O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2012

VOLUME I

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

TAREFAS INVESTIGATIVAS E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DE 7º ANO

Sonia Terezinha Sgobero Abudi[1]

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires[2]

RESUMO

O objetivo geral deste trabalho consiste em apresentar e avaliar os resultados relativos à implementação da Produção Didático-Pedagógica proposta pela primeira autora no Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), desenvolvida junto a alunos da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná. Trabalhou-se com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental com o intuito de apresentar a Metodologia de Investigação Matemática como uma estratégia de ensino e de aprendizagem que contribui e estimula o desenvolvimento do pensamento algébrico. A observação de padrões e regularidades e a generalização foram valorizadas com o propósito de trazer contribuições à aprendizagem dos alunos. A proposta foi desenvolvida na perspectiva da Educação Matemática Realística e a forma de capacitação está na construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem que levam em consideração a aprendizagem dos educandos, levantando hipóteses sobre como ela ocorre. Para tanto, buscou-se a oportunidade de refletir sobre temas relacionados a conteúdos matemáticos e ao encaminhamento de tarefas nas aulas, proporcionando uma aprendizagem matemática efetiva.

Palavras-chave: Tarefas Investigativas. Pensamento Algébrico. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Educação Matemática Realística.

1 INTRODUÇÃO

Como professora da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná desde 1992, algumas inquietações referentes às dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática e os baixos índices no rendimento escolar sempre foram focos de angústia e de inquietação.

Procurando respostas para essas inquietações, buscou-se no decorrer do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, a oportunidade de estudos, reflexões e a busca de alternativas para as práticas educativas, incentivando e impulsionando todos os atores envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem.

---

[1] Curso de Especialização em Matemática, Graduada em Ciências com Habilitação em Matemática, atua no Colégio Estadual Professora Helena Kolody – Ensino Fundamental e Médio – Cambé – PR.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática – UEL, Mestre em Educação – UFPR, Especialista em Educação Matemática – UEL, Licenciada em Matemática – UEL. Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Nesta perspectiva evidencia-se a necessidade de mudanças de atitudes e metodologias com o intuito de despertar a motivação e o interesse dos estudantes. Essas reflexões colaboraram fazendo-se optar pela Investigação Matemática como uma possibilidade para despertar a motivação e envolver os estudantes, tornando-os dinâmicos, levando-os a pensar matematicamente.

O ponto forte dessa estratégia consiste na elaboração de relatórios, uma vez que a construção dos mesmos oportuniza ao educando a produção de significados matemáticos e leva o indivíduo a agir como um matemático em sua essência.

Vale salientar que no terceiro período do PDE foi desenvolvido o Grupo de Trabalho em Rede – GTR – em que reflexões e opiniões dos participantes, bem como as interações realizadas com os colegas, propiciaram a todos os envolvidos nesse processo, momentos de reflexão sobre a importância de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes desde as séries iniciais. Nesse sentido, retomou-se uma discussão que permeia o processo de ensino e de aprendizagem no que diz respeito à aplicação de problemas não rotineiros com o objetivo de levá-los a pensar e fazer matemática.

A continuidade às atividades do projeto foi efetivada por meio do desenvolvimento de três Trajetórias Hipotéticas da Aprendizagem:

1. Tabuada – Inimiga ou Aliada?
2. Bolinhas em Quadrados;
3. Sólidos Geométricos.

Optou-se por relatar no presente artigo a Terceira Trajetória de Aprendizagem – Sólidos Geométricos, construída na Unidade Didático-Pedagógica. A escolha dessa temática não foi aleatória e, no entendimento da autora, foi a tarefa que melhor retratou as expectativas em sala de aula e acredita-se que uma Investigação Matemática Geométrica pode contribuir com a aprendizagem e descobertas de propriedades que poderão levar os estudantes a buscar novas descobertas.

Este trabalho é composto por alguns pressupostos teóricos que o fundamentam e com relatos da aplicação da proposta do projeto.

2 ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Investigação Matemática

Na concepção de Fonseca, Brunheira e Ponte (2012, p.4) uma investigação matemática “é uma viagem até ao desconhecido”. Da mesma forma Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.13) firmam que: ”Investigar é procurar conhecer o que não se sabe”.

Em uma atividade de investigação, o ponto de partida é uma situação aberta, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua concretização. Ponte (2003, p.23) destaca que

> o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e efetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem.

Cabe ao estudante a responsabilidade de definir os objetivos, conduzir as experiências, formular e testar hipóteses e comunicar as suas conclusões.

