma das partes em que cada disco foi dividido;
b) quantas peças do disco dividido em 4 partes são necessárias para cobrir o disco de duas partes? Represente essa equivalência de fração.
c) quantas peças do disco dividido em 10 partes é preciso para cobrir 3 partes do disco que está dividido em 5 partes?
d) para cobrir o disco dividido em 10 partes, quantas partes eu preciso do disco que está dividido em 5 partes?

Na exploração dessas atividades podem concluir que:

1º) Quando os numeradores de duas frações são iguais a maior fração é aquela que tem o menor denominador.
2º) Quando os denominadores são iguais entre duas frações a maior fração é aquela que tem o maior numerador.

3º) As frações são equivalentes quando representam a mesma parte do inteiro.

Coloque os sinais >(maior), <(menor) ou = (igual) para comparar as frações abaixo:

a) $\frac{3}{5}$..........$\frac{3}{4}$
b) $\frac{2}{3}$..........$\frac{4}{3}$
c) $\frac{3}{7}$..........$\frac{3}{8}$
d) $\frac{4}{10}$........$\frac{5}{10}$
e) $\frac{4}{5}$.........$\frac{8}{10}$
f) $\frac{1}{2}$..........$\frac{2}{4}$
g) $\frac{3}{5}$..........$\frac{1}{5}$
h) $\frac{4}{7}$..........$\frac{5}{7}$
i) $\frac{3}{5}$..........$\frac{6}{10}$

4.3) COMPARAÇÃO DE DUAS FRAÇÕES COM NUMERADORES E DENOMINADORES DIFERENTES:

Ex: $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, qual é a maior fração?

1º Transformamos em frações equivalentes de mesmo denominador (não necessariamente o m.m.c)

$\frac{3x2}{4x2}$ e $\frac{1x4}{2x4}$

$\frac{6}{8}$ e $\frac{4}{8}$ Fica fácil verificar que $\frac{6}{8}$ e maior que $\frac{4}{8}$, então $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$.

Escrevemos:

$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

Compare as frações:

a) $\frac{3}{5}$.........$\frac{1}{4}$
b) $\frac{4}{7}$.........$\frac{1}{5}$
c) $\frac{7}{8}$.........$\frac{1}{2}$

d) $\frac{9}{10}$........$\frac{3}{7}$

e) $\frac{8}{15}$........$\frac{2}{3}$

f) $\frac{4}{5}$.........$\frac{2}{3}$

g) $\frac{8}{3}$.........$\frac{9}{5}$

h) $\frac{1}{2}$.........$\frac{1}{3}$

5) FRAÇÕES EQUIVALENTES

Objetivos:

- Definir frações equivalentes.
- Conhecer a propriedade fundamental das frações e aplicá-las para a obtenção de frações equivalentes.
- Auxiliar os estudantes a ampliar o conceito na elaboração de novas idéias e confronto de seus conhecimentos sobre o assunto trabalhado.

5.1) Atividade indicada para duplas.

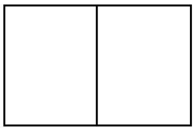
Materiais:

Folha de sulfite, régua, lápis de cor, lápis e caderno de anotações.

Recomenda-se trabalhar em grupos de 3 ou 4 estudantes.

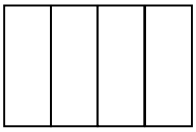
1º) Cada estudante receberá uma folha de papel sulfite A4.

2º) Dobrar a folha ao meio



Cada parte da folha representa $\frac{1}{2}$ do total.

3° Cada estudante irá dobrar cada metade da folha ao meio novamente, ficando com 4 partes iguais da folha.



Cada parte da figura representa $\frac{1}{4}$ do total, e duas partes, $\frac{2}{4}$ equivalem a $\frac{1}{2}$.

4° A folha deverá ser dobrada ao meio conforme a figura abaixo:

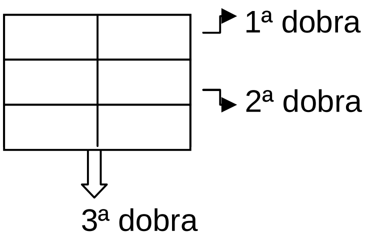
Cada parte da figura representa $\frac{1}{8}$

Os estudantes deverão observar que $\frac{1}{2}$ é igual $\frac{2}{4}$ que é igual a $\frac{4}{8}$, logo podemos dizer que as frações são equivalentes.

Escrevemos: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$,

5.2) Atividade indicada para duplas.

1° Cada estudante deverá dobrar a folha conforme a figura abaixo em 3 partes iguais e depois dobrar ao meio.



