O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2012

VOLUME I

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

JOGOS E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NUMA TRAJETÓRIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

José Mario Lenartovicz[1]
Magna Natalia Marin Pires[2]

Resumo

Este trabalho consistiu em utilizar jogos e investigações matemáticas como estratégias de ensino e de aprendizagem e teve por objetivo principal oportunizar o desenvolvimento do raciocínio matemático, numa tentativa de estimular a aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Buscou-se ainda responder à questão central desse trabalho: "de que maneira os jogos e/ou as tarefas de investigação podem ser condutores de conteúdos matemáticos na sala de aula?". As tarefas investigativas propostas aos alunos foram elaboradas a partir dos jogos "Torre de Hanói" e "Ponto a Ponto". O trabalho desenvolvido seguiu as etapas sugeridas por Grando (2000): familiarização com o material do jogo, reconhecimento das regras, jogar para garantir regras, intervenção pedagógica verbal, registro do jogo, intervenção escrita e jogar com "competência". O trabalho desenvolvido foi produtivo uma vez que os alunos mostraram interesse e se envolveram com as tarefas, abordando vários conteúdos matemáticos nas soluções apresentadas.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Investigações Matemáticas. Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

1 Introdução

Aprender matemática é desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Devemos, como educadores matemáticos, ir à busca de alternativas para promover a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção, o raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo dos alunos, e também procurar promover a socialização, além de aumentar as interações do indivíduo com outras pessoas.

Os jogos, se convenientemente planejados, podem vir a ser um recurso pedagógico capazes de propiciarem a construção do conhecimento matemático. Referimo-nos àqueles que implicam conhecimentos matemáticos.

A realidade atual das escolas requer, do professor, aprimorar suas estratégias de encaminhamento de aula, contemplando a diversidade das salas de aula. Os alunos apresentam histórias diferentes, graus de amadurecimento diferenciados e

---

[1] Professor PDE, Especialização em Educação Matemática, graduado em Matemática, atua no Colégio Estadual Rosa Delucia Calsavara – Ensino Fundamental e Médio. Cambira-Pr.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática-UEL, Mestre em Educação-UFPR, Especialista em Educação Matemática-UEL, Licenciada em Matemática–UEL, Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

acesso a uma infinidade de recursos fora do espaço escolar. Dessa forma, é necessário que o professor amplie as possibilidades de trabalho, buscando novas alternativas que possam atender todas as especificidades dos alunos.

Dentre as possibilidades de trabalho que vem sendo discutidas, observa-se que as atividades lúdicas, mais especificamente os jogos, apresentam uma variedade de aplicações que, quando bem orientados, podem apresentar resultados positivos. Por ter um aspecto condizente com os interesses dos alunos, os jogos são atrativos e auxiliam a quebrar a resistência que grande parte deles apresenta em relação à disciplina de matemática que, muitas vezes, é vista como complexa e abstrata pelos mesmos.

No que se refere às investigações matemáticas, para que a realização de tais tarefas nas aulas de Matemática constitua um momento de aprendizagem para os educandos é fundamental que elas sejam apresentadas de maneira que eles se sintam desafiados e que queiram se envolver; para isso é necessário que o professor invista na elaboração delas, se comporte como parceiro dos alunos com o intuito de imitarem o trabalho do matemático, que muitas vezes investe em caminhos nem sempre produtivos, mas que experimentam o processo de conjecturar, testar, conjecturar novamente.

Este trabalho teve por objetivo principal oportunizar o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de jogos e tarefas investigativas. A intenção foi investigar as estratégias utilizadas pelos alunos e os resultados alcançados, sempre com o propósito de aprender matemática.

2 Trajetória de Ensino e Aprendizagem

A presente trajetória que foi desenvolvida com 15 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Rosa Delucia Calsavara – Ensino Fundamental e Médio, localizado no município de Cambira/PR, explorou jogos por meio de tarefas de investigação matemática.

A sala de aula foi organizada em duplas e durante o uso dos jogos “Torre de Hanói” e “Ponto a Ponto” nas aulas de Matemática, utilizou-se as etapas sugeridas por Grando (2000), descritas a seguir.

1ª Familiarização com o material do jogo: os alunos entram em contato com o material do jogo, experimentando-o por meio de simulações de possíveis jogadas.

2ª Reconhecimento das regras: pode ser realizada de diversas formas como, por exemplo, explicadas pelo orientador da ação ou lidas, ou, ainda, identificadas por meio da realização de partidas-modelo.

