O PROFESSOR PDE E OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE

2012

VOLUME I

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UM ENFOQUE AOS CONTEÚDOS GEOMÉTRICOS

Autora: Tavania Suzer da Silva Becker[1]

Orientadora: Dulcyene Maria Ribeiro[2]

RESUMO: Este artigo tem como objetivo apresentar os resultados de um trabalho que foi realizado por meio do uso da Investigação Matemática envolvendo o conteúdo de Geometria. Nele, além de uma fundamentação teórica sobre Geometria e sobre Investigação Matemática como uma proposta metodológica, há relatos sobre as atividades que foram desenvolvidas no primeiro semestre de 2013, com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, do Colégio Estadual Princesa Izabel – EFMN, em Três Barras do Paraná, NRE de Cascavel, durante a implementação do Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola. Foram preparadas dez atividades que se desenvolveram na maioria das vezes em grupo e foram abordados conteúdos relacionados a: triângulos, quadrados, faces, arestas, vértices, polígonos, poliedros, frações, cálculos de área e perímetro. Respondendo às questões inicialmente colocadas no projeto e apesar das dificuldades em se trabalhar com uma metodologia diferente em sala de aula, é possível afirmar que a Investigação Matemática é uma metodologia apropriada e viável para o Ensino de Geometria e pode oportunizar aos alunos aprenderem os conteúdos geométricos com maior significado. Por fim, há uma avaliação dos resultados obtidos, constatando que os objetivos previstos foram alcançados na sua maioria.

Palavras-chave: Investigação Matemática, Geometria, Matemática e Ensino Aprendizagem.

1. INTRODUÇÃO

Encontramos muitas dificuldades em vários campos do Ensino e da Aprendizagem de Matemática, pois ela ainda é trabalhada ou entendida por muitos como algo pronto e acabado. Isso muitas vezes faz com que ela não seja relacionada com situações cotidianas. Tratando-se da Geometria especificamente o quadro não é muito diferente, pois esta ainda é deixada de lado, não se dá tanta ênfase ao seu estudo, se comparado à Álgebra ou outras áreas afins.

A escolha da temática desenvolvida durante esse trabalho da Professora PDE, se deu para responder a algumas de suas angústias: os alunos gostam de Geometria, mas somente das partes em que fazem construções de figuras ou sólidos geométricos, ou quando fazem uso de materiais manipuláveis. Quando o

[1] Professora da Educação Básica do Quadro Próprio do Estado do Paraná, no Colégio Estadual Princesa Izabel – EFMN, no município de Três Barras do Paraná, NRE de Cascavel. Licenciada no Curso de Ciências - Habilitação em Matemática, com Especialização em Orientação e Supervisão Escolar e Ensino da Matemática. E-mail: tavi@seed.pr.gov.br

[2] Professora da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste. Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo – USP. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – Unesp. E-mail: dulcyenemr@yahoo.com.br.

estudo volta-se para os cálculos dizem sempre que não entendem, ou seja, não conseguem relacioná-los com a realidade.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008, p. 56) “asseguram que o conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo”.

Para trabalhar com alguns conteúdos geométricos nesta proposta, foi utilizada a Investigação Matemática como metodologia para o estudo e desenvolvimento das situações propostas. Esperava-se promover a aprendizagem e que os alunos, ao investigarem, pudessem ver nas atividades de Matemática diferentes possibilidades de resolução.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 23), relatam que:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Portanto, levar o aluno a buscar soluções para as questões, fazendo com que ele argumente, investigue a situação dada, trace as estratégias para resolver os problemas pode vir a ser um caminho de aprendizagem mais vantajoso. Entendemos que a Investigação Matemática pode ser uma alternativa para auxiliar o desenvolvimento das atividades em sala de aula, de maneira a proporcionar a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Partindo disso, este estudo teve como objetivo verificar se é viável o estudo da Geometria através de Investigação Matemática e se a Investigação Matemática despertará nos alunos o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação para resolver problemas.

2. ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 GEOMETRIA

A Matemática faz parte do cotidiano das pessoas. Ela está presente em quase todas as ações realizadas pelo ser humano.

De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 60):

> A matemática hoje vista “de dentro”, é ao mesmo tempo diversa e mais unificada do que jamais foi. É mais abstrata, no entanto tem a mais ampla aplicabilidade a áreas da vida moderna do que em qualquer tempo anterior. Por causa disso, a “vista de fora” é compreensivelmente confusa. De um lado, a matemática é vista como muito esotérica, amedrontadora, um assunto sobre o qual até mesmo pessoas bastante instruídas confessam ignorância sem se envergonhar. De outro, é tida como parte essencial da prosperidade, segurança e conforto modernos, de modo que os hábeis em matemática são tomados como recursos humanos valiosos.

Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008, p. 45):

> A aprendizagem em Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios.