Os estudantes deverão observar que a fração $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, podendo dar continuidade fazendo novas dobraduras na folha.

DEFINIÇÃO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES: Duas ou mais frações que representam a mesma parte da unidade são chamadas de frações equivalentes.

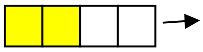
Exemplos:

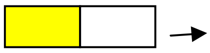
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} \ldots$$

Verifica-se que a fração $\frac{1}{2}$ pode ser representada por infinitas frações equivalentes.

6) SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Dividindo o numerador e o denominador de cada fração por um mesmo número natural diferente de zero podemos escrever quando possível, uma fração com números menores sem alterar o resultado dessa fração.

Ex: simplifique as frações: ex:  $\frac{2}{4}$ $\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$

 $\frac{1}{2}$

a) $\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{10 \div 10}{20 \div 10} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$

Quando não é mais possível simplificar, dizemos que a fração é irredutível.

Pelas atividades desenvolvidas, encontramos a Propriedade Fundamental Das Frações: Quando multiplicamos ou dividimos uma fração (numerador ou denominador) por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada.

Exemplos:

a) $\frac{1 \text{ x } 4}{2 \text{ x } 4} = \frac{4}{8}$

b) $\frac{\mathbf{2 \text{ x } 2}}{\mathbf{3 \text{ x } 2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}$

c) $\frac{\mathbf{4 \div 4}}{\mathbf{8 \div 4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

6.1) Jogo de frações equivalentes

Indicado para duplas!
Objetivos
Memorizar o conceito de frações equivalentes.
Conhecer e aplicar a propriedade fundamental das frações para obter frações equivalentes.

Materiais

Papel rígido; cartolina; papel cartão ou papelão no tamanho 9 cm x 6 cm.

Número de cartas: 16.

1ª e 2ª carta: $\frac{4}{6} \boldsymbol{e} \frac{2}{3}$

3ª e 4ª carta: $\frac{2}{3} \boldsymbol{e} \frac{10}{15}$

5ª e 6ª carta: $\frac{3}{4} \boldsymbol{e} \frac{12}{16}$

7ª e 8ª carta: $\frac{1}{2} \boldsymbol{e} \frac{50}{100}$

9ª e 10ª carta: $\frac{3}{5} \boldsymbol{e} \frac{9}{15}$

11ª e 12ª carta: $\frac{9}{21} \boldsymbol{e} \frac{3}{7}$

13ª 14ª carta: $\frac{10}{15} \boldsymbol{e} \frac{100}{150}$

15ª e 16ª carta: $\frac{6}{5} \boldsymbol{e} \frac{36}{30}$

Desenvolvimento:

- Cada estudante receberá um jogo de cartas.

- Os estudantes embaralham as cartas e distribuem na mesa, com a face para baixo, formando as fileiras e colunas.

- Na sua vez, cada estudante irá virar duas cartas. Se as frações apresentam equivalência, o estudante ficará com elas e jogará novamente, caso contrário devolverá à mesa na mesma posição de antes.

- Ganha o jogo quem montar o maior número de pares.

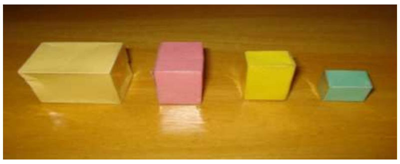
(7) ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

(7.1) Atividade para ser trabalhada em grupos de 3 ou 4 estudantes.

Materiais:

- projetor holográfico;

- bloco de frações;



- caderno de anotação;

- lápis, caneta, borracha e régua.

Objetivo:

Essa atividade tem como objetivo levar o estudante a efetuar corretamente a adição e a subtração de dois ou mais números fracionários de denominadores iguais ou diferentes, e pela análise de cada operação realizada com o auxílio de materiais concretos redescobrindo uma técnica operatória que facilite o cálculo com frações e possibilite a compreensão dos processos neles envolvidos.

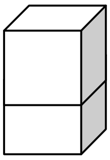
(7.2) Atividade para ser trabalhada em grupos de três:

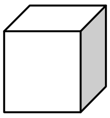
1º Parte: Frações Com Denominadores Iguais

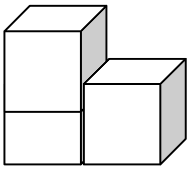
a) Efetue as operações:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

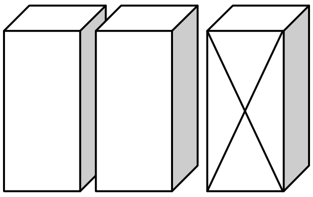
b) $\frac{2}{8}$ + $\frac{1}{8}$ = $\frac{3}{8}$

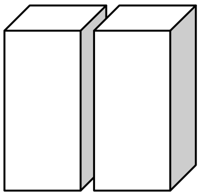






c) $\frac{3}{4}$ - $\frac{1}{4}$ = $\frac{2}{4}$





d) $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$

e) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

f) $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}$

g) $\frac{7}{5} - \frac{3}{5}$

h) $\frac{7}{10} + \frac{3}{10}$

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

j) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

A Conclusão que podemos tirar dos exercícios acima é:

Como podemos resolver soma e subtração de frações com mesmo denominador sem o uso do material concreto?