3ª Jogar para garantir regras: este é o momento do jogo espontâneo, possibilitando ao aluno compreender as regras.

4ª Intervenção pedagógica verbal: nesta etapa os alunos passam a jogar com as intervenções orais do professor durante o movimento do jogo. Neste momento, procura-se relacionar os procedimentos criados pelos alunos na resolução dos problemas do jogo à conceitualização matemática.

5ª Registro do jogo: podem ser registrados os procedimentos e cálculos utilizados pelos alunos durante o jogo como uma forma de sistematização e formalização por meio da linguagem matemática.

6ª Intervenção escrita: esta é a etapa em que os alunos resolvem situações-problema de jogo, elaboradas pelo professor que direcionará para os conceitos matemáticos a serem trabalhados.

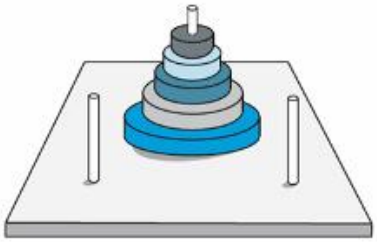
7ª Jogar com "competência": nesse último momento o aluno irá retornar à ação do jogo, executando as estratégias definidas e analisadas durante a resolução das situações-problema.

2.1 Jogo: Torre de Hanói

Neste trabalho utilizamos uma variação da Torre de Hanói e procuramos articular duas tendências metodológicas da Educação Matemática, são elas: a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática.

A Torre de Hanói foi criada pelo matemático francês Edouard Anatole Lucas, em 1883 e o jogo é composto de 9 discos de tamanhos diferentes e 3 pinos, sendo que, em um dos três pinos encontram-se colocados todos os discos, dispostos do maior para o menor.

Figura 1 - Torre de Hanói



Fonte: Gonçalves (2007, p. 16)

O objetivo deste jogo é fazer a troca de todos os discos da haste com o menor número possível de movimentos e existem algumas regras a serem seguidas, são elas: somente podemos mover um disco de cada vez; somente podem ser movidos os discos que não tem outro disco colocado por cima; um disco de diâmetro maior não pode ser colocado sobre outro de diâmetro menor.

Para que se possa chegar às generalizações, inicialmente estuda-se o jogo para um, dois, três e quatro discos, buscando encontrar a menor quantidade de movimentos para transferir a torre de um pino a outro, bem como uma regularidade entre as jogadas, obtendo uma solução para um número qualquer de discos. (WATANABE, 2004).

O jogo utilizado no trabalho em sala de aula era composto de cinco peças quadradas, confeccionadas em EVA, de tamanhos diferentes e um tabuleiro com três casas, como proposto por Gonçalves (2007, p.16). As peças quadradas foram construídas com as seguintes medidas: (4x4) cm; (8x8) cm; (12x12) cm; dando prosseguimento até obter as 5 peças. Estas peças quadradas substituíram os discos e foram enumerados de 1 a 5, da menor para a maior. Para o tabuleiro, fizemos uso de uma peça retangular de EVA com medidas (30x80) cm; neste foram desenhados três quadrados com 20 cm de lado, representando as três casas; que substituíram os pinos. As casas foram identificadas por A, B e C.

Figura 2 - Adaptação da Torre de Hanói, proposto por Gonçalves (2007, p.16)

Fonte: Arquivo pessoal

2.2 Tarefas Investigativas "Torre de Hanói"[3]: encaminhamento do trabalho em sala de aula.

[3]Adaptado de GONÇALVES, Alex Oleandro; GONÇALVES, Claudia Cristine Souza Appel. A Torre de Hanói: um trabalho com investigações matemáticas, resolução de problemas e a calculadora. In: X CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 2011, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUCPR, 2011. p. 13273-13284.

Inicialmente, o professor fez uma explanação sobre o jogo “Torre de Hanói”, esclarecendo quem foi seu criador, bem como sua composição, os objetivos e as regras do jogo.

Logo após, o professor organizou a turma em duplas e um grupo de três alunos, no intuito de proporcionar o compartilhamento de ideias entre os alunos durante a atividade.

A seguir, o professor distribuiu o material do jogo permitindo que os alunos tivessem um primeiro contato, experimentando-o por meio de simulações de possíveis jogadas, no intuito de ocorrer a familiarização com o mesmo. Em seguida o professor fez a leitura das regras do jogo com os alunos, esclarecendo eventuais dúvidas.