E quanto ao estudo de Geometria, apesar de muitas vezes o ensino de seus conceitos serem deixado de lado, pode-se dizer que ela se encontra em várias situações do cotidiano, seja na natureza, nas construções, nos jogos, etc. Isso torna este conhecimento especialmente relevante.

Brito e Carvalho (2009, p.21), dão algumas definições para Geometria:

> Uma delas deriva da etimologia do termo e foi devida, provavelmente, aos egípcios. A expressão “medida de terra” aponta para uma origem empírica para este campo do saber, isto é, a necessidade de se medir a terra para dividi-la, mas também a de se realizarem as medições envolvidas na construção arquitetônica e no armazenamento de cereais.

Para as autoras, o conceito de área está totalmente relacionado à origem da Geometria.

Já a segunda definição para Geometria proposta por Brito e Carvalho (2009, p. 21) está relacionada à “ciência dos corpos celestes” e:

> [...] pode ter sua gênese entre os Babilônicos e foi sistematizada pelos primeiros pitagóricos entre os séculos VI e V a.C.. Esta geometria estava ligada às especulações cosmológicas e foi influenciada pela filosofia idealista grega, acabando por se distanciar de problemas de aplicação imediata, separando-se da geodésica que seria, entre os gregos, o conhecimento que lidava com situações empíricas de mediação.

Depois de algum tempo é que a Geometria foi sistematizada pelos gregos, passando a ser uma ciência mais abstrata, pois estes durante séculos tiveram como intuito, não apenas aplicar a Geometria, mas também desenvolver tendências para a abstração. E aos poucos a Geometria passou a ser estudada por si. No entanto, quase todos os conhecimentos que se tem da Geometria Grega não provêm de fontes primárias.

Eves (1992, p. 7) enfatiza que:

> Ao contrário do que ocorre para a geometria dos antigos egípcios e babilônios, não existe quase nenhuma fonte primária para o estudo da geometria grega primitiva. Só existem manuscritos e relatos que datam de vários séculos depois de os originais terem sido escritos.

Um dos objetos de estudo da Geometria são as formas espaciais e as relações dos corpos reais, considerando-os puramente abstrato, e é este nível de abstração que diferencia a Geometria das demais áreas de estudo da Matemática.

A Geometria pode abstrair o que é comum a todos os corpos, porque todo corpo real tem sua forma, suas dimensões e uma posição com respeito aos demais corpos, mais ou menos definida. Por isso, a Geometria tem um campo de aplicações muito amplo.

Segundo Lorenzato (1995, p. 20):

> [...] para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

Durante alguns anos, a Geometria foi deixada para um segundo plano no ensino da Matemática. Hoje se nota uma grande preocupação com o seu ensino, reconhecendo sua importância.

Para Pavanello (2004, p. 3), a Geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da "capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível".

De acordo com a autora, esse é um dos objetivos do ensino da Matemática, oferecer condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados.

2.2 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Considerando as áreas da Matemática, a Geometria é uma delas bastante propícia a ser trabalhada com a Investigação Matemática. Sabemos que, as atividades investigativas conduzem a vários campos da natureza, possibilitando formular e resolver problemas, ou seja, experimentar vários caminhos.

As investigações matemáticas em sala de aula são muito importantes, pois as atividades realizadas em equipes, a elaboração de hipóteses e os relatos produzidos pelos alunos dão significados à Matemática. Além disso, ao compartilhar suas produções com os outros grupos, os alunos podem verificar certas situações que acreditavam serem verdades absolutas. Estas situações ajudam os alunos a construir um conhecimento matemático em sala de aula.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.9):

> [...] investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

Para os autores as investigações podem ter situações bem simples ou um grau de dificuldade maior. Mas o importante é que o aluno possa levantar suas hipóteses, fazer suas descobertas, agir de maneira em que ele possa elaborar seus argumentos. E, essas investigações matemáticas, por se tratarem de situações-problema, levam mais tempo para a realização.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná:

> Uma investigação é um problema em aberto e, por isso, as coisas acontecem de forma diferente do que na resolução de problemas e exercícios. O objeto a ser investigado não é explicitado pelo professor, porém o método de investigação deverá ser indicado através, por exemplo, de uma introdução oral, de maneira que o aluno compreenda o significado de investigar. Assim, uma mesma situação apresentada poderá ter objetos de investigação distintos por diferentes grupos de alunos. E mais, se os grupos partirem de pontos de investigação diferentes, com certeza obterão resultados também diferentes (PARANÁ, 2008, p. 67).

As atividades investigativas vêm sendo constantemente recomendadas, com o intuito de melhorar o entendimento dos alunos em relação às situações

matemáticas e de demonstrar que é possível fazer Matemática de um modo diferente,

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 10).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 29) as aulas investigativas são:

> Aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática.

É muito importante lembrar que é o professor de Matemática o grande responsável por familiarizar os alunos a essas investigações matemáticas e a esse processo de construção, de significação, de busca de saber.