Regra:

Para somar ou subtrair frações de denominadores iguais, efetuamos a soma ou a subtração de seus numeradores e repelimos o denominador.

7.3) Atividade para ser trabalhada em grupos de três:

2º Parte: Adição e Subtração de Números Fracionários Com Denominadores Diferentes

Contendo as seguintes peças:

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{1}{2}$

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{1}{4}$

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{1}{5}$

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{2}{3}$

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{3}{5}$

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{3}{4}$

-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{4}{5}$

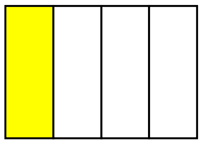
-retângulo ou quadrado de papel vegetal representando a fração $\frac{1}{3}$

Desenvolvimento:

- distribuir os retângulos aos estudantes.

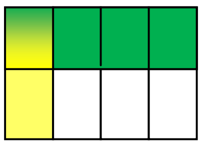
- formular problemas que possam ser resolvidos, calculando, por exemplo:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ Solicite aos estudantes que separem os retângulos correspondentes as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Que coloquem uma figura sobre a outra e anote em seus cadernos com números e desenhos as frações obtidas:



$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

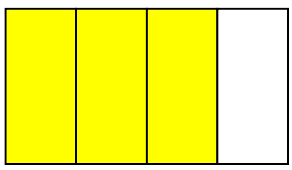


Observe que: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ do inteiro

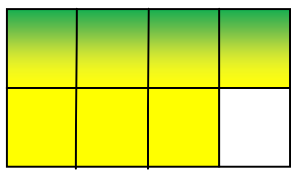
$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ do intero

Então: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{2+4}{8} = \frac{6}{8}$

b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ Separe os retângulos que representam as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, e proceda como no caso anterior substituindo a soma pela subtração.



$\mathbf{\frac{3}{4}}$



$\mathbf{\frac{1}{2}}$

$\mathbf{\frac{3}{4} = \frac{6}{8}}$ $\mathbf{\frac{1}{2} = \frac{4}{8}}$

Os estudantes devem ser motivados a descobrir a regra.

Então: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6}{8} - \frac{4}{8} = \frac{2 \div 2}{8 \div 2} = \frac{1}{4} = \frac{6-4}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Assim, sendo de um geral dado as frações

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ → multiplicando a 1ª fração por *d* e a 2ª fração *b* aplicando a propriedade da equivalência de frações temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{axd}{bxd} + \frac{cxb}{dxb} \rightarrow \frac{ad+bc}{bd}$$

Para a subtração temos:

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ → procedemos como no caso anterior, temos:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{axd}{bxd} - \frac{cxb}{dxb} \rightarrow \frac{ad-bc}{bd}$$

Regra operatória:

Para adicionar e subtrair duas frações com denominadores iguais ou diferentes, basta multiplicar o numerador da 1ª pelo denominador da 2ª (mais) ou (menos), a multiplicação do denominador da 1ª pelo numerador da 2ª sobre o produto dos denominadores.

Ex: $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6+5}{10} = \frac{11}{10}$

Continue resolvendo com os retângulos e observando as relações obtidas:

c) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

f) $\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

g) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$

h) $\frac{3}{5} - \frac{1}{6}$

i) $\frac{4}{7} + \frac{2}{5}$

j) $\frac{3}{8} - \frac{1}{3}$

(8) MULTIPLICAÇÕES DE FRAÇÕES

Objetivo: Criar condições para que o estudante desenvolva a técnica de efetuar corretamente a multiplicação de frações.

(8.1) Multiplicação de um número natural por um número fracionário

Considere a seguinte situação:

Maria levou uma sacola contendo maças e na hora do lanche partiu ao meio cada fruta e distribuiu um pedaço para cada uma de suas 9 amigas. Quantas maçãs ela distribuiu?