Investigar, no senso comum, tem vários significados: pesquisar, analisar, examinar com atenção. Investigar em matemática tem significado mais amplo, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), esse termo faz referência ao trabalho dos matemáticos que procuram descobrir relações e identificar propriedades de objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos. Isso pode exigir tempo, dedicação e criatividade dos matemáticos.

É importante lembrar que ao utilizar a estratégia de investigação matemática é fundamental que o professor valorize as diferentes estratégias e problemas que os estudantes podem encontrar na situação apresentada, a discussão sempre parte daquilo que o aluno propõe ou desenvolve.

De acordo com o documento das Diretrizes Curriculares (PARANÁ, 2008, p.67) uma investigação é:

> um problema em aberto e, por isso, as coisas acontecem de forma diferente do que na resolução de problemas e exercícios. O objetivo a ser investigado não é explicitado pelo professor, porém o método de investigação deverá ser indicado através, por exemplo, de uma introdução oral, de maneira que

> o aluno compreenda o significado de investigar. Assim, uma mesma situação apresentada poderá ter objetos de investigação distintos por diferentes grupos de alunos. E mais, se os grupos partirem de pontos de investigação diferentes, com certeza obterão resultados também diferentes.

No momento em que o professor formula a tarefa que o educando irá desenvolver, é pertinente que se estabeleça caminhos e que se defina um percurso a ser explorado para que ocorra realmente o processo de descoberta e aprendizagem, levando o aluno a sintetizar e concluir o processo de forma satisfatória.

As investigações matemáticas (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2003, p.10) “envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração”. E no que se refere ao ensino e aprendizagem, os autores salientam que investigar

> não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão-só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p.9).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.14), uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases:

> 1. Introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito;
> 2. Realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma;
> 3. Discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Em uma aula de investigação é importante que os estudantes registrem suas descobertas para que dessa forma organizem as estratégias usadas. Esses registros podem ser feitos na forma de um relatório, que pode ser usado como um instrumento de avaliação. No que diz respeito ao relatório escrito Fonseca (2000, p.34) afirma:

> a elaboração de um relatório escrito já pode ter como objetivo apresentar aos outros o trabalho que foi feito. Para pôr os alunos a criar e a compreender a matemática, é importante que escrevam através das suas próprias palavras e dos seus próprios símbolos. Os alunos devem ser

> encorajados a comunicar por meio de gráficos, tabelas, modelos, diagramas, pois este tipo de comunicação pode ajudar muito a explicar determinados assuntos.

Nestas condições, o professor deve criar um ambiente em que o estudante sinta-se à vontade para apresentar suas conjecturas, bem como para argumentar contra ou a favor das ideias dos colegas, ciente de que todas as suas descobertas serão valorizadas. O professor deve também recordar conceitos, indicar sugestões, organizar discussões das ideias, ter uma postura estimulante levando o educando a ouvir, participar ativamente das tarefas, comunicando-se com o grupo e com o professor, expressando seus conhecimentos matemáticos.

Em uma tarefa de investigação, o estudante tem autonomia para conjecturar, experimentar, provar, avaliar, validar e, posteriormente, apresentar os resultados obtidos, promovendo uma discussão em que argumentará o seu posicionamento com seus colegas e professor. Para Ponte et al. (1998, apud CORRADI, 2011, p.171), “além da apresentação de resultados é importante que possa existir um confronto sério de ideias, justificando as afirmações que se fazem e questionando a validade dessas justificações”.

Os argumentos discorridos a respeito da Investigação Matemática fazem acreditar que essa possa ser uma estratégia viável para criar um ambiente de aprendizagem matemática significativa.

2.2 Pensamento Algébrico

Um momento que merece algumas reflexões por parte do professor de Matemática é quando os estudantes do Ensino Fundamental começam a lidar com a álgebra. A mediação do professor é fundamental para que não ocorra apenas uma aprendizagem mecânica e sim uma reflexão sobre o que se aprende. O professor deverá estar munido de estratégias diversificadas e apresentar de forma contextualizada a temática proposta para aquele dia, atribuindo, assim, significados e permitindo, dessa forma, que o aluno desenvolva seu pensamento algébrico.

Fiorentini et al. (2005) ressalta que o aluno desenvolve gradativamente o pensamento algébrico quando:

> [...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos [...]; percebe e tenta expressar as estruturas

> aritméticas de uma situação-problemas; produz mais de um modelo aritmético de uma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente [...] (FIORENTINI et. al., 2005, apud LOPEZ, 2010, p.6).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental também destacam:

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar "abstratamente", se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados (BRASIL, 1997, p. 117).