Antes de serem propostas as atividades investigativas desse jogo aos alunos, oportunizou-se um tempo para que ocorresse o jogo espontâneo, possibilitando a eles compreender as regras.

Na produção didático-pedagógica foram apresentadas 13 tarefas investigativas para o jogo “Torre de Hanói”, mas para o presente artigo, serão relatadas as 9 tarefas consideradas mais significativas.

2.2.1 Tarefa 1

Vamos iniciar o jogo fazendo uso de 3 peças, apenas. Colocar as 3 peças na casa A. Em seguida, remover as 3 peças para a casa C, sempre obedecendo às regras deste jogo que são:

a. Mover uma peça de cada vez;
b. Mover as peças que não tem outra colocada por cima;
c. Uma peça de tamanho maior não pode ser colocada sobre outra de tamanho menor.

Investigue qual é o número mínimo de movimentos a serem realizados.

Foi solicitado às duplas que fizessem a leitura da primeira tarefa investigativa e dessem início ao jogo no intuito de encontrar uma solução para a questão proposta. Também foi pedido que eles registrassem em seus cadernos os procedimentos utilizados na resolução.

O professor realizou algumas intervenções que foram propostas na Trajetória de Ensino e Aprendizagem da Unidade Didática tais como: Vocês compreenderam a

situação de jogo proposta? Já conseguiram descobrir qual é o número mínimo de movimentos a serem realizados para remover as 3 peças da casa A para a casa C?

As respostas encontradas pelas equipes foram: 5 movimentos, 7 movimentos e 10 movimentos, erros e acertos que também já haviam sido previstos ao ser elaborada a Unidade Didática. O professor solicitou a dupla que deu como resposta 7 movimentos que fossem à lousa registrar de que forma encontraram essa solução.

Figura 3 – Solução da tarefa 1

1º movimento: Peça 1 na casa C.
2º movimento: Peça 2 na casa B.
3º movimento: Peça 1 na casa B.
4º movimento: Peça 3 na casa C.
5º movimento: Peça 1 na casa A.
6º movimento: Peça 2 na casa C.
7º movimento: Peça 1 na casa C.

Fonte: Dados do autor

A seguir, o professor perguntou aos alunos, que sugeriram como resposta 5 movimentos, se eles haviam percebido onde erraram. Um deles respondeu que sim, dizendo que quando as peças 1 e 2 estavam na casa B, foi movimentado as duas de uma vez só para a casa C, percebendo o erro cometido por eles. Nesta fase, esses alunos perceberam que deve ser transportada uma peça por vez.

Aos alunos que responderam 10 movimentos, o professor teve que fazer algumas intervenções fazendo os alunos compreenderem seus erros na contagem dos movimentos.

Esses questionamentos feitos aos alunos que deram como resposta um valor incorreto são intervenções que já haviam sido prevista na Unidade Didática, pois erros como esquecer de transportar uma peça de cada vez e não acertar a contagem de movimentos são comuns de ocorrerem durante as primeiras simulações de jogadas bem como no decorrer do desenvolvimento das primeiras tarefas investigativas.

2.2.2 Tarefa 2

> Agora, vamos utilizar 4 peças. Colocar as 4 peças na casa A. Em seguida, remover as 4 peças para a casa C.
>
> Investigue qual seria o número mínimo de movimentos a serem realizados.

Após o professor ter distribuído as folhas contendo a tarefa 2, oportunizou-se um tempo para a discussão em equipe e o registro escrito dos movimentos mínimos necessários para transportar as 4 peças.

Os alunos gastaram um tempo maior para realizar a tarefa 2 e foi necessário a intervenção do professor diversas vezes. Foram vários questionamentos realizados aos alunos como, por exemplo, “Nessa tarefa, são necessários mais do que sete movimentos, ou menos?”; “Por que são necessários mais movimentos?”; ajudando-os a encontrarem uma solução para a situação proposta, como proposto na Unidade Didática.

Nessa tarefa, do total de 7 equipes 4 delas encontraram 15, o número mínimo de movimentos necessários para remover as 4 peças da casa A para a casa C. O percentual de acerto para essa tarefa foi superior ao previsto na Unidade Didática. Na figura 4 podemos observar a solução registrada pela maioria das equipes.