Para resolução desse problema devemos fazer:

$9\text{x} \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Exercício

Calcule:

a) $4\text{x} \frac{1}{3}$
b) $5 \text{ x } \frac{3}{20}$
c) $8 \text{ x } \frac{1}{3}$
d) $9 \text{ x } \frac{1}{5}$
e) $7 \text{ x } \frac{5}{4}$

Obs.(Os estudantes poderão usar o conceito da multiplicação, somar parcelas iguais, ou representar geométricamente.)

Os estudantes poderão perceber que quando se multiplica um número natural por um número fracionário, multiplica-se o número natural pelo numerador da fração conservando o denominador.

Materiais:

Lápis, canetas, régua, papel vegetal, data-show e lápis de cor, retângulos representando as frações: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$.

(8.2) Multiplicação de números fracionários

Veja as seguintes situações:

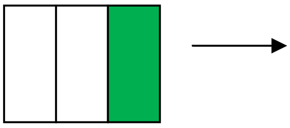
8.2.1) Em uma sala de aula $\frac{1}{3}$ dos estudantes são meninas e somente a metade dessas meninas gostam de matemática. A quantidade de meninas que gostam de matemática representa que fração do número de estudantes dessa sala?

A tradução desse problema pode ser assim:

Quanto vale $\frac{1}{2}$ $\mathbf{de}$ $\frac{1}{3}$?

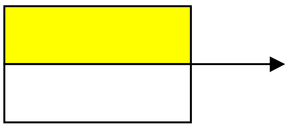
Resolvendo a situação geometricamente:

Dividir o papel vegetal em 3 partes iguais e destacar um terço do papel.



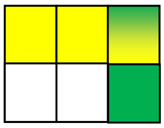
Terça parte.(1 ª folha)

Dividir o papel vegetal em duas partes iguais e destacar uma delas.



Metade do papel vegetal. (2 ª folha)

Sobrepondo a primeira folha sobre a segunda temos:



$\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ da folha é igual a $\frac{1}{6}$ da folha

Então $\frac{1}{2}\boldsymbol{de}\frac{1}{3}$ $\mathbf{da\ figura} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Obs.: Em matemática a palavra “de” pode ser substituída por “x” da multiplicação.

8.2.2) A bandeira de um time de futebol tem a forma retangular colorida em três cores: amarelo, verde e branco. Nessa bandeira $\frac{1}{3}$ corresponde a faixa amarela e, dessa faixa $\frac{1}{4}$ foi ocupado pelo emblema do time. Que fração da bandeira é ocupada pelo emblema do time?

Resolvendo

A bandeira é um inteiro divido em três partes iguais.

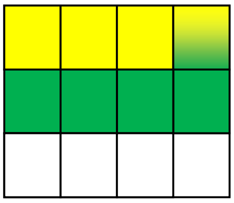
$\rightarrow$ Amarelo ($\frac{1}{3}$ $\mathbf{da\ bandeira}$)

$\rightarrow$ Verd

$\rightarrow$ Branco

Quanto é $\frac{1}{4}\mathbf{de}\frac{1}{3}$?

Dividindo $\frac{1}{3}$ em quatro partes iguais temos:



$\frac{1}{4}$ **de** $\frac{1}{3}$ **da bandeira** é **igual a** $\frac{1}{12}$ **avos da bandeira**.

Assim, $\frac{1}{4}$ **de** $\frac{1}{3}$ é **igual a** $\frac{1}{12}$ **da bandeira, ou seja,** $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Logo, o emblema ocupa $\frac{1}{12}$ da bandeira.

8.2.3) Procedendo como nos casos anteriores calcule $\frac{3}{4}$ **de** $\frac{4}{5}$

Obs.: Para multiplicar dois números fracionários basta multiplicar o numerador de uma pelo numerador da outra e multiplicar o denominador de uma pelo denominador da outra.

De um modo geral, dadas duas frações $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, **b e d** $\neq 0$, **temos** $\frac{a \times c}{b \times d}$

9) Técnica do cancelamento

Objetivo: Propiciar aos estudantes aplicar a técnica do cancelamento como uma forma de simplificar a multiplicação de frações entre números fracionários.

Observe

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{6 \div 3}{21 \div 3} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{7}{12} \times \frac{4}{7} = \frac{28 \div 2}{84 \div 2} = \frac{14 \div 2}{42 \div 2} = \frac{7 \div 7}{21 \div 7} = \frac{1}{3}$$

Nos exemplos acima, fizemos as simplificações depois de obter o produto, porém as multiplicações com duas ou mais frações torna-se mais fácil quando é feita a simplificação antes de efetuar a operação.