Para Lins (1994), o pensamento algébrico possui três aspectos que caracterizam um modo de produzir significado para álgebra, (i) pensar aritmeticamente, (ii) pensar internamente e (iii) pensar analiticamente", Lins (1994, p.30) observa que:

> pensar aritmeticamente significa que os objetivos com que estou lidando são exclusivamente números, operações aritméticas e, acrescento aqui, uma relação de igualdade. Pensar internamente significa que as propriedades destes objetos que sustentam o que eu faço com eles, isto é, que sustentam a lógica das operações num sentido mais amplo, não fazem referência a nada fora do domínio destes objetos. [...] Pensar analiticamente, por fim, significa que números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos, "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados" (LINS, 1994, p.30)

Os autores citados indicam que para o estudante aprender Álgebra é necessário que o trabalho com os elementos que a envolvem sejam trabalhados bem antes, é que a forma como desenvolvemos a Aritmética pode colaborar para o que estamos chamando de "pensamento algébrico".

Fazendo um paralelo entre a questão da ruptura entre aritmética e álgebra, PONTE (2005) destaca:

> Uma das dificuldades dos alunos é na transição da aritmética para álgebra. Dificuldades em usar letras para representarem variáveis e incógnitas, traduzir informação da linguagem natural para a linguagem algébrica e

> compreender as mudanças de significados, na aritmética e na álgebra (PONTE, 2005, p.39).

Convictos das dificuldades dos alunos com relação a álgebra, muitos matemáticos ressaltam a importância de trabalhar com o pensamento algébrico desde as séries iniciais, induzindo o estudante a fazer suas generalizações e assim atribuir significado às letras. Quando o estudante passa a manipular símbolos e a estabelecer relações, ele passa a agir positivamente frente à matemática. Desta forma, ao entrar em contato com as equações algébricas, que requer regras próprias, ele não as desenvolverá de forma mecânica.

2.3 Educação Matemática Realística

De acordo com Bezerra (2010), no início dos anos 70, século XX, o Instituto Freudenthal, fundado por Hans Freudenthal, tentou evitar que a educação holandesa recebesse influência do chamado Movimento da Matemática Moderna, o qual se espalhou pelo mundo nas décadas de 1960 e 1970 e que estabelecia como meta definir novos rumos para o ensino nas escolas da Holanda. Hans Freudenthal desenvolveu uma abordagem teórica para o ensino e a aprendizagem da matemática conhecida como Educação Matemática Realística (RME), que incorpora pontos de vista acerca do que é matemática, de como os estudantes a aprendem e de como ela deve ser ensinada para promover a aprendizagem dos mesmos.

Na perspectiva da RME, os estudantes são considerados como participantes ativos do processo de ensino e de aprendizagem, no qual eles próprios desenvolvem habilidades de resolução de problemas, reflexão e descoberta de caminhos e de ferramentas matemáticas que levam à construção do conhecimento.

A Educação Matemática Realística é uma abordagem que considera a matemática como uma atividade humana, se sustenta na fenomenologia didática de Freudenthal e na matematização progressiva de Treffers, que dizem respeito, basicamente, à utilização de:

- ✓ contextos da vida real como ponto de partida para a aprendizagem;
- ✓ modelos como uma ligação entre a matemática e a realidade (matematização);
- ✓ produção ou estratégia do próprio estudante como resultado da matemática por ele desenvolvida;

- ✓ problemas significativos provenientes da realidade.

A presente proposta pretende considerar a Educação Matemática Realística e as ideias subjacentes a ela na elaboração das Trajetórias de Ensino e Aprendizagem que serão construídas.

2.4 Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Trajetória é um termo usado para designar o “caminho” que poderá ser percorrido. Para exemplificar o significado do termo “trajetória”, Simon (1995, apud PIRES, 2009, p. 158), faz a seguinte analogia:

> [...] considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequencia do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética”.