> As atividades investigativas estimulam o envolvimento dos alunos e elas podem ser trabalhadas por alunos com nível de desenvolvimento diferente. Essas atividades potencializam o raciocínio matemático uma vez que envolve vários tópicos, proporciona oportunidades de explorar conceitos matemáticos e estimula professores a repensar aspectos de sua prática docente. (CUNHA: OLIVEIRA; PONTE, 1995, p. 1).

Ao utilizar a investigação matemática para realizar as situações-problema, o professor será sempre mediador do trabalho, jamais perdendo sua função no processo educacional. É o conhecimento do professor sobre a questão a ser investigada e a maneira como o trabalho for conduzido que influenciará o sucesso e o envolvimento dos estudantes.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.47), “[...] o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles”.

Desse modo, para os autores, a confiança do professor frente às investigações matemáticas é primordial, pois tanto professores principiantes como

professores mais experientes têm que estarem seguros em relação à metodologia que será trabalhada.

Para a realização de uma investigação matemática é necessário quatro momentos, como indicam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.20). Esses momentos muitas vezes surgem simultaneamente. O quadro seguinte destaca esses momentos.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 21).

Quanto às investigações geométricas, elas contribuem para:

> Perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e a demonstração de generalizações. A exploração geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da historia e da evolução da Matemática. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p.71)

Ponte (2003, p.2), diz que na sua perspectiva, investigar,

> [...] não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com (*sic*) nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos.

Assim, espera-se que a Investigação traga aos alunos e professores muitos benefícios, deixando-os sempre à margem de novos desafios.

A seguir estão descritas algumas atividades que foram desenvolvidas em sala de aula durante o processo de implementação da produção didático-pedagógica e algumas considerações sobre elas.

3. INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA: DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES E DESAFIOS CONSTANTES

Desde o planejamento do trabalho com os alunos do Sétimo Ano do Ensino Fundamental, sabíamos que seria um grande desafio, pois, eles não estão acostumados a trabalhar de modo investigativo. Ao expor que teríamos várias aulas diferenciadas da rotina diária e que a maioria delas seriam em grupo, eles ficaram eufóricos.

Segundo Menezes (2009), para promover a autonomia, é preciso propor à classe atividades coletivas mais estruturadas do que as aulas expositivas.

Essa realidade do trabalho em grupo faz com que o aluno possa trocar informações, que cooperarão no desenvolvimento pleno de sua capacidade, mude suas atitudes, consiga ouvir e assimilar o que o outro tenha a dizer e com isso, contribui para o resultado final de uma determinada situação.

Ao começar a falar da Investigação Matemática, como uma forma diferente de tentar resolver situações-problema, percebemos que ficaram muito interessados e ao mesmo tempo receosos com o trabalho que estavam prestes a iniciar.

Ponte (2009) ressalta que esse momento é extremamente importante mediante a intenção que se pretende com essas atividades, visto que, muitas explicações sobre o assunto pode induzir o direcionamento do trabalho. Para o início desse trabalho deve-se criar um clima favorável para que este se desenvolva de maneira clara e precisa.

O projeto de intervenção pedagógica na escola e a unidade didática foram fundamentados em autores com experiência em pesquisas sobre o tema. As atividades foram selecionadas privilegiando as atividades de Investigação Matemática no Ensino da Geometria, especificamente aquelas que possibilitam o desenvolvimento de habilidades espaciais, o raciocínio visual e o uso de materiais manipulativos. Em alguns casos os enunciados das atividades foram reformulados com o intuito de torná-los menos diretos e mais propícios ao trabalho investigativo. Sendo assim, a sequência das atividades obedece a um grau crescente de dificuldade.

Cabe aqui citar que tanto o projeto de intervenção pedagógica na escola quanto a unidade didática, foram amplamente discutidas pelos professores da rede

estadual de ensino, através do GTR[3], no período em que as atividades estavam sendo desenvolvidas com os alunos. Discussões estas que foram muito relevantes, pois os professores puderam deixar suas contribuições e também aplicar as atividades em suas escolas.

Para as atividades propostas os alunos foram divididos em grupos com quatro componentes cada. Nas duas primeiras aulas, os grupos não eram mantidos e os alunos se reagruparam de acordo com suas afinidades. Mas mesmo num período pequeno de tempo percebemos que não estava ocorrendo um bom desempenho dos alunos para o trabalho. Com isso optamos em manter os mesmos componentes dos grupos para as demais aulas. Desde então, o desenvolvimento das atividades foi mais produtivo.

As atividades foram previstas para durarem 32 horas aulas. Mas as últimas três atividades foram realizadas no contraturno pelo fato que o tempo de aplicação das atividades se estendeu mais do que havia sido previsto. Na sequência será apresentado o resultado de seis atividades que foram elaboradas na unidade-didática.

Atividade 1 – Investigando as Figuras Geométricas

Para essa primeira atividade, foram entregues aos alunos cartões com a representação de diversos sólidos geométricos. Eles analisaram e classificaram os mesmos. Essa primeira atividade tinha como intuito a familiarização dos alunos com a nova metodologia. Este material foi todo confeccionado em papel cartão.