Observe

$$\frac{3}{7}x\frac{2}{3}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{3}x\frac{9}{7}x\frac{1}{10}=\frac{2x3x3x1}{3x7x2x5}=\frac{3}{35}$$

$$\frac{7}{12}x\frac{4}{7}=\frac{7x2x2}{2x2x3x7}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{9}x\frac{18}{6}\,x\frac{3}{4}=\frac{3x3x3x2x3}{3x3x3x2x2x2}=\frac{3}{4}$$

Os estudantes deverão ser motivados a resolver esse tipo de exercício sem a decomposição de números, quando possível.

9.1) Atividade indicada para duplas:

Gincana do produto de frações

Objetivo: Memorizar a técnica do cancelamento

Utilizar grupos de 3 ou 4 pessoas

Os grupos terão de efetuar as operações e colocar os resultados no quadro de giz dentro do tempo determinado. Os integrantes de cada grupo poderão ser sorteados e cada grupo irá também fiscalizar os outros grupos, realizando a correção dos resultados apresentados no quadro de giz.

Organize a gincana em etapas:

1º Faça o sorteio dos grupos.

2º Determine o tempo máximo para que os alunos efetuem as multiplicações e simplificações por meio da técnica do cancelamento.

3º determine o tempo máximo para que os estudantes registrem os resultados em uma folha, ou no quadro de giz.

4º sorteie os grupos de dois em dois para que um corrija os resultados do outro, questionado e sugerindo alterações.

5º Apresente os resultados corretos e defina o grupo que obteve sucesso na gincana.

Exercícios

1) Efetue as multiplicações e utilize a técnica do cancelamento quando possível

a) $\frac{1}{5} \mathbf{x} \frac{4}{7}$ **b)** $\frac{3}{4} \mathbf{x} \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{4}{5} \mathbf{x} \frac{5}{9}$ **d)** $\frac{3}{7} \mathbf{x} \frac{5}{2}$ **e)** $\frac{9}{8} \mathbf{x} \frac{4}{36}$ **f)** $\frac{3}{45} \mathbf{x} \frac{9}{6}$ **g)** $\frac{30}{10} \mathbf{x} \frac{20}{60}$

h) $\frac{8}{9} \mathbf{x} \frac{45}{4}$ **i)** $\frac{3}{10} \mathbf{x} \frac{20}{6} \mathbf{x} \frac{8}{7} \mathbf{x} \frac{14}{16}$ **j)** $\frac{3}{7} \mathbf{x} \frac{14}{9} \mathbf{x} \frac{4}{3} \mathbf{x} \frac{9}{8}$

9.2) Calcule mentalmente cada produto abaixo e analise os resultados.

$\frac{1}{2} \mathbf{x}\ \mathbf{2}$

$\frac{5}{4} \mathbf{x} \frac{4}{5}$

$\frac{3}{5} \mathbf{x} \frac{5}{3}$

$\frac{11}{13} \mathbf{x} \frac{13}{11}$

$\frac{5}{9} \mathbf{x} \frac{9}{5}$

9.2.1) Responda:

a)Que número você encontrou?

R: 1

b)O que você pode observar com relação dos fatores em cada multiplicação?

R: Os fatores são inversos.

c)Como são chamados esses números?

R: Números inversos.

Conclusão:

O produto de dois números inversos é igual a 1.

9.2.2) Quantas vezes a fração $\frac{1}{2}$ cabe em:

a) 1 litro?

b) $\frac{1}{2}$ litro?

c) 2 litros?

d) $\frac{3}{2}$ litros?

e) 4 litros?

9.2.3) Quantas vezes $\frac{1}{4}$ de metro cabem em:

a) $\frac{1}{2}\mathbf{m}$?

b) 1 m?

c) $\frac{11}{2}\mathbf{m}$?

10) DIVISÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Ao introduzir o conteúdo divisão de frações, é necessário o uso de materiais concretos para que o estudante tenha clareza dos resultados obtidos, para que possa selecionar e organizar as informações relevantes para interpretá-las e depois expressar generalizações sobre as propriedades da operação que favoreçam possíveis soluções pois, tem divisão de frações que se torna impraticável o uso de matérias concretos.

Selecionamos nesse estudo três idéias já conhecidas para encontrar o resultado da divisão de frações.

10.1) Atividade indicada para duplas:

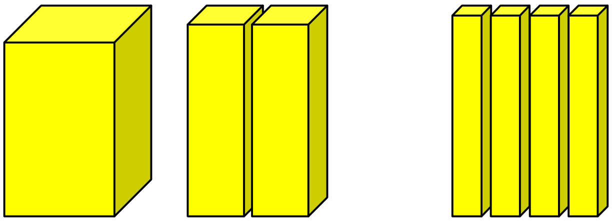
Materiais:

- blocos de frações;

- projetor holográfico;

- caderno de anotações;

- lápis, caneta, borracha e régua.



