O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2012

VOLUME I

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NUMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Janete Guiraldeli Lenartovicz[1]
Magna Natalia Marin Pires[2]

Resumo
Este estudo teve como tema central a Investigação Matemática, seu principal objetivo foi apresentar as tarefas investigativas como uma possibilidade de encaminhar as aulas de Matemática de forma que os alunos tenham um maior envolvimento. O presente trabalho foi desenvolvido com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede pública do Estado do Paraná e propôs a eles trajetórias de ensino e aprendizagem que envolveram tarefas de matemática com as estratégias de Investigação Matemática e Resolução de Problemas. Para compor este artigo utilizamos, durante a aplicação das tarefas, diário de aula, materiais produzidos pelos alunos e depoimentos, os quais nos deram elementos para discutir o processo de ensino e de aprendizagem dos alunos durante a realização das tarefas investigativas.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Resolução de Problemas. Trajetórias de Ensino e Aprendizagem.

1 Introdução

Na tentativa de acompanhar as mudanças que o mundo sofre constantemente, novas formas de encaminhamento de aulas são propostos; dentre eles estão a Resolução de Problemas, a Investigação Matemática, o uso de Tecnologias, os Jogos. Nessas novas propostas de encaminhamento de aula o aluno tem uma participação mais ativa no processo de ensino e aprendizagem.

Considerando a minha experiência em sala de aula sinto a necessidade de trazer essa nova proposta para ganhar a atenção e a participação mais efetiva do aluno. Por essa razão este trabalho oportunizou aos alunos trajetórias de ensino e aprendizagem que envolveram tarefas de matemática com as estratégias de Investigação Matemática e Resolução de Problemas.

A problemática inicial que deu origem a este estudo foi: quais alternativas podem ser utilizadas para desenvolver a aula de matemática de maneira que os alunos tenham participação mais ativa no processo de ensino e de aprendizagem? Frente a esta problemática definimos como objetivo principal apresentar as tarefas

---

[1] Curso de Especialização em Educação Matemática, graduada em Matemática, atua no Colégio Estadual César Lattes – Ensino Fundamental e Médio. Cambira-Pr.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática-UEL, Mestre em Educação-UFPR, Especialista em Educação Matemática-UEL, Licenciada em Matemática–UEL, Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

investigativas como uma possibilidade de encaminhar as aulas de Matemática de forma que os alunos se envolvam, produzam e aprendam.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná explicitam que a prática pedagógica por meio de investigações matemáticas tem sido recomendada por vários estudiosos como forma de contribuir para uma melhor compreensão da Matemática.

A estratégia de Investigação Matemática nas aulas inspira-se no trabalho desenvolvido pelo matemático. O matemático geralmente inicia seu trabalho tentando resolver um problema, para isso ele faz conjecturas, testa-as, valida ou refuta essas conjecturas, em seguida faz novas conjecturas e assim por diante. Imitar esse processo é a indicação dos autores dessa estratégia (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2003) como um dos caminhos produtivos para o aluno aprender matemática.

2 A Trajetória de Ensino e Aprendizagem

A experiência descrita neste artigo foi desenvolvida com 20 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual César Lattes – Ensino Fundamental e Médio, localizado no município de Cambira/Pr, explorando as sequências de números figurados por meio de tarefas de investigação matemática.

A sala de aula foi organizada em duplas e o trabalho desenvolvido segundo as fases explicitadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), de acordo com as etapas: apresentação da tarefa de investigação aos alunos, trabalho individual dos alunos e discussão e sistematização do que os grupos trabalharam.

Inicialmente foi esclarecida aos alunos a forma de avaliação do professor, uma vez que se fez uso de uma metodologia diferenciada, deixando claro que os instrumentos de avaliação para as tarefas investigativas seriam observações, apresentações orais e elaboração de relatórios escritos.

No que se refere ao relatório escrito foi exposto aos alunos que eles iriam descrever os passos seguidos na exploração da tarefa proposta, de forma clara e organizada, por meio de desenhos, tabelas, esquemas, operações, os diálogos da dupla, entre outros. Também esclarecemos que eles deveriam fazer um resumo do que aprenderiam com este trabalho, além de organizarem um comentário geral em relação ao que fariam, referindo-se, por exemplo, ao interesse que a tarefa lhe

despertou, aos aspectos em que tiveram maior dificuldade e a maneira como decorreu o trabalho na dupla. Vale ressaltar que essa estrutura de relatório como uma possibilidade avaliativa de uma atividade de investigação é sugerida por Hernández; Ventura (1998) apud Ribeiro (2009).