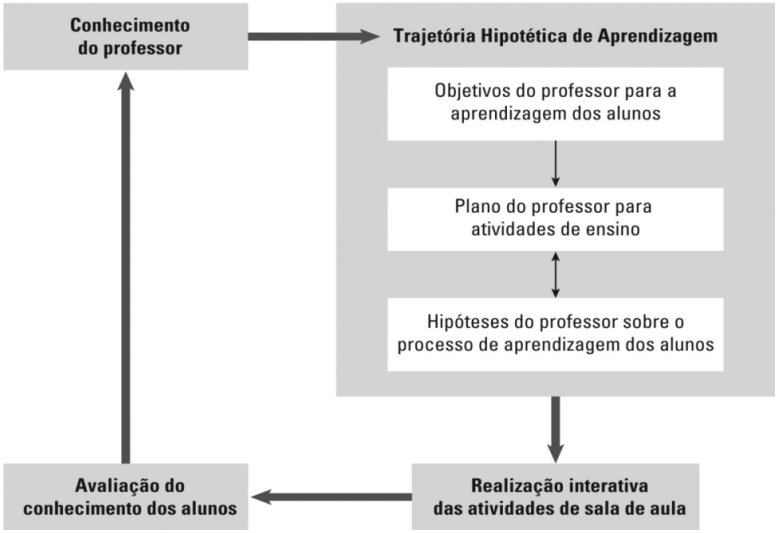
Ao elaborar um plano de aula, o professor pondera seu conhecimento matemático e a hipótese que faz de como o estudante aprende, essa hipótese é influenciada pela sua experiência com os discentes que esse professor já teve.

Podemos considerar que a Trajetória Hipotética de Aprendizagem é um plano de aula mais elaborado, além de conter os elementos de um plano de aula, ele traz também as hipóteses de encaminhamento que o professor dará a aula de acordo com a hipótese levantada em relação ao comportamento que seu aluno terá.

Para Simon, autor da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, essa prática dá ao professor autonomia para tomar decisões e levantar suposições de como o conhecimento poderia ser processado pelo aluno.

A figura a seguir, representa o modelo hipotético de Simon.

Figura 2 – Ciclo de ensino de matemática abreviado (SIMON, 1995 apud PIRES, 2009, p.156)



Fonte: Pires (2009, p.156)

O esquema destaca a importância do intercâmbio entre o planejamento do professor e a construção das tarefas provenientes das interações entre professor-educando, oportunizando ao aluno o desenvolvimento do conhecimento de acordo com os objetivos traçados.

3 DA TEORIA À PRÁTICA

A efetivação da proposta teve início com a implementação. No primeiro momento foram apresentados e socializados com os demais atores da comunidade escolar o Projeto de Intervenção Pedagógica e a Produção Didático-Pedagógica na Escola. Participaram desse processo a Direção, Equipe Pedagógica, Professores e Agentes Educacionais I e II durante a semana pedagógica no Colégio Estadual Professora Helena Kolody – Ensino Fundamental e Médio de Cambé - NRE – Londrina.

No segundo momento, aconteceu a explanação para os estudantes do 7º ano “A”, a respeito do que consiste o programa PDE e a apresentação e socialização do Projeto de Intervenção Pedagógica e da Produção Didático-Pedagógica, foi pontuado as questões que justificam a escolha do tema e da turma. Foi exposto que a proposta inclui Investigações Matemáticas e que o trabalho em equipe pode contemplar a troca de ideias viabilizando a interação, o aprimoramento, a argumentação e a comunicação entre os educandos.

Pontuou-se também que em uma aula de investigação é de suma importância que registrem na forma de relatório suas descobertas, para que organizem as estratégias e os procedimentos utilizados.

Esse artigo, como já foi relatado acima, selecionou a terceira Trajetória Hipotética de Aprendizagem – Sólidos Geométricos a fim de desenvolver o pensamento algébrico/geométrico. Para proporcionar uma visão geral da implementação do projeto na escola, segue uma breve descrição do roteiro desenvolvido junto à turma selecionada.

3.1 Terceira Trajetória – Sólidos Geométricos

A partir da organização da turma em grupos, foi solicitado aos educandos que distribuíssem sobre as mesas o material de sucata que trouxeram e que o separassem da forma que desejassem. Em seguida, foi proposto que cada grupo se manifestasse, justificando como selecionaram os objetos. Alguns optaram pelo tipo de material (plástico, papelão, vidro), outros pelo tamanho dos objetos, e ainda como: materiais de higiene, remédio, doce, salgado, líquido, sólido, etc.

Após a discussão dos critérios escolhidos, foi proposto que todos os grupos separassem os objetos de acordo com o formato.

Munida de vários sólidos geométricos e representações de sólidos geométricos pedagógicos, foi levantado um prisma de base retangular e questionou-se qual o objeto que os alunos possuíam em seus grupos que lembrasse aquele formato, em seguida apresentaram caixas de creme dental, remédio, perfume.