Figura 4 – Movimentos sugeridos na resolução da tarefa 2

1º movimento: Peça 1 na casa B.
2º movimento: Peça 2 na casa C.
3º movimento: Peça 1 na casa C.
4º movimento: Peça 3 na casa B.
5º movimento: Peça 1 na casa A.
6º movimento: Peça 2 na casa B.
7º movimento: Peça 1 na casa B.
8º movimento: Peça 4 na casa C.
9º movimento: Peça 1 na casa C.
10º movimento: Peça 2 na casa A.
11º movimento: Peça 1 na casa A.
12º movimento: Peça 3 na casa C.
13º movimento: Peça 1 na casa B.
14º movimento: Peça 2 na casa C.
15º movimento: Peça 1 na casa C.

Fonte: Dados do autor

Um maior número de alunos, comparado com a tarefa 1, acertaram a quantidade de movimentos, fato este ocorrido talvez devido a experiência adquirida por eles ao realizarem a tarefa 1.

2.2.3 Tarefa 3

Investigue qual seria o número mínimo de movimentos a serem realizados, utilizando 5 peças.

Distribuídas as folhas contendo a tarefa 3, foi oportunizado um tempo um pouco maior que nas tarefas anteriores, para a discussão em duplas e o registro escrito dos movimentos mínimos necessários para transportar as 5 peças. Essa aula foi realizada no laboratório de informática do colégio, e os alunos jogaram a Torre de Hanói em um simulador encontrado no endereço eletrônico http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/, com o intuito de tornar a aula mais dinâmica.

O professor orientou os alunos informando-os sobre o simulador e pediu a eles que anotassem os movimentos das peças durante o jogo, pois caso contrário, correriam o risco de esquecerem os movimentos das cinco peças, intervenção essa já planejada ao elaborar a Trajetória de Ensino e Aprendizagem apresentada na Unidade Didática.

A cada tentativa não bem sucedida o professor questionava: “Será que esse é o número mínimo de movimentos? Joguem mais algumas vezes, para perceber se esse é o número mínimo de movimentos para transportar as cinco peças”, fala esta já contemplada na Unidade Didática. Embora orientados, muitos alunos não fizeram o registro escrito já de início o que ocasionou em tentativas não bem sucedidas. Após algum tempo os alunos perceberam a importância em registrar os movimentos em seus cadernos para conseguirem encontrar uma solução para a tarefa proposta pelo professor.

As duplas encontraram 31 e 34 movimentos como o número mínimo de movimentos para essa tarefa. O professor pediu, para uma das duplas que encontrou 31 movimentos, que fosse ao quadro mostrar o seu esquema.

Figura 5 – Movimentos sugeridos na resolução da tarefa 3

1º movimento: Peça 1 na casa C.	17º movimento: Peça 1 na casa A.
2º movimento: Peça 2 na casa B.	18º movimento: Peça 2 na casa C.
3º movimento: Peça 1 na casa B.	19º movimento: Peça 1 na casa C.
4º movimento: Peça 3 na casa C.	20º movimento: Peça 3 na casa A.
5º movimento: Peça 1 na casa A.	21º movimento: Peça 1 na casa B.
6º movimento: Peça 2 na casa C.	22º movimento: Peça 2 na casa A.
7º movimento: Peça 1 na casa C.	23º movimento: Peça 1 na casa A.
8º movimento: Peça 4 na casa B.	24º movimento: Peça 4 na casa C.
9º movimento: Peça 1 na casa B.	25º movimento: Peça 1 na casa C.
10º movimento: Peça 2 na casa A.	26º movimento: Peça 2 na casa B.
11º movimento: Peça 1 na casa A.	27º movimento: Peça 1 na casa B.
12º movimento: Peça 3 na casa B.	28º movimento: Peça 3 na casa C.
13º movimento: Peça 1 na casa C.	29º movimento: Peça 1 na casa A.
14º movimento: Peça 2 na casa B.	30º movimento: Peça 2 na casa C.
15º movimento: Peça 1 na casa B.	31º movimento: Peça 1 na casa C.
16º movimento: Peça 5 na casa C.	

Fonte: Dados do autor

Assim, as duplas que não encontraram a solução correta puderam perceber que trinta e um é o número mínimo de movimentos para transportar as cinco peças da casa A para a casa C.

Essa aula, na qual foi utilizado um simulador do jogo “Torre de Hanói”, motivou os alunos na resolução da tarefa proposta a eles, além de tornar a aula mais dinâmica, diferenciando-se da forma tradicional como os conteúdos matemáticos são geralmente ensinados.

2.2.4 Tarefa 4

Qual seria o número mínimo de movimentos a serem realizados fazendo uso de 2 peças?