As oito tarefas investigativas propostas foram apresentadas na Unidade Didática e realizadas em duplas, explorando os números figurativos na abordagem de conteúdos matemáticos e neste artigo fizemos a opção por relatar as tarefas 1 e 2.

2.1 Tarefa 1

Após a organização da turma em duplas, foram distribuídas as folhas com a primeira tarefa investigativa, para que os alunos fizessem a leitura e respondessem as questões apresentadas para depois realizarem a discussão e sistematização do que as duplas trabalharam.

Observe as sequências:

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,...

1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,...

a. Existe uma relação entre elas. Se existir, explique qual é.
b. Os matemáticos gregos (600 a.C.) representavam números utilizando arranjos de pontos em formas geométricas. Sabendo disso, como você representaria a segunda sequência de números, dispondo pontos de forma a obter desenhos com formas geométricas?
c. Qual o nome da(s) figura(s) geométrica(s) obtida(s) na representação da sequência de números do item “b”?
d. Portanto, a sequência 1,4,9,16,25,36,49,... é chamada sequência de _____.
e. Com base nas respostas às questões anteriores, explique com suas palavras o que são números quadrados.
f. Investigue um processo rápido de descobrir se um número qualquer é quadrado e faça o registro em seu caderno.

A professora disponibilizou um determinado tempo para que as duplas de alunos realizassem a leitura da tarefa e formulassem conjecturas. Também percorreu toda a sala, observando as anotações, os esquemas e os diálogos dos

alunos; e, fazendo perguntas capazes de instigá-los. Ainda, auxiliou as duplas a pensarem melhor nas conclusões obtidas.

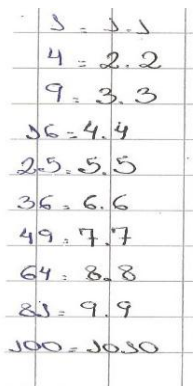
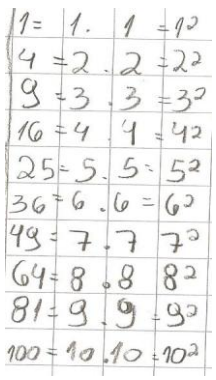
No item “a”, os alunos não apresentaram dificuldades em perceber a relação existente entre as sequências numéricas apresentadas. Foi possível observar que a compreensão dos alunos foi que multiplicando cada número da primeira sequência por ele mesmo era possível obter os números da segunda sequência.

Como foi previsto e descrito na Trajetória de Ensino e Aprendizagem apresentada na Unidade Didática os alunos ao serem questionados pela professora sobre o que é uma sequência numérica responderam sem dificuldades que são números que aparecem numa certa ordem.

Ainda, foi possível constatar que eles conseguiram compreender que as sequências numéricas apresentadas são infinitas devido às reticências colocadas no final das mesmas e que as reticências significam que a sequência de números continua, assim como foi previsto pelo professor durante a elaboração da Unidade Didática. A seguir, apresentaremos as soluções sugeridas e registradas na lousa pelas duplas conforme a figura 1, que surgiram após várias intervenções do professor, assim como proposto na Unidade Didática, tais como:

- Vocês já conseguiram perceber se existe uma relação entre as sequências?
- Qual é essa relação? Será isso mesmo? Vamos testar?
- Será possível representar essa multiplicação ou produto de outra maneira?
- Qual seria? Vamos fazer essa representação?