$\mathbf{1}$ $\qquad\qquad$ $\frac{2}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{4}{4}$

1º Divisão usada com a definição de REPARTIR EM PARTES IGUAIS.

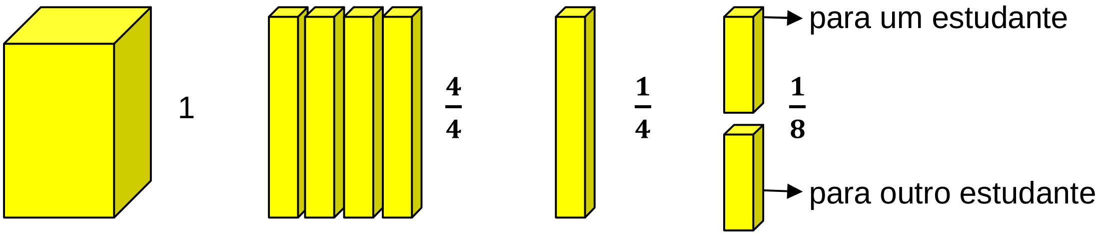
a) Dividir $\frac{1}{4}$ do bloco de frações para dois estudantes;

* os estudantes separam a peça correspondente a $\frac{1}{4}$ do bloco de frações;

* repartem em duas partes iguais;

* verificam que cada parte repartida corresponde a $\frac{1}{8}$ do bloco de frações;

* os estudantes devem representar as operações realizadas em seus cadernos reproduzindo os desenhos obtidos com o material concreto.



Então: $\frac{1}{4} \div \mathbf{2}$ $= \frac{1}{8}$ pode se escrever: $\frac{1}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{8}$

2º Divisão como já estamos acostumados a fazer com os números naturais, fazendo a seguinte pergunta: QUANTAS VEZES O DIVISOR CABE NO DIVIDENDO?

Na divisão de dois números naturais, por exemplo 10 ÷ 2 que é igual a 5, como já é de costume fazer. Se queremos achar o resultado de 10 dividido por 2, procuramos quantas vezes o 2 cabe em 10. Como 2 cabe 5 vezes em 10, dizemos que 10 ÷ 2 = 5.

Essa idéia pode ser ampliada quando procuramos o resultado de uma divisão de frações, exemplo:

Encontrar o quociente de $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$

Pergunta-se: quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabem em $\frac{1}{2}$?

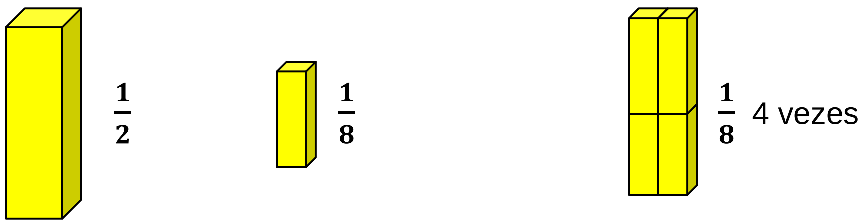
* Os estudantes separam a peça que representa a fração $\frac{1}{2}$ do bloco de frações.

* Separam as peças que correspondem a $\frac{1}{8}$ do bloco de frações.

* Sobrepondo as peças que representam $\frac{1}{8}$ do bloco de frações sobre a peça que representa $\frac{1}{2}$ do bloco de frações.

A resposta aparece imediatamente. Então podemos escrever:

$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = 4$



Pode-se observar que as idéias de repartir e quantas vezes cabe são equivalentes.

3º Transformando o divisor da fração em 1, pois qualquer número dividido por 1 é igual a ele mesmo, isso facilitara a divisão para isso utilizamos duas idéias já conhecidas:

1º Quando se multiplica o dividendo e o divisor por um mesmo número o quociente não se altera.

Ex: $\frac{6}{3} = \mathbf{2}$ e $\frac{6x2}{3x2} = \frac{12}{6} = \mathbf{2}$

2º O produto de dois números inversos é igual a um.

Exemplo: $\frac{1}{2} \text{ x } 2 = 1$

Observe a seguinte situação:

$\frac{4}{5} \div \frac{2}{7} \rightarrow \frac{\frac{4}{5} x \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} x \frac{7}{2}}$,mas porque $\frac{7}{2}$? Porque $\frac{7}{2}$ é igual o inverso multiplicativo do divisor e transforma o divisor em 1.