Essa tarefa foi muito bem compreendida pelos alunos e a grande maioria deles não necessitou simular o jogo para encontrar a resposta correta. Todos os alunos conseguiram resolver essa tarefa, não havendo dificuldades em resolvê-la. Perceberam rapidamente que bastariam três movimentos, no mínimo, para mover as duas peças, como mostra a figura 6.

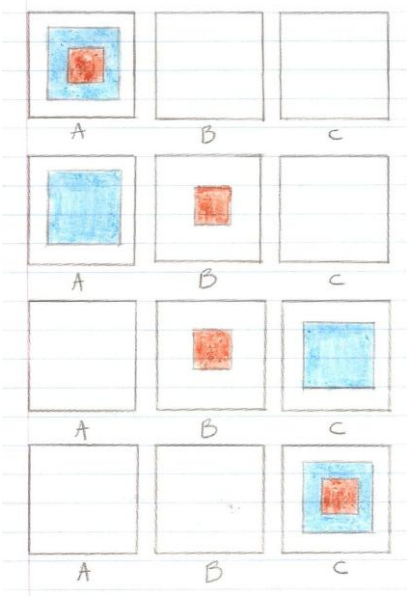
Figura 6 - Movimentos realizados

1º movimento: Peça 1 na casa B.
2º movimento: Peça 2 na casa C.
3º movimento: Peça 1 na casa C.

Fonte: Dados do autor

Os alunos resolveram essa tarefa de forma muito rápida como já previsto durante a elaboração da Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Portanto, o professor propôs a eles que desenhassem os movimentos realizados, estratégia já pensada e registrada na Unidade Didática.

Figura 7 – Desenho dos movimentos realizados



Fonte: Arquivo pessoal

Todas as equipes apresentaram o desenho dos movimentos realizados pelas peças de forma correta, sendo possível perceber que a maioria dos alunos gostou muito de realizar a atividade proposta pelo professor.

2.2.5 Tarefa 5

Construa uma tabela, registrando o número de peças utilizadas e o número mínimo de movimentos investigados nos itens 1, 2, 3, 4 e 5.

As intervenções do professor em relação a tarefa 5 seguiram o roteiro da Trajetória de Ensino e Aprendizagem apresentada na Unidade Didática.

Inicialmente o professor explicou que a tabela deveria conter duas colunas, sendo que em uma delas deve ser registrado o número de peças de cada torre, representando pela letra P e, na outra, o número mínimo de movimentos, representando pela letra M. Após certo tempo o professor solicitou que as equipes fossem à lousa desenhar a sua tabela, explicando os dados constantes nela. As equipes deram suas explicações dizendo o que entenderam em relação aos dados da tabela, explorando por meio dessa atividade a exposição oral.

Figura 8 – Peças utilizadas x número mínimo de movimentos

Nº DE PEÇAS DE CADA TORRE (P)	*Nº MÍNIMO DE MOVIMENTOS (M)*
1	*1*
2	*3*
3	*7*
4	*15*
5	*31*

Fonte: Dados do autor

Vale ressaltar que a exposição oral ocorreu de forma natural e espontânea, pois os alunos já estavam bastante envolvidos com a atividade e as discussões já estavam fazendo parte do cotidiano de sala de aula, mudando um pouco a perspectiva de que as explicações devem sempre serem dadas pelo professor, tornando-os assim mais autônomos.

2.2.6 Tarefa 6

Investigue a quantidade de movimentos de cada peça para transportar uma torre de 1 peça, 2 peças, 3 peças, 4 peças e 5 peças. Acrescente os valores encontrados em sua tabela.

Os alunos tiveram um pouco de dificuldade no que se refere ao entendimento do enunciado da tarefa, portanto houve a necessidade de intervenção do professor que acabou sugerindo de que forma poderiam representar o que estava sendo

solicitado na atividade. Logo após, completaram a tabela sugerida pelo professor sem maiores dificuldades.

Figura 9 – Número de movimentos de cada peça

P	*Quantidade de movimentos mínimos de cada peça*					*M*
	Peça 1	*Peça 2*	*Peça 3*	*Peça 4*	*Peça 5*	
1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*
2	*2*	*1*	*0*	*0*	*0*	*3*
3	*4*	*2*	*1*	*0*	*0*	*7*
4	*8*	*4*	*2*	*1*	*0*	*15*
5	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*	*31*

Fonte: Dados do autor

2.2.7 Tarefa 7

Observar as colunas da tabela referente à quantidade de movimentos das peças 1, 2, 3, 4 e 5 e, em seguida, as linhas. Investigue o que é possível perceber em relação a essas linhas e colunas.