Figura 1 – Soluções sugeridas pelos alunos

Solução 1:	Solução 2:
	

Fonte: Dados do autor

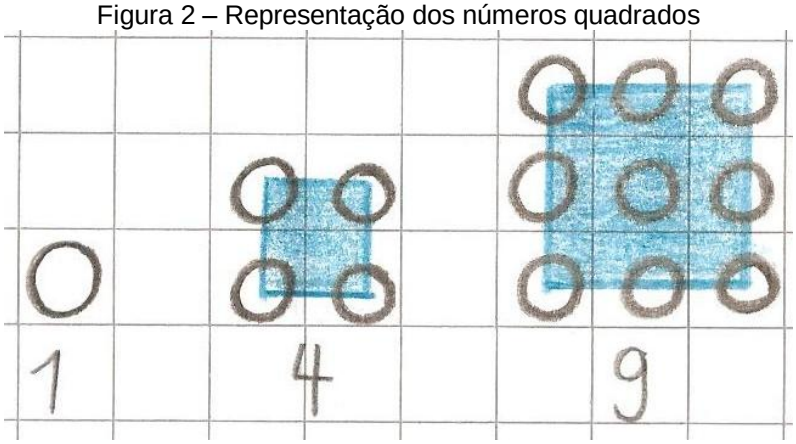
A solução 2 foi sugerida por apenas duas duplas, após a intervenção da professora que perguntou se seria possível representar a multiplicação ou produto, registrado por eles, de outra maneira. As demais duplas apresentaram como solução para o item “a” a de número 1.

A seguir, a professora oportunizou mais tempo para que os alunos tentassem resolver o item “b” e “c” com seus próprios conhecimentos, fazendo algumas intervenções tais como:

- **“**Alguém já conseguiu pensar como representar a segunda sequência de números em forma de desenhos?
- Qual forma geométrica seria possível formar, utilizando pontos, para representar os números 1, 4, 9, ...?”

Com essa interação verbal todos os alunos, com exceção de dois, conseguiram fazer uma representação desses números por meio de desenhos, utilizando arranjos de pontos em formas geométricas, assim como faziam os matemáticos gregos 600 a.C. As soluções apresentadas, na lousa, pelas duplas resumiram-se no desenho a seguir.

Figura 2 – Representação dos números quadrados



Fonte: Dados do autor

Assim como estava previsto na Trajetória de Ensino e Aprendizagem apresentada na Unidade Didática, todos os alunos conseguiram perceber que a figura geométrica obtida na representação da sequência numérica 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ..., é o quadrado, dando resposta ao item “c” e que, portanto, essa sequência seria chamada de sequência de quadrados. Então, a professora explicou aos alunos que os números dessa sequência são chamados de números quadrados.

A seguir, a professora perguntou aos alunos o que o número 3 significava no desenho da forma geométrica de 9 pontos construída por eles e, prontamente,

alguns alunos responderam que 3 seria a quantidade de pontos que representam o lado do quadrado.

Dando prosseguimento, a professora solicitou as duplas de alunos que elaborassem, com suas próprias palavras, o conceito de números quadrados, como proposto na tarefa 1 por meio do item “e”. Logo após, cada dupla apresentou o seu conceito aos demais alunos da sala, e a professora promoveu uma discussão a respeito do que foi exposto. Nessa atividade proposta foi possível perceber que os alunos sentiram muito dificuldade ao terem que elaborar o seu próprio conceito de números quadrados, mas com o auxílio da professora, a grande maioria deles conseguiu realizar essa atividade. Para finalizar essa atividade a professora promoveu uma discussão sobre os conceitos de números quadrados elaborados por eles, estabelecendo diferenças e semelhanças entre esses conceitos, como proposto na Unidade Didática.

Essa tarefa mostrou-se bastante diferenciada em relação ao método tradicional do ensino de Matemática, uma vez que propôs aos alunos a elaboração de conceitos próprios, atividade esta que foi capaz de promover reflexões acerca do entendimento deles em relação ao conteúdo estudado.

Finalmente os alunos foram conduzidos a investigar um processo rápido de descobrir se um número qualquer é quadrado, fazendo o registro em seus cadernos, numa tentativa de responder o item “f”. Os alunos apresentaram muita dificuldade nessa investigação e, após várias intervenções da professora, cinco duplas conseguiram concluir que encontrando a raiz quadrada dos números da segunda sequência numérica, obtem-se os números da primeira sequência.