Então temos:

$\frac{\frac{4}{5} x \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} x \frac{7}{2}} = \frac{\frac{4}{5} x \frac{7}{2}}{1} = \frac{4}{5} \text{x} \frac{7}{2}$, qualquer número dividido por 1 resulta nele mesmo.

Então: $\frac{4}{5} \text{x} \frac{7}{2} = \frac{28 \div 2}{10 \div 2} = \frac{14}{5}$

Conclusão: para dividir uma fração pela outra multiplicamos a 1ª pela 2ª invertida ou simplesmente multiplicamos o numerador da 1ª pelo denominador da 2ª sobre o numerador da 2ª pelo denominador da 1ª.

Ex: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{4}$, ou seja, de forma geral

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{axd}{bxc}$

Fazendo mais você aprende mais!

Utilizando os blocos de frações, quando necessários calcule:

a) $\frac{1}{2} \div 2$

b) $\frac{1}{4} \div 2$

c) $\mathbf{2} \div \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

d) $\mathbf{2} \div \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

e) $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \div \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

f) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \div \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

g) $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \div \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$

h) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \div \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

ATIVIDADE DE MEMORIZAÇÃO

JOGO DO KALAH

Atividade de memorização: (indicado para duplas)

Objetivo: Memorizar as operações básicas estudadas com números fracionários, com destaque no significado das frações com grandezas discretas.

Desenvolvimento

Cada dupla receberá um dado.

Os participantes lançarão o dado para o alto e quem obtiver a maior pontuação iniciará o jogo.

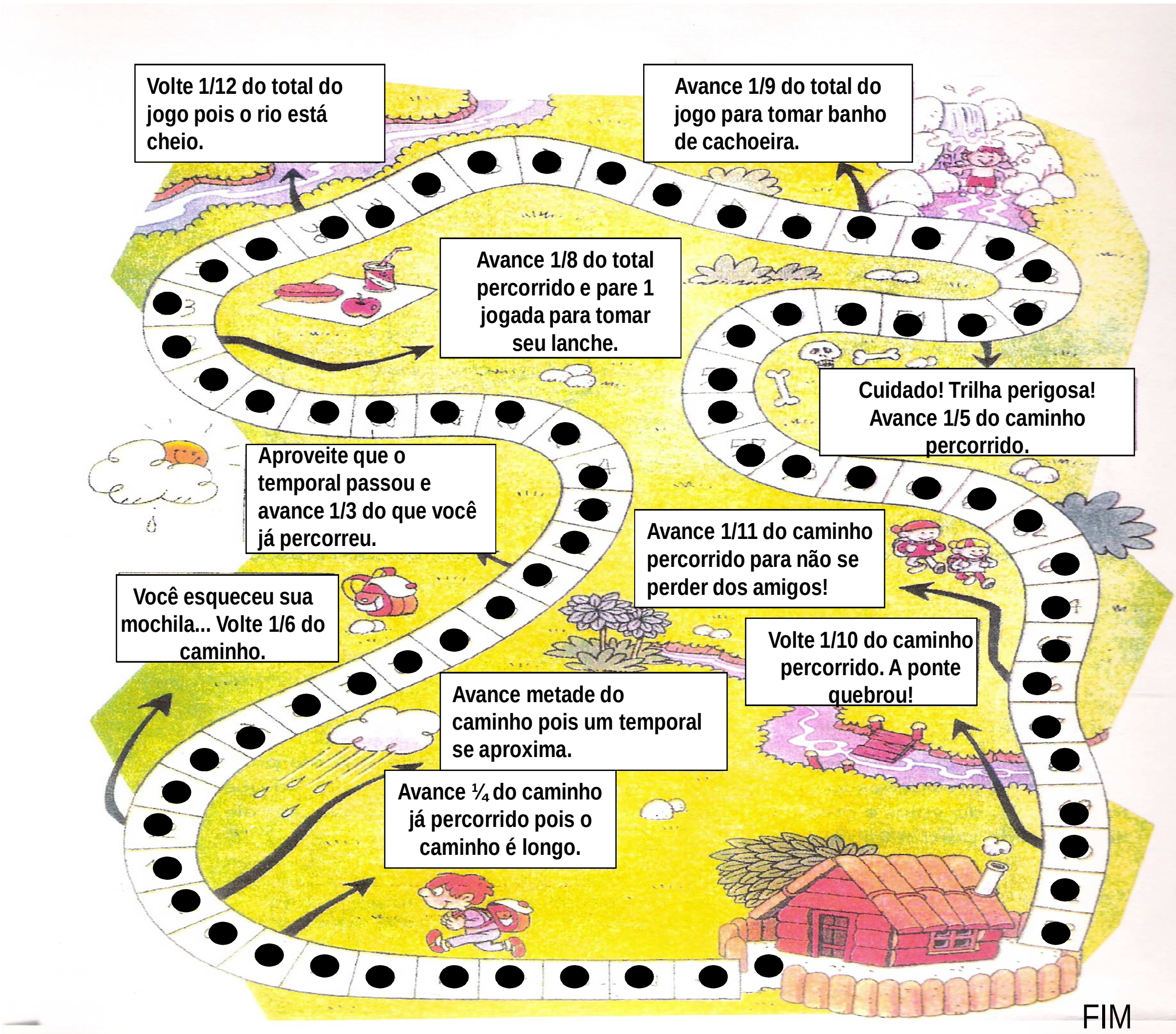
O vencedor deverá andar o número de casas de acordo com a pontuação obtida no lançamento do dado.