Os alunos sentiram bastante dificuldade nessa investigação. Portanto houve a necessidade de intervenção do professor que deu início aos questionamentos, como por exemplo: “Primeiramente, observem cada linha da tabela. O que acontece com os termos das linhas?”, “Os termos de cada linha estão crescendo ou decrescendo? Em qual razão?”, “O que acontece se somarmos os termos de cada linha? Isso acontece em todas as linhas?”, entre outros questionamentos.

Esses questionamentos levaram a grande maioria dos alunos concluírem que os termos da linha, que representam a quantidade de movimentos mínimos das peças 1, 2, 3, 4 e 5, estão decrescendo em razão 2, pois 16/8 = 2, eles perceberam que o segundo número é a metade do anterior e assim sucessivamente.

O professor solicitou que os alunos realizassem a soma dos termos de cada linha, dessa forma eles foram capazes de perceber que essa soma representa a quantidade mínima de movimentos para cada número de peças. Neste momento, o professor abordou o conceito de progressão geométrica de forma superficial, além de explicar a soma dos termos de uma PG. Em seguida, distribuiu as folhas referente a tarefa 9.

2.2.8 Tarefa 8

Em quanto aumentaria a quantidade de movimentos, acrescentando uma peça à torre?

Com o auxílio do professor e de seus diversos questionamentos, muitos alunos acabaram percebendo o que acontece com os números da coluna referente à peça 1. Um dos alunos da turma explicou aos demais que o número da segunda linha é o dobro da primeira, o número da terceira linha é o dobro da segunda, o número da quarta linha é o dobro da terceira e o número da quinta linha é o dobro da quarta, logo o número da sexta linha é o dobro da quinta, encontrando o número 32 que representa o número de movimentos da peça 1 ao acrescentar a sexta peça à torre.

Os alunos apresentaram muita dificuldade ao analisar qual seria a quantidade total de movimentos, para transportar as seis peças, da casa A para a casa C. Então, o professor sugeriu que os alunos acrescentassem na coluna do número de peças de cada torre o número 6 ficando assim mais fácil de proceder à análise.

Analisando a tabela, alguns alunos conseguiram perceber que a quantidade mínima de movimentos para transportar as seis peças, da casa A para a casa C, seriam 63, pois 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63.

Para essa tarefa investigativa os alunos gastaram um tempo muito superior ao planejado na Unidade Didática, pois eles apresentaram dificuldades em descobrir qual procedimento adotar na resolução da mesma, surgindo muitas dúvidas que foram sendo superadas por meio da interação do professor, que sempre procurava responder aos questionamentos deles.

Os principais conteúdos utilizados pelos alunos e ou abordados pelo professor nas tarefas investigativas descritas nesse trabalho, referentes ao jogo “Torre de Hanói” foram: operações com números reais, sequências numéricas, progressão geométrica, organização de dados em tabelas e lei de formação de uma função.

2.3 Jogo: Ponto a Ponto

O jogo intitulado “Ponto a Ponto” é uma adaptação do jogo “Sobrou Resto!”. Esse jogo é capaz de desencadear um processo de aprendizagem de matemática, despertando o interesse do aluno pelo conteúdo matemático de forma lúdica.

Na realização desse jogo, os alunos organizaram-se em equipes de 4 alunos e os materiais utilizados foram: um dado convencional e uma tabela de pontuação, na qual seria marcada a pontuação de cada jogador em cada jogada.

Nesse jogo, as regras a serem seguidas são:

1. em cada rodada, o jogador deve fazer a escolha de um número natural de 6 a 19;
2. o jogador deve comunicar o número escolhido aos demais integrantes da sua equipe e, em seguida, lançar o dado;
3. o número escolhido deve ser dividido mentalmente pelo número obtido no lançamento do dado; 4. Se a divisão der exata, o jogador perde um ponto; se sobrar resto, o jogador ganha um ponto;
5. vence o jogo aquele que acumular mais pontos ao término de dez jogadas.

Exemplos de jogadas:

- Número escolhido pelo jogador A: 13.
- Número obtido no dado: 5.
- Divisão mental: 13: 5 = 2 e resto 3.
- O jogador A marca um ponto na tabela.