Perguntado aos estudantes o que aquelas figuras tinham em comum, alguns responderam que eram feito de papelão, e um grupo afirmou que todas as faces eram formadas por retângulos. Quando indagando sobre qual o nome da figura que lembrava aquele formato, foi afirmado de imediato que se tratava de um paralelepípedo. Solicitando que apresentassem outro nome àquele objeto, foi observado que os estudantes não conseguiram associá-lo a outra nomenclatura. Diante da análise, foi preciso relembrar que aquela figura se tratava de um prisma e que os prismas são nomeados de acordo com o número de lados do polígono da base. Ressaltou-se também que os polígonos podem ser triangulares, quadrangulares, retangulares, pentagonais, hexagonais e assim por diante.

Aproveitou-se o momento para relembrar o que é um polígono regular, bem como o que diferencia um quadrado de um retângulo.

Foi proposto que investigassem uma caixa de creme dental e os alunos notaram que todas as faces opostas, eram formadas por retângulos com as mesmas dimensões.

Aproveitando que os estudantes haviam percebido que as faces opostas de um polígono são semelhantes, propôs-se uma brincadeira com um dado e apenas um grupo se manifestou afirmando que as faces opostas de um dado sempre têm a soma igual a sete. Depois de um pouco de descontração, foi perguntado como é chamado o sólido geométrico que tem o formato do dado e os estudantes foram unânimes em afirmar que se trata de um cubo. Uma aluna questionou se o cubo também é um prisma e alguns estudantes afirmaram que sim, outros que não. Diante da dúvida, foi necessário propor que investigassem quais as semelhanças existentes entre todos os prismas e um grupo afirmou que o cubo não é prisma porque as laterais de um prisma são formadas por retângulos e que o cubo é formado por quadrados. Percebendo que havia necessidade de intervenção, a professora ressaltou que todo quadrado é também um retângulo, porém nem todo retângulo é um quadrado. E para que um quadrado seja também um retângulo é necessário que todos os ângulos sejam retos e seus lados congruentes. Portanto, a docente afirmou que o cubo é um prisma em que todas as faces são quadradas, e que podemos chamá-lo de prisma quadrangular, ou ainda, hexaedro.

Com o objetivo de justificar as nomenclaturas, explorando faces, arestas, vértices e investigar as variadas vistas dos prismas, foi entregue uma tabela impressa e a planificação de prismas. Os educandos coloriram, montaram e associaram cada prisma com objetos do cotidiano. Estabeleceram relações entre figuras espaciais e suas representações no plano, foi possível também, reconhecer polígonos convexos, e a professora exemplificou a diferença entre polígonos convexos, não convexos e a relação de Euler. Concomitantemente, os grupos fizeram as investigações e os registros de suas conjecturas.

Figura	Nome	Nº de lados base (N)	Nº de vértices (V)	Nº de faces (F)	Nº de arestas (A)	Relação de Euler V+F=A+2	Planificação
	PRISMA TRIANGULAR	3	6	5	9	6+5=9+2 11=11	
	PRISMA RETANGULAR	4	8	6	12	8+6=12+2 14=14	
	CUBO	4	8	6	12	8+6=12+2 14=14	
	PRISMA PENTAGONAL	5	10	7	15	10+7=15+2 17=17	
	PRISMA HEXAGONAL	6	12	8	18	12+8=18+2 20=20	

Nº de lados da base (N)	Nº de vértices (V)	Nº de faces (F)	Nº de arestas (A)	V + F = A + 2
20	40	22	60	40+22=60+2 62=62
32	64	34	96	64+34=96+2 98=98
50	100	52	150	100+52=150+2 152=152
N	2N	N+2	3N	

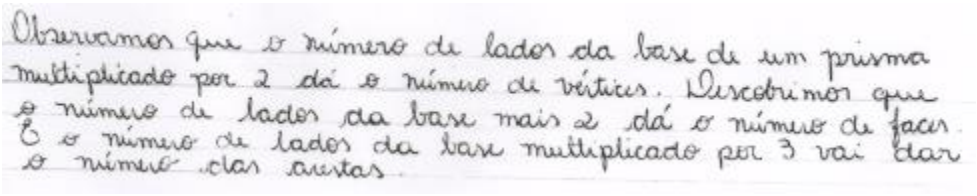
Sólido Geométrico	Vista Superior	Vista Frontal
Prisma triangular		
Prisma quadrangular		
Prisma pentagonal		
Prisma hexagonal		

Ao constatar que alguns grupos divergiam diante da planificação dos prismas, foi necessário solicitar que os educandos desenhassem em papel quadriculado a planificação que cada um acreditava que seria a correta e montassem os prismas. Algumas planificações estavam incorretas, pois a figura não fechava porque as faces se sobrepunham. Observando essas irregularidades, constatou-se que mudando a posição de uma das faces seria possível montar o sólido geométrico.