Caso o jogador esteja em uma casa que possua um comando ele deverá obedecê-lo efetuando corretamente os cálculos indicados.

Caso o jogador não saiba realizar o calculo deverá passar a vez para o próximo jogador.

O vencedor é aquele que completar antes o percurso.

(Atividade adaptada pela professora da UNICENTRO Doroteya Gavanski)



Referências

BRASIL, SECRETARIA DA EDUCAÇÂO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais – matemática, Brasília 1997**.

São Paulo (cidade) secretária municipal da Educação. Diretoria da educação técnica. Orientações curriculares e proposição de expectativa de aprendizagem para o ensino fundamental: ciclo 2: Matemática SP 2007.

Site:<http//: educar.sc.usp.br/matemática/m5p2t6.htm>. Acesso em: 7 nov.2008.

A conquista da matemática 6º ano/ José Ruy Geovane Junior, Benedito Castrucci. – Ed.renovada- SP.FTD2009.

A conquista da matemática 7º ano/ José Ruy Geovane Junior, Benedito Castrucci. – Ed.renovada- SP.FTD2009.

BARBOSA, RUY MADSEN. **Matemática, metodologia e complementos para**

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2° Edição.

BPC. **Ciência hoje na escola**. Volume 8, Matemática 3° Edição, 2003

BRASIL, SECRETARIA DA EDUCAÇÂO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais**.

professores primários. 5° edição 1969.

CAVAZOTTI, Maria Auxiliadora. **Fundamentos Teóricos e Metodológicos da Alfabetização**. IESDE, 2006. 100p.

- CARAÇA, BENTO DE JESUS. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Edição 2005.

- DA SILVA, MARIA JOSÉ FERREIRA e AG ALMOULOUD, SADDO. Professores doutores da graduação e do programa de estudo de Pós-graduação Matemática-PUC-SP. Revista Bolema. **As Operações com Números Racionais e seus significados a partir da Concepção Parte-todo**.

- DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas Matemática**. 12ª edição, 2005.

- D’AMBRÓSIO,Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria a Prática**. 17ª edição, 2009.

- DAVID, M.M.S; FONSECA, M.C.F.R. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária.**

- DIENES, Z.P. Frações. São Paulo: **Editora Pedagógica e Universitária Ltda,1975.**

- ENGEL, 200 p.184.

- IFRAH, Georges. **Os números, a história de uma grande invenção**. 11° Edição, 2005.

- ROMANATTO, M.C. **Número Racional: Relações necessárias a sua compreensão .Campinas** :UNICAMP, 1997.(Tese de doutorado).

-Revista Bolema, Rio claro (SP), ano 21 ,2008,p.55 a 78.

- MASCARENHAS, Cristiane; CASARIN, Janete; Silva, João. **A educação Matemática e a epistemologia genética: Um estudo sobre a compreensão do número fracionário**.

- NASCIMENTO, JULIANE DO. **Perspectivas para aprendizagem de números racionais**.
- MARANHÃO, M.C.S., IMENES, L.M. **Jogos com frações. In: Revista do Ensino de Ciências**. São Paulo. n.14,set/1985.
- NASCIMENTO, JULIANE DO. **Perspectivas para aprendizagem de números racionais**.
- PILETTI, Nelson. **Estrutura e funcionamento do ensino fundamental**. 23° Edição, 1998.
- SÃO PAULO (Estado) Secretária da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. SARESP 97: Matemática – **Análise Pedagógica dos Itens das provas Aplicadas aos Alunos das 4ª e 8ª séries**. São Paulo: SE/CENP, 1992.
- VALLE,Bertha de Borja Reis do. **Fundamentos Teóricos e metodológicos do Ensino Fundamental**. IESDE,2005. P.180.
- VALERA ,A R. Uso social e escolar dos números racionais**.**