Fonte: Arquivo de Tavania

[3] GTR - Grupo de Trabalho em Rede: desenvolvido no terceiro período do Programa, possibilita a interação entre professores PDE e professores da Rede por meio do Ambiente Virtual da SEED. O GTR tem o intuito de socializar as produções realizadas pelos Professores PDE durante o Programa, a saber: Projeto de Intervenção Pedagógica, Produção Didático-pedagógica, bem como questões específicas sobre a Implementação Pedagógica na Escola. Essa ação visa a democratização do acesso aos conhecimentos teórico-práticos específicos das áreas/disciplinas do Programa escolhidas pelo Professor PDE.

O objetivo dessa atividade era identificar o que os alunos sabiam sobre esse conteúdo, se conseguiam reconhecer e diferenciar formas planas de não planas, polígonos de não polígonos e poliedros e não poliedros.

Essa atividade, embora bastante simples, deixou os alunos muito interessados. Eles queriam separar, classificar. Porém fizeram poucos registros.

Sabendo da importância dos registros dos grupos, foi solicitado que passassem a fazê-los de maneira mais sistematizada, com o intuito que pudessem perceber as regularidades para depois pensarem nas conjecturas.

Nesse momento a atividade foi interrompida e foram explicadas sobre a importância de se levantar conjecturas e tentar testá-las. Com isso os alunos começaram a relatar sobre as formas que as figuras geométricas apresentavam, buscando alguma generalização. Como se tratava de uma turma que já tinha um conhecimento prévio sobre o conteúdo, tornou-se um pouco mais fácil essa atividade, pois alguns deles recordavam de algumas figuras, até mesmo de alguns nomes.

Um grupo ao ser questionado sobre qual foi a forma que utilizaram para classificar, responderam:

- Primeiramente, as formas planas e depois fomos estabelecendo classificações dentro de grupo menores.

Para o mesmo grupo, indagamos se existiam diferenças entre um poliedro e não poliedro, eles responderam:

- Sim, claro que existe, pois poliedros possuem faces planas e não rolam.

Essa primeira atividade causou muito interesse entre os alunos, eles ficaram muito ansiosos em resolvê-la, buscando a todo o momento nos grupos formas de agrupar as diferentes figuras apresentadas.

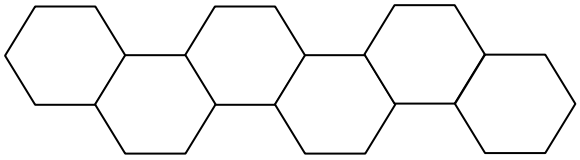
É importante ressaltar, que alguns alunos que geralmente se apresentam bastante tímidos e que em muitos casos não dão suas contribuições, nessa atividade estavam se comportando de forma diferente, expressando sua opinião.

Atividade 2 – Hexágonos[4]

[4] Atividade adaptada de Abrantes (1999).

As análises realizadas pelos alunos na atividade anterior foram tomadas como ponto de partida para as investigações do hexágono. Essa segunda atividade trazia como objetivo principal, a investigação de perímetro e área das figuras apresentadas.

Iniciou-se a investigação fazendo uso de seis hexágonos, já confeccionados em papel cartão, estes deveriam ser colocados de forma que aparentassem estar unidos pelos lados, como a figura abaixo. Foi investigado primeiramente o perímetro e a área dessas figuras.



Nessa atividade os grupos já estavam mais entrosados e o interesse aparentava ser maior. Eles buscavam a todo o momento entender o que seria investigado com aqueles cartões, ou melhor, hexágonos.

Ao serem questionados se seria possível encontrar o perímetro da figura apresentada, prontamente responderam:

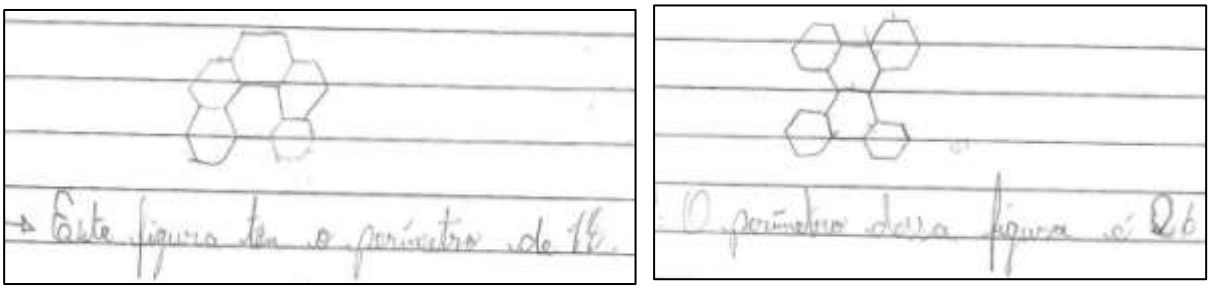
Aluno 1: “É sim. Calculando o perímetro de um hexágono e depois multiplicando por 5, ou seja, um perímetro de 30”.