Desse modo, outros grupos fizeram a planificação de forma diferente, porém com resultado positivo, uma vez que foi possível montar o prisma com sucesso. Procurou-se deixar claro que todas as planificações estavam corretas, que eram apenas maneiras diferentes de representar.

No final da aula, quando os grupos foram elaborar os relatórios, as dificuldades em redigir o desenvolvimento do raciocínio ficaram evidentes justamente por não estarem familiarizados com a metodologia. Foi necessário intervenção da professora que conduziu algumas reflexões sobre o trabalho realizado, principalmente a respeito das relações números de faces, arestas e vértices, levando-os a fazer as conexões matemáticas, formulando, conjecturando e registrando de forma clara e organizada.

Um grupo fez a seguinte generalização:


Observamos que o número de lados da base de um prisma multiplicado por 2 dá o número de vértices. Descobrimos que o número de lados da base mais 2 dá o número de faces. E o número de lados da base multiplicado por 3 vai dar o número das arestas.

Isso confirma que os educandos se apropriaram do conhecimento, expressando o pensamento algébrico, identificando padrões e regularidades, explicitando as relações:

$$V = 2.n \qquad F = n + 2 \qquad A = 3.n$$

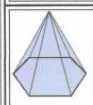
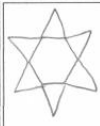
Após a conclusão da investigação de prismas, apresentou-se as pirâmides e representações de pirâmides, levantou-se uma pirâmide de base triangular e perguntou-se qual o nome daquele objeto, um grupo respondeu que se tratava de um triângulo enquanto outro grupo protestou dizendo que se tratava de uma pirâmide. Diante das divergências foi imprescindível que a professora fosse até a lousa e desenhasse um triângulo e uma pirâmide, afirmando que o triângulo é uma figura geométrica plana, formada por apenas três segmentos de retas e a pirâmide é uma figura geométrica espacial que tem três dimensões e que aquela pirâmide é formada por quatro triângulos.

Perguntado aos educandos se todas as pirâmides são “iguais”, muitas foram as respostas:

- um grupo afirmou que todas têm as faces laterais formadas por triângulos;
- outro colocou que as pirâmides têm apenas uma base;
- e um grupo ainda questionou se podemos nominá-las da mesma forma que os prismas.

A professora acrescentou que realmente eles tinham razão, que as laterais das pirâmides são triangulares e que elas têm apenas uma base e afirmou também que podemos nominar as pirâmides de acordo com o número de lados das bases.

Cumprida essa etapa foi distribuída uma tabela e as planificações de pirâmides, os estudantes coloriam e montaram, e os grupos fizeram a investigação, analisando as faces, arestas e vértices, nomenclaturas, as variadas vistas e a relação de Euler.

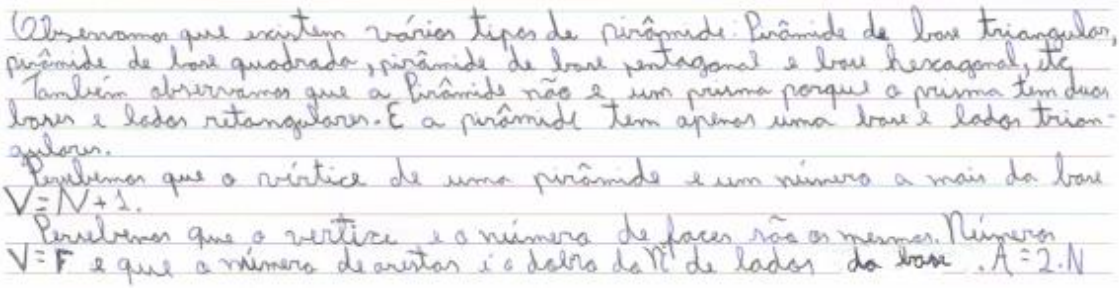
Figura	Nome	Nº de lados base (N)	Nº de vértices (V)	Nº de faces (F)	Nº de arestas (A)	Relação de Euler V + F = A + 2	Planificação
	PIRAMIDE DE BASE TRIANGULAR	3	4	4	6	4+4=6+2 8=2	
	PIRAMIDE DE BASE QUADRADA	4	5	5	8	5+5=8+2 10=10	
	PIRAMIDE DE BASE PENTAGONAL	5	6	6	10	6+6=10+2 12=12	
	PIRAMIDE DE BASE HEXAGONAL	6	7	7	12	7+7=12+2 14=14	

Sólido Geométrico	Vista Superior	Vista Frontal
Pirâmide triangular		
Pirâmide quadrangular		
Pirâmide pentagonal		
Pirâmide hexagonal		

Uma atitude dos estudantes que favoreceu um ambiente investigativo foi o fato de apresentarem um alto grau de envolvimento e autonomia na realização da atividade. Observando os educandos com atenção, foi possível perceber que não apresentaram dificuldades na observação de padrões e regularidades das pirâmides.