Após a apresentação das soluções na lousa, realizada pelas duplas de alunos, a professora procedeu à verificação do processo sugerido pelos mesmos, fazendo-os perceber que para ser um número quadrado, a raiz quadrada do número deve ser exata. Essa atitude foi necessária uma vez que a maioria dos alunos não conseguiu estabelecer tal relação. Vale ressaltar que na Unidade Didática considerou-se que quase todos os alunos seriam capazes dessa constatação por meio da tarefa proposta, o que não ocorreu no decorrer da implementação.

Consideramos o desempenho da grande maioria dos alunos na resolução dessa tarefa satisfatório e os principais conteúdos utilizados por eles foram números

figurativos, formas geométricas planas, padrões numéricos, sequências e operações com números reais tais como multiplicação, potenciação e radiciação.

2.2 Tarefa 2

Observe as sequências:

1,2,3,4,5,6,7,8,...

1,3,6,10,15,21,28,36,...

a. Crie uma regra para obter a segunda sequência numérica a partir da primeira.

b. A regra que você descreveu no item “a” consiste em utilizar os elementos de uma sequência numérica e criar outra, onde cada termo é igual à soma dos _____. Atribui-se ao matemático grego Hipsicles (240-170 a.C.) uma regra para criar uma nova sequência numérica a partir de outra.

c. Represente a segunda sequência numérica utilizando arranjos de pontos em formas geométricas.

d. A sequência 1,3,6,10,15,21,... é chamada sequência de _____. Portanto, os números desta sequência são chamados de números _____.

e. Utilizando a regra de Hipsicles investigue os 6 primeiros termos de duas novas sequências numéricas geradas a partir da sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21...

f. Investigue quais são os três números triangulares que se seguem ao 36.

g. Investigue um processo rápido de descobrir se um número qualquer é triangular e faça o registro em seu caderno.

Após a distribuição das folhas com a segunda tarefa investigativa, os alunos fizeram a leitura da mesma e, em seguida, discutiram e foram em busca por soluções para os problemas propostos.

Os alunos estavam demorando a apresentar uma solução para o item “a”, então houve a necessidade da intervenção da professora, tais como:

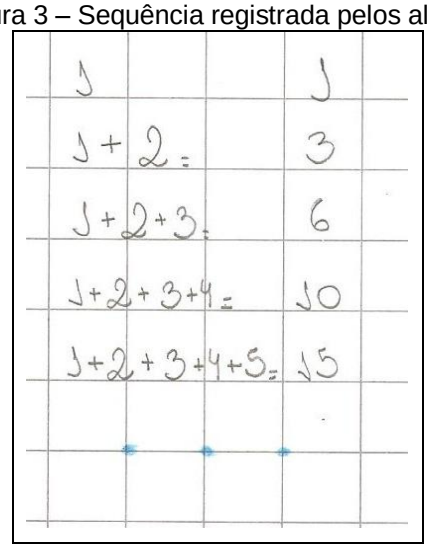
- “Vocês conseguiram encontrar uma regra para obter a segunda sequência a partir da primeira?”

Os alunos responderam que não haviam conseguido, portanto a professora alterou a Trajetória de Ensino e Aprendizagem descrita na Unidade Didática, proporcionando nova intervenção:

- “Vocês devem realizar uma operação com os números da primeira sequência para obter os números da segunda. Vamos tentar?”

Após algum tempo, nove duplas apresentaram a solução que segue, sendo que uma delas não conseguiu. Portanto, a professora explicou a essa dupla o processo de obtenção da segunda sequência a partir dos elementos da primeira.

Figura 3 – Sequência registrada pelos alunos



Fonte: Dados do autor

A professora prosseguiu com a Trajetória de Ensino e Aprendizagem por ela elaborada, intervindo com os alunos.

- “Agora ficou fácil responder o item b. Alguém quer responder?”