Aluno 2: “As figuras que estão encostadas com outras duas figuras tem 4 arestas, as que estão em conexão com apenas uma figura tem 5 arestas, portanto, essa figura tem 26 lados.

Aluno 3: “Sim, é só somar o contorno da figura geométrica e somando iremos ter 26 de perímetro”.

Aluno 4: “Nas extremidades tinha 5 de perímetro e no centro tinha 4 de perímetro, somando obteve 26”.

Figura 1: Explicações do aluno para a atividade 2.

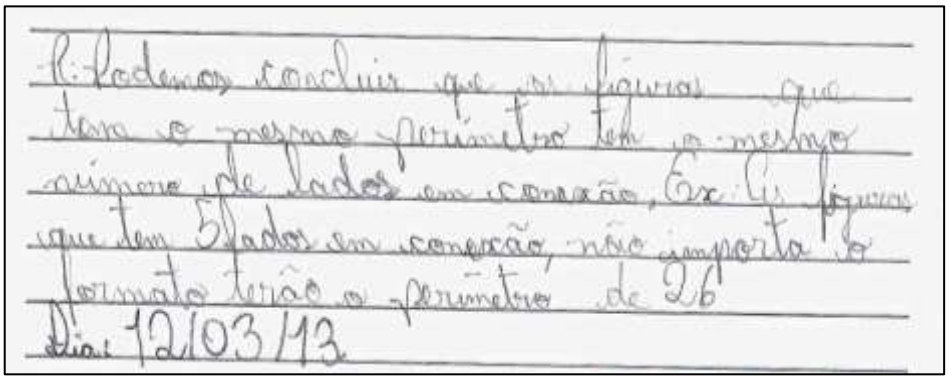


Fonte: Arquivo de Tavania

A todo o momento os alunos iam falando sobre, alterando as formas de como os hexágonos podiam ser juntados e calculando os novos perímetros. No entanto, não conseguiam expressar isso através de fórmulas.

Durante todas as aulas que foram utilizadas para essa atividade, eles fizeram registros como apresentado a seguir:

Figura 2: Explicações do aluno para a atividade 2.



Fonte: Arquivo de Tavania

Para obter a área, alguns grupos dividiram um dos hexágonos fazendo recortes, obtendo três partes iguais. Como eram seis hexágonos, concluíram que a área total dos seis hexágonos seria 18 daqueles retângulos construídos.

Figura 3: Explicações do aluno para a atividade 2

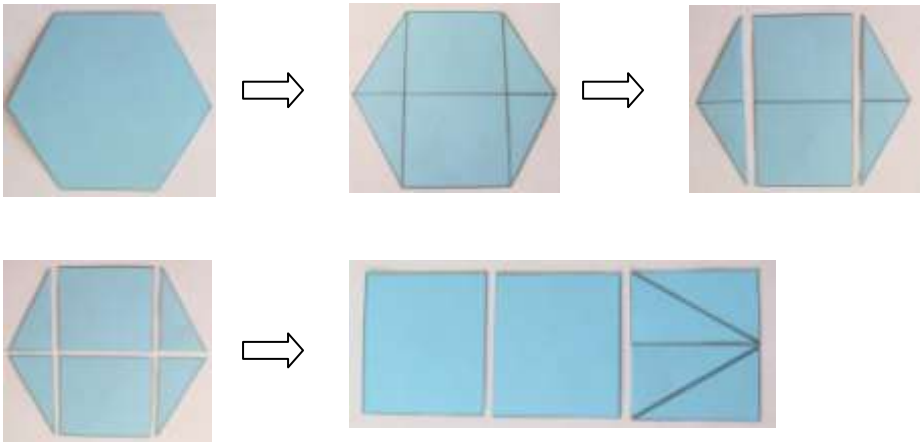
Fonte: Arquivo de Tavania

Aluno 3: “Essa figura é formada por hexágonos, então ela tem área. Ela tem 18 de área”.

Aluno 2: “Nós quadriculamos um hexágono, multiplicamos por 6 e encontramos a área”.

Ao falarem que haviam “quadriculado” um dos hexágonos, na verdade estavam relatando que fizeram cortes, obtendo três retângulos com aquela figura hexagonal, conforme a representação a seguir:

Figura 4: Explicações do aluno para a atividade 2



Fonte: Arquivo de Tavania

Esse tipo de divisão até nos surpreendeu, pois esperávamos que os alunos fossem dividir cada hexágono em seis triângulos equiláteros. Mas é claro, eles usaram o que lhes é mais familiar.

Atividade 3 – Cubos, cubos e mais cubos[5]

Nessa atividade foi proposta aos alunos a construção de cubos de diferentes dimensões usando cubinhos unitários. Eles fizeram uso dos cubinhos do material dourado para fazer as representações.