Cabe destacar que a dificuldade apresentou-se na generalização e no registro de suas conjecturas por parte, apenas, de alguns estudantes.

Um grupo apresentou esta generalização:


Observamos que existem vários tipos de pirâmide: Pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base pentagonal e base hexagonal, etc.
Também observamos que a Pirâmide não é um prisma porque o prisma tem duas bases e lados retangulares. E a pirâmide tem apenas uma base e lados triangulares.
Percebemos que o vértice de uma pirâmide é um número a mais da base $V = N + 1$.
Percebemos que o vertice e o número de faces são os mesmos. Números $V = F$ e que o número de arestas é o dobro do Nº de lados ~~da base~~. $A = 2 \cdot N$

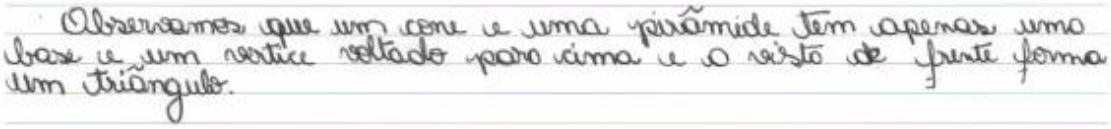
Dando continuidade, foi distribuído aos grupos um cone, um cilindro e uma esfera e solicitado que investigassem e registrassem suas conjecturas. Um grupo afirmou que havia notado que aquelas figuras tinham as bases na forma de círculo e que suas formas eram arredondadas. Diante da colocação, foi exposto que são sólidos geométricos, que colocados em um plano inclinado rolam e são chamamos de corpos redondos.

A professora, nesse momento poderia ter questionado o que eles tinham considerado como faces em forma de círculo, porém na ocasião não ocorreu essa via de encaminhamento.

Questionada se sabia o nome do cone, uma aluna respondeu que se tratava de uma pirâmide de base redonda. Outro estudante afirmou:

“É um cone e as casquinhas de sorvete e os cones de rua tem este formato”.

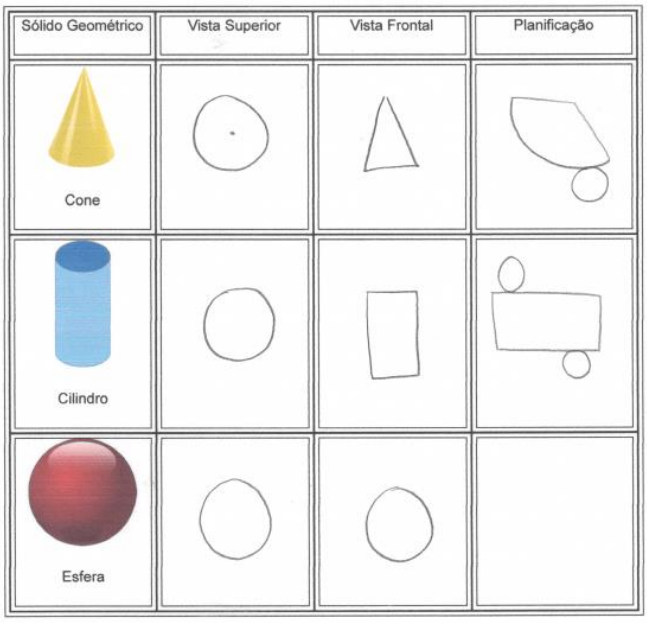
Perguntado aos estudantes qual a semelhança entre um cone e uma pirâmide, estes investigaram e concluíram que:


Observamos que um cone e uma pirâmide tem apenas uma base e um vertice voltado para cima e o visto de frente forma um triângulo.

Deste modo, indagado quanto à semelhança existente entre os prismas retangulares e o cilindro, um grupo afirmou que:

Percebemos que o cilindro e o prisma tem 2 bases e sua visão frontal e retangular.