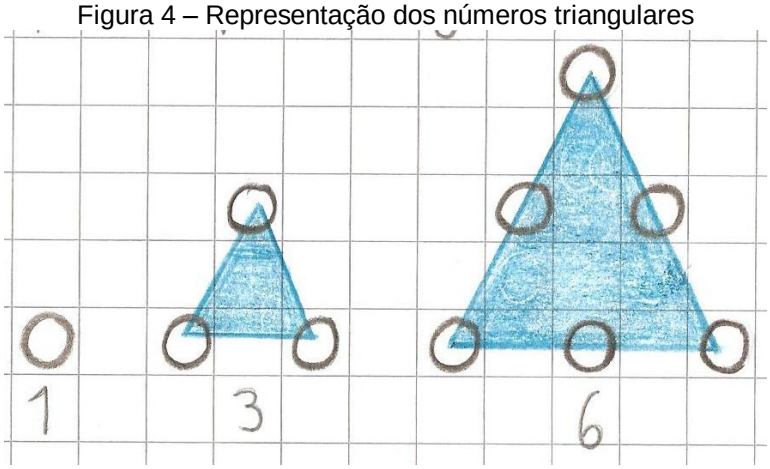
Foi possível observar que neste momento todos já haviam completado a frase desse item, confirmando então o entendimento deles em relação à questão proposta. Um dos alunos se propôs a explicar a questão da seguinte forma: o número 3 é o resultado da soma 1 + 2; o número 6 é o resultado da soma 1 + 2 + 3; o número 10 é o resultado da soma 1 + 2 + 3 + 4; e assim por diante. A seguir a professora complementou: o segundo termo, ou seja, o número 3 é igual a soma dos dois primeiros termos da primeira sequência, ou seja, 1+ 2 = 3. O terceiro termo é igual a soma dos três primeiros termos da primeira sequência, e assim sucessivamente.

Dando prosseguimento, a professora oportunizou um tempo maior que os alunos buscassem soluções para as demais questões propostas e, em seguida, fez novas intervenções, como:

- “Alguém já conseguiu pensar como representar essa sequência de números por meio de desenhos?”
- “Qual forma geométrica seria possível formar, utilizando pontos, para representar os números 1, 3, 6, 10, 15, 21,...?”

Após as intervenções, todas as duplas conseguiram perceber que a forma geométrica utilizada para representar a sequência numérica seria o triângulo. Os alunos apresentaram seus desenhos da representação da sequência numérica, que se resumiu na figura que segue.

Figura 4 – Representação dos números triangulares



Fonte: Dados do autor

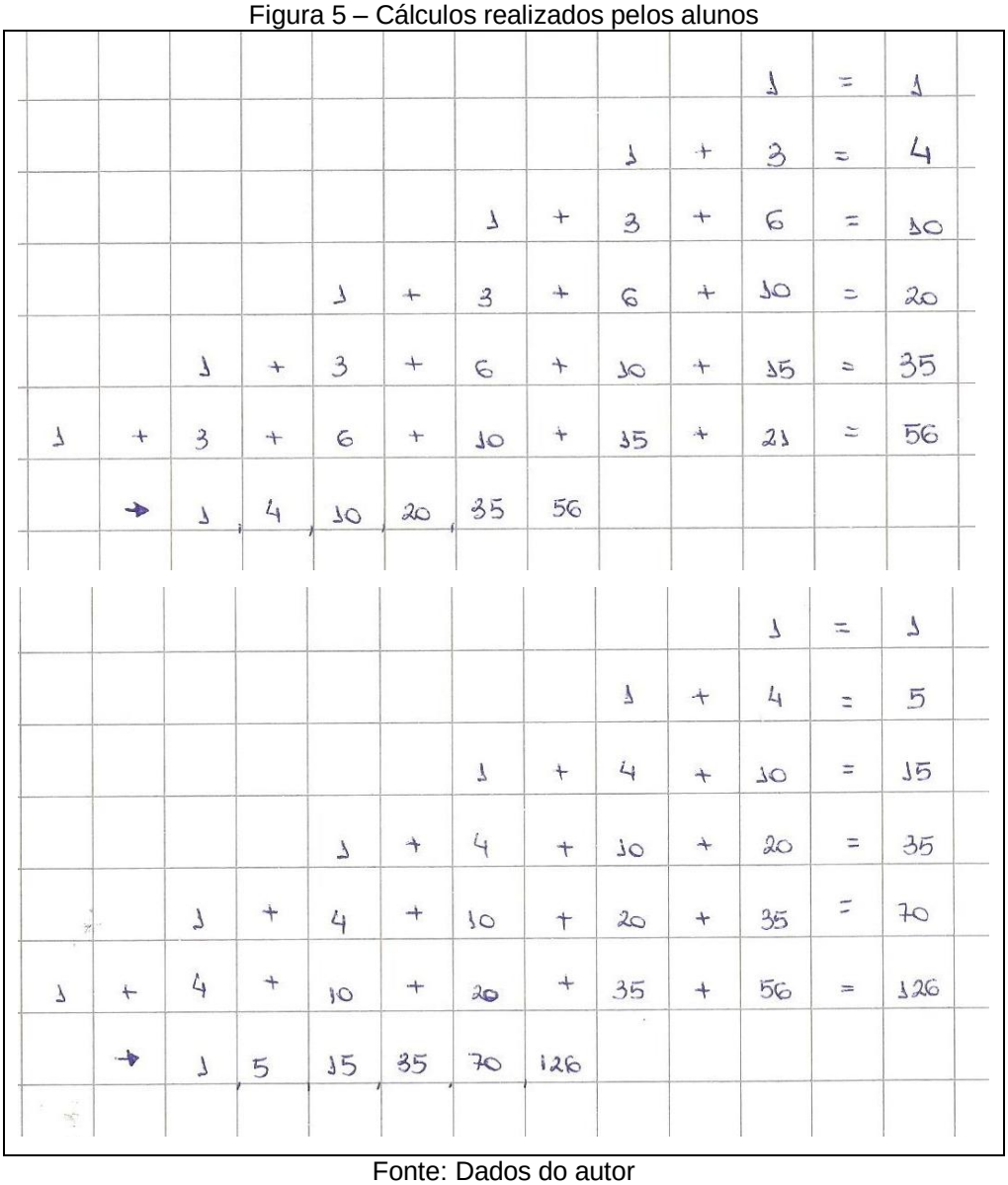
Na Trajetória de Ensino e Aprendizagem elaborada pela professora estava previsto o que realmente aconteceu, ou seja, todos os alunos perceberam que a figura geométrica obtida na representação da sequência numérica 1, 3, 6, 10, 15, 21,... é o triângulo e que essa sequência é chamada de sequência de triângulos. Ainda souberam responder que os números dessa sequência são chamados de números triangulares, sem a necessidade de muitas interferências ou auxílio da professora.