- Número escolhido pelo jogador B: 12.
- Número obtido no dado: 3.
- Divisão mental: 12: 3 = 4 e resto 0.
- O jogador B perde um ponto.

As pontuações obtidas deveriam ser registradas em uma tabela, sendo a primeira coluna reservada ao número de jogadas, as colunas seguintes destinadas à pontuação dos jogadores A, B, C e D. A última linha deveria ser reservada para o saldo de pontos que, ao final das dez jogadas, cada equipe seria responsável por calcular o saldo de cada jogador, determinando assim, o vencedor.

No decorrer das jogadas, os alunos começam a perceber que determinados números não são boas opções de escolha, ou seja, são números que dificilmente fazem sobrar resto na operação realizada.

2.4 Tarefas Investigativas "Ponto a Ponto"[4] : encaminhamento do trabalho em sala de aula.

Inicialmente, o professor fez uma breve explanação a respeito do jogo "Ponto a Ponto", esclarecendo que ele é uma adaptação do jogo "Sobrou Resto!" e, ainda, explicou sua composição, os objetivos e as suas regras.

---

[4] Adaptado de RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. São Paulo: Saraiva, 2009. 124 p.

Em seguida o professor organizou a turma em grupos de 4 alunos no intuito de proporcionar o compartilhamento de ideias entre os alunos durante a atividade. Então, o professor distribuiu o material do jogo e os alunos simularam possíveis jogadas, familiarizando-se com o mesmo. Logo após, o professor realizou a leitura das regras do jogo com os alunos, esclarecendo as dúvidas dos mesmos.

O professor proporcionou um tempo, ocorrendo o jogo espontâneo, o que possibilitou aos alunos a compreensão das regras. Após essa etapa, o professor trabalhou com os conteúdos critérios de divisibilidade, divisão exata e não exata, e depois foram propostas as atividades investigativas desse jogo aos alunos. Antes da etapa "jogar com competência", foram desenvolvidas, com o auxílio do professor, as tarefas. Das 7 tarefas investigativas sobre o jogo "Ponto a Ponto", apresentadas na produção didático-pedagógica, iremos relatar as três primeiras.

2.4.1 Tarefa 1

Ao escolher o número 8 só será possível marcar um ponto se no dado aparecer qual (is) número (s)?

Essa tarefa investigativa foi muito bem compreendida pelos alunos e por meio de observações do professor percebeu-se que eles conseguiram a compreensão de que escolhendo o número 8 só é possível marcar ponto se no dado aparecer os números 3, 5 e 6, pois nas divisões do 8 pelos números 3, 5 e 6 sobra resto.

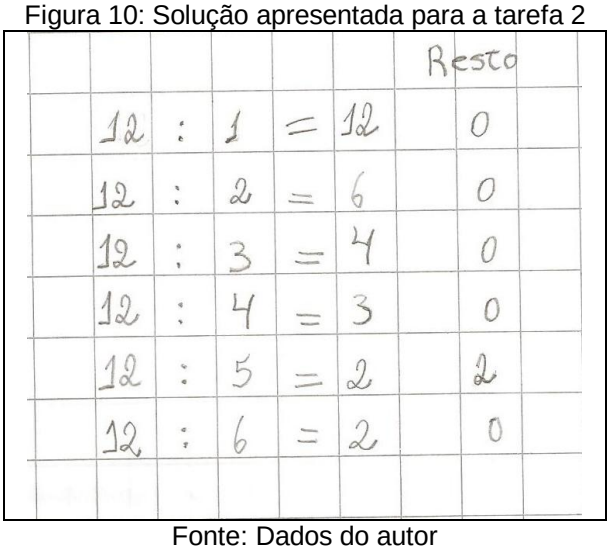
2.4.2 Tarefa 2

Se o número escolhido na jogada for o 12 só será possível marcar um ponto se no dado aparecer qual (is) número (s)?

Essa tarefa investigativa também foi bem compreendida pelos alunos e por meio de observações e intervenções do professor foi possível perceber que eles chegaram rapidamente a um consenso sobre a questão proposta. Todos os alunos chegaram a conclusão de que escolhendo o número 12 só é possível marcar ponto se no dado aparecer o número 5, uma vez que na divisão do 12 pelo número 5 sobra resto e nas divisões do 12 pelos números 1, 2, 3, 4 e 6 o resto será zero.

A figura 10 mostra o esquema de resolução de um dos grupos que se assemelha ao das demais duplas apresentados pelos alunos na lousa, após a realização das intervenções do professor que foram previstas na Unidade Didática.