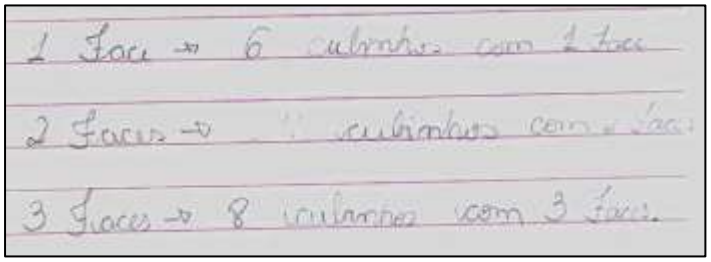
Essa atividade tinha como objetivo explorar diversas estratégias de resolução e também a utilização de termos como figuras planas e figuras espaciais.

Aos alunos em grupos, foi solicitado que construíssem cubos de diferentes arestas, de tamanho 3, 4, 5, 10, se possível. A princípio não gerou nenhum problema, pois nessa idade os alunos gostam de manipular e de construir coisas.

Fonte: Arquivo de Tavania

Após esse período de construção, partimos para as investigações. Foi dito aos alunos para que analisassem o cubo que construíram de aresta 3 e se ele estivesse pintado de vermelho, por exemplo, quantos cubinhos ficavam com uma única face pintada, com duas e com três? E com nenhuma?

Figura 5: Explicações do aluno para a atividade 3.



Fonte: Arquivo de Tavania

[5] Atividade adaptada de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

As respostas do número de cubinhos com uma e nenhuma face pintada foi dada de forma bem rápida pelos alunos, pois perceberam que com uma face era o cubinho que se encontrava no centro de cada uma das seis faces do cubo maior. E com nenhuma face era o que se encontrava no centro do cubo maior. A busca por cubos com duas ou três faces pintadas, gerou um pouco de confusão, pois os alunos visualizavam o mesmo cubo em duas faces. Os grupos que montaram ou tentaram desenhar o cubo com as arestas indicadas, obtiveram um melhor desempenho. Nenhum dos grupos conseguiu realizar uma generalização da situação dada.

Atividade 4 – Dobrando e triplicando[6]

Nessa atividade, o objetivo era evidenciar as diferenças entre perímetro, área e volume de sólidos geométricos. Os alunos em grupos, na sua maioria utilizaram-se dos cubinhos do material dourado que lhes foram fornecidos para a realização da atividade.

Ao mesmo tempo em que uns iam construindo os sólidos com os cubinhos do material dourado, outros iam desenhando, buscando à sua maneira, um modo em que a visualização aproximasse mais do resultado, pois com isso a contagem era mais precisa.

Quase todos os alunos perceberam bem facilmente que conforme a medida da aresta fosse dobrada e triplicada, o perímetro do topo também dobrava e triplicava, respectivamente. O que causou um pouco de dúvida era se a aresta a ser dobrada ou triplicada era a primeira da série ou a última analisada.

Nem todos conseguiram de imediato fazer os cálculos de área e volume, porém, alguns alunos já haviam tido contato com esse conteúdo e foram desenhando e calculando.

A figura abaixo mostra como um aluno desenvolveu seu pensamento, para encontrar o perímetro, a área e o volume, através das figuras apresentadas e de outras que ele construiu.

[6] Atividade retirada da Dissertação de Cunha (2009).

Figura 6: Explicações do aluno para a atividade 4.

Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
1.	4	1	6	1
Dobrado	8	4	24	8
Triplicado	12	9	54	27

Fonte: Arquivo de Tavania

Ao serem questionados, sobre que tipo de regularidades encontraram, responderam que, quando aumenta a figura, aumenta perímetro, área e volume. Os cálculos relacionados ao volume foi o mais confuso para eles. Certamente pelo fato desse conteúdo ainda ter sido pouco trabalhado com alunos do sétimo ano.

Atividade 5 – Pintura de faces[7]

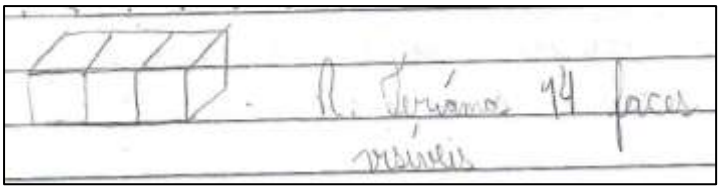
Com essa atividade tinha-se o objetivo de conduzir o aluno ao processo de contagem para a busca da generalização. A geometria e a álgebra estão relacionadas nessa questão. Dessa forma, a álgebra ganha significado concreto, ao mesmo tempo em que se desenvolve a percepção espacial através do contato com os cubos produzidos com material concreto.

Nessa atividade os alunos deveriam encostar os cubinhos do material dourado uns aos outros e depois contar quantas faces ficavam à mostra, supondo que as faces visíveis estariam pintadas. Eles utilizaram diversas estratégias de contagem. Porém, os cubinhos que lhes foram fornecidos, foram utilizados constantemente.