Para o desenvolvimento da atividade do item “e”, inicialmente foi necessário uma explicação da professora sobre a regra de Hipsicles, pois é um assunto que nunca foi estudo pelos alunos. Como consta na Trajetória de Ensino e Aprendizagem da Unidade Didática, a professora fez a seguinte explanação:

- “Agora, vamos utilizar a regra de Hipsicles para investigar os 6 primeiros termos de duas novas sequências numéricas geradas a partir da sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... O método consiste em tomar uma sequência numérica, como, por exemplo, a sequência 1, 2, 3, 4, 5,... e criar uma outra na qual o primeiro termo dela é o mesmo da sequência dada, ou seja, o número 1; o segundo termo dela é a soma dos dois primeiros termos da sequência dada, ou seja, 1 + 2 = 3; o terceiro termo da sequência é a soma dos três primeiros termos da sequência dada, ou seja, 1 + 2 + 3 = 6; e assim sucessivamente”.

A seguir, a professora incentivou os alunos a encontrarem as duas novas sequências numéricas e depois solicitou que os alunos apresentassem os seus cálculos na lousa. Não houve a necessidade de correções pela professora e alunos, pois todas as duplas conseguiram realizar os cálculos solicitados que foram compartilhados por meio do registro na lousa. Logo abaixo seguem os cálculos apresentados pelos alunos.

Figura 5 – Cálculos realizados pelos alunos



Fonte: Dados do autor

A professora oportunizou tempo para que os alunos investigassem quais são os três números triangulares que se seguem ao 36. Não foi necessário o auxílio da professora nessa atividade, pois todos os alunos a realizaram com grande eficiência, assim como previsto na Unidade Didática. Em seguida, as duplas apresentaram seus cálculos na lousa, como os que seguem.

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$$

Vale ressaltar que três duplas apresentaram apenas os três últimos cálculos que se referem à solução, ou seja, os números 45, 55 e 66 são os três números triangulares que vêm após o 36.