Figura 10: Solução apresentada para a tarefa 2



						Resto
12	:	1	=	12		0
12	:	2	=	6		0
12	:	3	=	4		0
12	:	4	=	3		0
12	:	5	=	2		2
12	:	6	=	2		0

Fonte: Dados do autor

A seguir, assim como estava previsto na Trajetória de Ensino e de Aprendizagem, o professor questiona: “Então, é aconselhável escolher o número 12, se quisermos ganhar o jogo? Por quê?”, questão esta respondida por alguns alunos que disseram imediatamente que não, justificando que dessa forma eles teriam apenas uma única chance de marcar ponto. Imediatamente, o professor distribuiu as folhas contendo a tarefa 3 e determinou um tempo para que os alunos refletissem sobre a mesma.

2.4.3 Tarefa 3

3. Analisando as respostas das investigações 1 e 2, qual número é mais conveniente escolher? Justifique sua resposta.

Na Trajetória de Ensino e de Aprendizagem proposta pelo professor na Unidade Didática foi previsto que os alunos iriam responder rapidamente a esta questão e, durante a implementação do projeto, realmente foi o que aconteceu. Então, o professor perguntou qual seria a resposta e, prontamente, um dos alunos explicou que o número escolhido deveria ser o 8, pois existem três chances de marcar ponto, e que para o número 12 teríamos uma única chance.

Ao término das tarefas investigativas propostas para o Jogo “Ponto ao Ponto” os alunos realizaram algumas jogadas com “competência”, ou seja, eles retornaram

à ação do jogo, e executaram as estratégias definidas e analisadas durante a resolução das situações-problema. Ao final das dez jogadas, cada equipe ficou responsável por realizar o cálculo do saldo de pontos de cada jogador, determinando assim, o vencedor da equipe. Dessa forma, cumprindo com a sétima etapa de resolução sugerida por Grando (2000).

No decorrer das jogadas com competência, os alunos perceberam que determinados números não são boas opções de escolha, ou seja, são números que dificilmente fazem sobrar resto na operação realizada. Então, os alunos passaram a excluir os números que dificilmente possibilitariam sucesso nas jogadas, revelando o entendimento deles em relação às regras do jogo, garantindo, dessa forma, o sucesso nas jogadas.

Os principais conteúdos utilizados pelos alunos nas tarefas investigativas referentes ao jogo “Ponto ao Ponto” foram: operações fundamentais com números reais, divisão exata e não-exata, critérios de divisibilidade, números pares e ímpares, números primos e noções de probabilidade.

3 Considerações Finais

O presente estudo nos fez refletir que a utilização de jogos e investigação nas aulas de Matemática pode ser um caminho para despertar o interesse e resistência inicial dos alunos com essa disciplina.

Devemos investir em atividades que promovam a discussão de estratégias próprias para a solução de tarefas investigativas por meio de uma atividade lúdica que possa despertar o interesse dos alunos, além de promover o aprendizado de conteúdos matemáticos, como ocorreu durante o desenvolvimento desse trabalho.

Um dos fatores que consideramos favorável ao bom desenvolvimento das tarefas investigativas por meio de jogos foi o número reduzido de alunos que também contribuiu para uma melhor interação entre professor e aluno.

Ainda foi possível perceber que a inserção, na prática do professor, de atividades relevantes para aprendizagem dos alunos, requer um tempo muito maior na sua elaboração e também no desenvolvimento das tarefas.

Enfim, consideramos o trabalho desenvolvido muito produtivo uma vez que os conteúdos matemáticos propostos foram estudados de forma significativa para os alunos, despertando grande motivação da turma.

4 Referências

GONÇALVES, Alex O. A Torre de Hanói em Sala de Aula. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 63, p. 16-18, 2007.

GONÇALVES, Alex Oleandro; GONÇALVES, Claudia Cristine Souza Appel. A Torre de Hanói: um trabalho com investigações matemáticas, resolução de problemas e a calculadora. In: X CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 2011, Curitiba. **Anais**... Curitiba: PUCPR, 2011. p.13273-13284.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 239 f. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. São Paulo: Saraiva, 2009. 124 p.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **Torre de Hanói.** 2005. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi/>. Acesso em: 20 nov. 2012.

WATANABE, R. Uma lenda: Torre de Hanói. In: Druck, S. (org). **Explorando o ensino da Matemática:** atividades. v.2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. p. 132-135.