Alguns grupos logo no início do trabalho já deduziram que para saber quantas faces seriam visíveis, por exemplo, era só contar as faces do topo, multiplicar por 4 e somar as pontas, isso serviria para qualquer número de cubinhos.

[7] Atividade extraída da Dissertação de Cunha (2009).

Figura 7: Explicações do aluno para a atividade 5.



Fonte: Arquivo de Tavania

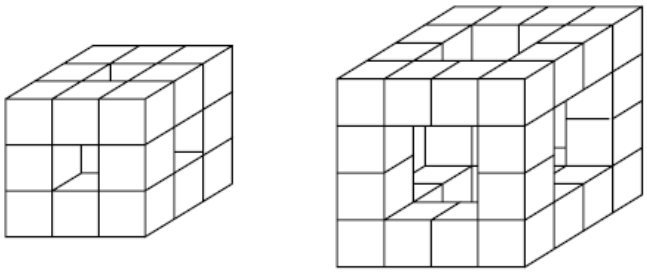
Para o caso de três cubinhos: “[...] é só multiplicar as quatro faces por 3 cubinhos, no caso citado, e depois somar as duas faces da ponta”.

Houve alunos que somaram todas as faces e diminuíram as que não estavam pintadas, ou seja, as que estavam encostadas.

Atividade 6 - Investigando Esqueleto de cubos[8]

Para essa atividade os cubinhos do material dourado estavam disponíveis para os alunos, para que pudessem utilizar se julgassem que fosse necessário. Como estavam trabalhando em grupo rapidamente começaram os comentários que poderia dar certo, outros discordavam, e assim começaram as primeiras tentativas para a resolução dessa atividade que tinha como objetivo o cálculo de volume, promovendo o desenvolvimento da habilidade espacial.

A maioria dos alunos tentou montar com os cubinhos os esqueletos apresentados, dos cubos de aresta 3 e 4 cubinhos. Depois de alguns instantes começaram a perceber que não seria viável esta construção, pois não conseguiram empilhar tantos cubos para tal construção, sendo que ficaram muito tempo presos a essas construções.

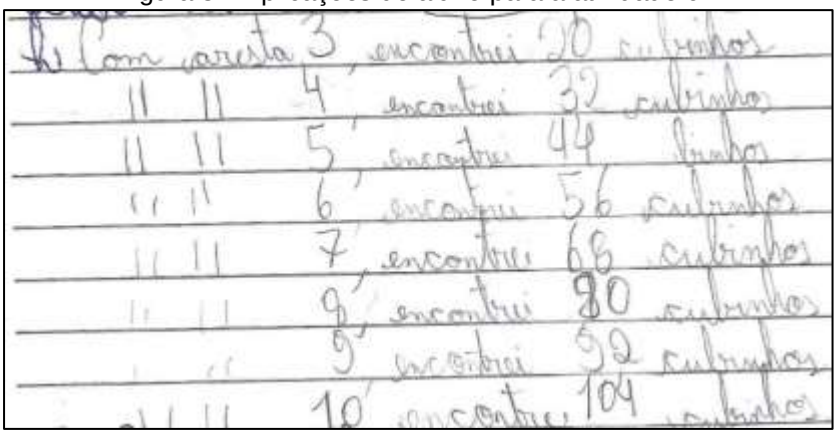


Alguns alunos montaram uma tabela para demonstrar a relação entre o número de cubinhos utilizados com o tamanho da aresta. Ao esquematizar esses

[8] Atividade adaptada de Cunha (2009)

casos, alguns grupos puderam perceber que a partir do esqueleto de cubos de aresta 3, para o próximo, no caso de aresta 4, o número de cubos que aumentava era 12 . E assim, para as demais arestas. Observe algumas anotações realizadas:

Figura 8: Explicações do aluno para a atividade 6.



Fonte: Arquivo de Tavania

Depois que analisaram algumas anotações, os grupos apresentaram suas observações mostrando que, era 12 o número de cubinhos que aumentavam de um esqueleto para o outro, justificando da seguinte maneira:

- “que cada aresta aumentava em um cubinho, pois todo esqueleto era formado por 12 arestas, sendo assim, para formar o próximo esqueleto, acrescenta-se 12 cubinhos”.

4. Considerações Finais

Um dos objetivos da implementação da unidade didática, era sugerir atividades de Geometria através da Investigação Matemática e com isso, verificar se era viável ou não o estudo da Geometria por meio dessa tendência metodológica, possibilitando ao aluno um olhar mais direcionado para a Matemática, um momento para que ele pudesse testar e validar certas situações-problema, levando-o a construir seu próprio conhecimento. Por meio das aulas de investigação e através da avaliação final pode-se constatar que o objetivo foi alcançado, pois o envolvimento dos alunos nas atividades e em cada situação proposta foi muito expressivo. Trabalhar numa perspectiva diferente como essa é algo que dá muito mais trabalho, tumulto, agitação, mas o resultado final e ao longo do processo é gratificante. Após esse período de implementação, é possível afirmar que dá para experimentar

metodologias diferenciadas, sim, no trabalho diário. Enquanto professores precisamos sair da nossa zona de conforto e buscar novos caminhos, novas maneiras de ensinar e/ou aprender.