A partir destas afirmações, foi proposto aos estudantes que desenhassem as vistas e as planificações dos corpos redondos. Os educandos apresentaram as seguintes conclusões:



Os grupos foram unânimes em questionar:

“Como podemos planificar a esfera?”

Afirmando que a esfera é uma figura espacial diferente das demais e que tem características especiais que dificultam sua reprodução num papel, impossibilitando sua planificação, a professora acrescentou que a esfera pode ser gerada por um semicírculo que faz uma revolução completa em torno do seu diâmetro. Aproveitou para falar que o cone, o cilindro e a esfera são considerados sólidos de revolução e

para melhor exemplificar a afirmação, foi feito uma experiência prática, usando um motor de ventilador.

Acreditando que os estudantes necessitavam de uma maior exemplificação, foi exibido o filme “As vinte bolas mais bonitas de todos os tempos”, com o intuito de mostrar toda a sua evolução e os polígonos que a compõem.

Com a mesma intenção foi projetado também o vídeo “Como é feita a bola da copa – Jabulani”.

Finalmente, para concluir a implementação, foi construída uma bola de futebol usando cartolina americana com hexágonos e pentágonos.

Os educandos adoraram a experiência e no final foi feito sorteio da bola.

Assim foi possível concluir a Trajetória Hipotética da Aprendizagem – Sólidos Geométricos.

4 CONCLUSÃO

O objetivo geral desse estudo consistiu em promover a aprendizagem, resgatando o interesse dos alunos em aprender matemática por meio da estratégia de Investigação Matemática. Quanto aos objetivos específicos, foram elaboradas e aplicadas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem na perspectiva da Educação Matemática Realística, explorando questões que possam contribuir com o desenvolvimento do pensamento algébrico, fazendo generalizações acerca de padrões e regularidades, auxiliando os educandos a criarem uma linguagem

simbólica que tenha significado ao representar uma situação problema, sem que necessitem decorar fórmulas ou regras para resolvê-lo.

Desenvolver antecipadamente as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem norteou o trabalho e auxiliou muito nas suposições de como o conhecimento poderia ser processado pelo aluno.

Ao fazer as previsões, acreditou-se que essa tarefa poderia ser executada em cinco aulas de cinquenta minutos cada, do qual, nos primeiros momentos seriam formadas as equipes e a professora estabeleceria um contrato didático e relembraria a maneira de como elaborar um relatório. Porém foram necessárias doze aulas. Acredita-se que não foi possível desenvolver essa trajetória no tempo previsto pela necessidade de exploração e recordação de vários conceitos, bem como auxiliar os estudantes na elaboração dos relatórios, momento esse em que apresentaram muitas dificuldades e euforia para chegar a um consenso e superar as divergências de ideias.

O trabalho em equipe e a confecção de relatórios nas aulas de investigação matemática, configurou-se como um grande aprendizado para os estudantes e também para a professora.

Ao final desse estudo, é possível afirmar que a estratégia de Investigação Matemática pode atrair os estudantes fazendo-os sujeitos ativos na aprendizagem matemática e, como afirma FORISTIERI (2012, p. 23).

> o caminho para uma aprendizagem efetiva é a busca constante de conhecimentos por parte de todos os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem e a articulação entre os saberes escolares e as experiências vivenciadas para a superação dos desafios e dificuldades encontradas na tarefa educativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEZERRA, Gisleine Correa. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade:** um estudo. 2010. 183f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: m**atemática – ensino de quinta à oitava série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CORRADI, Daiana Katiúscia Santos. Investigações matemáticas. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, Vol. I, 2011 – XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011, p. 162-175.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, 1999.

_____. **As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática**. Disponível em: www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/fonseca-etc99.pdf. Acesso em: 14 jul. 2012.

FONSECA, Helena. **Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na sala de aula**. 2000. Tese (Mestrado) – Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2000.

FORISTIERI, Annair Fernandes de Miranda. **O trabalho com conteúdos para consolidação da função social da escola pública na perspectiva da pedagogia histórico-crítica.** Trabalho apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional – UEL. Londrina, 2012.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis**, Blumenau, v. 1, n. 7, 1994. p. 30.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 141f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

PARANÁ. Secretaria da Educação. **Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica**. Curitiba, 2008.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 1, 2009, p. 145-166.

PONTE, J. P; BROCARDO, J. & OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

TREFFERS, A. **Three dimensions:** a model of goal and theory description in mathematics instruction – the wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

YADNAK, Sonia Pontes Dutra. **Uma trajetória de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico.** Trabalho apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional – UEL. Londrina, 2011.