Em relação a investigação de um processo rápido para descobrir se um determinado número é triangular e realizar o registro no caderno, os alunos apresentaram muita dificuldade, como já era esperado pela professora. Então, ao invés de apresentar uma solução de imediato aos alunos, a professora solicitou aos alunos que realizassem uma pesquisa na internet e que apresentassem na próxima aula uma possível solução para essa última questão investigadora da tarefa 2, ocasionando certa curiosidade em alguns alunos.

Na aula seguinte nenhum aluno havia conseguido resolver a questão investigativa apesar de alguns terem feito a pesquisa. Então, a professora teve que explanar sobre como realizar essa investigação, seguindo o roteiro já descrito na Trajetória de Ensino e Aprendizagem da Unidade Didática elaborada pela professora, como a que segue.

Um número triangular natural multiplicado pelo mesmo número acrescentado de uma unidade (1); e depois dividido por dois, resulta em um número triangular.

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Por exemplo, num triângulo de lado 3, teremos:

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{3 \cdot (3 + 1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ (é o número triangular)}$$

Exemplo: Verificar se o número 28 é um número triangular:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n^2+n)}{2} \rightarrow \frac{(n^2+n)}{2} = 28 \rightarrow n^2 + n = 56 \rightarrow n^2 + n - 56 = 0$$

Resolvendo a equação, temos: n = 7 e n= -8 (despreza-se o negativo).

Resposta: n = 7 (um triângulo de lado 7). Se a resposta for um número inteiro, como nesse caso, então ele é um número triangular.

Apesar das duplas não terem conseguido sugerir uma solução para essa questão, a atividade foi muito válida, pois serviu para introduzir o assunto fórmula de Bhaskara, sem haver questionamentos em relação a utilidade em se resolver uma equação do 2º grau, como geralmente ocorre com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Ainda foi possível perceber que, na segunda atividade, os alunos tornaram-se mais participativos, diminuindo a quantidade de intervenções do professor. Logo, os alunos tiveram uma atitude mais autônoma frente ao seu processo de aprendizagem. Portanto, o desempenho dos alunos durante a resolução dessa tarefa foi muito satisfatório.

Os principais conteúdos utilizados por alunos e professora na tarefa 2 foram números figurativos, formas geométricas planas, padrões numéricos, sequências, regra de Hipsicles, expressões algébricas, equação de 2º grau, fórmula de Bhaskara e operações com números reais tais como adição, subtração, multiplicação e potenciação.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido mostrou-se eficaz uma vez que propiciou um ambiente de socialização por meio do compartilhamento de ideias, possibilitou o desenvolvimento da capacidade de planejar e elaborar estratégias para analisar situações desconhecidas e foi capaz de colocar o aluno frente a situações novas, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio, o entendimento, a criatividade e o senso crítico.

Ainda, propiciou a interpretação de pequenos textos, levou os alunos a conjecturar e testar possíveis soluções. A exploração das situações apresentadas também oportunizou a organização do pensamento algébrico e proporcionou uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos abordados.

Inicialmente, os alunos apresentaram algumas dificuldades durante as tarefas investigativas, uma vez que eles estão habituados a receberem do professor todas as informações necessárias, além de serem submetidos a tarefas mecânicas e repetitivas, fazendo uso exclusivamente da memorização. As dificuldades também se devem ao fato de que esse tipo de tarefa exige deles o raciocínio, a interpretação e análise de situações desconhecidas que, geralmente, não são exploradas em sala de aula durante as aulas de Matemática.

O trabalho em duplas oportunizou um ambiente de socialização por meio do compartilhamento de ideias e ainda promoveu uma melhor interação entre os alunos da turma.

No decorrer do desenvolvimento das tarefas as interações ocorridas entre professora e alunos, e também entre alunos, assumiram grande importância, os alunos conseguiram ter uma visão diferenciada em relação ao papel do professor que não se restringiu a posição de ser um mero detentor do conhecimento.

Enfim, acredito que o resultado da implementação foi muito satisfatório uma vez que os alunos passaram a ter, no decorrer do desenvolvimento da segunda tarefa, uma atitude mais autônoma frente ao seu próprio processo de aprendizagem, indo em busca do seu próprio conhecimento.

4 REFERÊNCIAS

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. Paraná: Governo do Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2012.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RIBEIRO, F. D. **Jogos e modelagem na educação matemática.** São Paulo: Saraiva, 2009. 124 p.