Embora o raciocínio algébrico não tenha ficado evidente em todas as atividades e em alguns casos os alunos não tenham conseguido fazer generalizações, o desenvolvimento das atividades foi muito proveitoso. Como os alunos ainda não possuem muito contato com a álgebra, esse fato pode ser justificado. Tinoco (2008), afirma que a recorrência às letras no início de um raciocínio não é uma coisa que ocorre naturalmente, é algo que precisa ser ensinado e estimulado pelos professores.

Os materiais manipuláveis e a distribuição dos alunos em grupo foram primordiais para o desenvolvimento do trabalho. Em alguns casos (grupos) o uso dos cubinhos, por exemplo, foi exagerado, pois os alunos prenderam-se demais na contagem dos cubos, na maneira em que estavam dispostos, etc, deixando de estabelecer algumas relações existentes.

Esse momento de estudo, de forma diferenciada do cotidiano, fez com que o aluno ganhasse mais autonomia nas resoluções, na busca por soluções, levando muitos deles a trabalhar com a justificação e validação dos resultados. Uma situação que é imprescindível para as aulas de Matemática.

Após a aplicação das dez atividades que foram planejadas para a implementação, foi realizada uma avaliação, em que os alunos relataram alguns pontos relevantes das aulas apresentadas de acordo com seu entendimento.

Para a maioria dos alunos o formato das atividades e a maneira como se procedia ao trabalho foi o que eles mais gostaram, pois não são comuns tantas aulas em grupos e nem a motivação dos colegas, como foi percebido. As aulas que aconteceram em contraturno estavam sempre cheias e eles disseram ter gostado muito. Ficavam esperando ansiosos pelo dia marcado. Algumas das avaliações descritas pelos alunos traziam os seguintes comentários:

“Estou adorando esse novo jeito de se trabalhar com a Matemática, é muito mais fácil!”

“Utilizar material concreto torna a aula melhor”.

“Com as aulas de Investigação Matemática nós conseguimos aprender melhor, pois podemos nos ajudar”.

“[...] e quando um erra o outro tem a solução, todo mundo pode se ajudar”.

“Esse jeito de estudar é mais fácil, a gente tem mais tempo para resolver uma atividade”.

Durante o período que ocorreu a implementação, os alunos se comportaram de uma maneira muito diferente, como se soubessem da responsabilidade que tinham perante esse trabalho, bem como das expectativas que se esperava deles através dos resultados das atividades.

Pode-se perceber que o ensino e aprendizagem de Geometria, embora pouco valorizado, é perfeitamente possível de ser trabalhado por meio da Investigação Matemática, possibilitando o despertar de interesse do aluno, a curiosidade e o espírito de investigação para resolver problemas.

5. Referências Bibliográficas

ABRANTES, Paulo. Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: VELOSO, Eduardo; FONSECA, Helena.; PONTE, João Pedro da; ABRANTES, Paulo. **Ensino da Geometria no Virar do Milênio**, Lisboa: DEFCUL, 1999. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos.htm> Acesso em: 20 out. 2012.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas ; tradução Elza Gomide, Helena Castro, 2 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRITO, Arlete de Jesus; CARVALHO, Dione Lucchesi. Utilizando a história no ensino de geometria. In: MIGUEL, Antonio. [et al.]. **História da matemática em atividades didáticas**. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

CUNHA, Daniela Santa Inês. **Investigações geométricas**: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática. Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009. 98f. : il.; 30cm. Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2009.

CUNHA, Helena; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas na sala de aula.** In A. Pinheiro, A. P. Canavarro (Eds.), Actas do ProfMat 95. Lisboa: APM, 1995. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte>. Acesso em: 17 abr. 2012.

EVES, Howard. **Geometria.** 1 ed. São Paulo: Atual, 1992.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sergio. **Por que não ensinar geometria? A educação matemática em revista – geometria.** Blumenau, SC: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III, 1995.

MENEZES, Luis Carlos**. O aprendizado do trabalho em grupo.** Nova Escola, v. 222, p. 106-106, 2009.

PARANÁ**. Diretrizes Curriculares da Educação Básica.** Matemática, Secretaria de Estado da Educação do Paraná, Paraná, 2008.

PAVANELLO, Regina Maria. **Por que ensinar/aprender geometria?** In: Encontro Paulista de Educação Matemática, VII, 2004, São Paulo. Anais eletrônicos do Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais>. Acesso em: 06 jun. 2012.

PONTE, João Pedro da. **Investigar, ensinar e aprender.** Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, p.. 25-39). Lisboa: APM.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

TINOCO, Lucia Arruda de Albuquerque (Coord). **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2008.