Versão *On-line* ISBN 978-85-8015-075-9
Cadernos PDE

VOLUME II

OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE

Produções Didático-Pedagógicas

2013

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA COMO AMBIENTE MOTIVADOR NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO PELO ALUNO DO ENSINO MÉDIO	
Autor	Marcia Viviane Barbetta Manosso
Disciplina/Área	Matemática
Escola de Implementação do Projeto e sua localização	Colégio Estadual do Paraná – Avenida João Gualberto, - Centro Cívico – Curitiba-PR
Município da escola	Curitiba
Professor Orientador	Dr. Tânia Teresinha Bruns Zimer
Instituição de Ensino Superior	UFPR
Resumo	Esta produção didático-pedagógica visa apresentar cinco sequências didáticas elaboradas para desenvolver atividades no Laboratório de Ensino da Matemática. Os conteúdos do Ensino Médio foram abordados de forma articulada e retomam conceitos prévios dos alunos para que se construam novos conceitos a partir da transposição didática realizada no ambiente do laboratório. A exploração de prática com materiais didáticos manipuláveis, software, calculadoras, instrumentos de desenho, entre outros materiais, oportunizam a desenvolver uma metodologia diferenciada na qual podemos abordar tendências da Educação Matemática como a resolução de problemas, a investigação matemática, a modelagem matemática, os jogos, e as mídias tecnológicas. Em cada sequência didática é apresentado um quadro contendo os conteúdos, materiais, objetivos e encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento da aula.
Palavras-chave	Laboratório de Ensino da Matemática; Educação Matemática; Materiais Didáticos.
Formato do Material Didático	Unidade Didática
Público Alvo	Alunos do Ensino Médio

1 INTRODUÇÃO

Ao pensar em uma metodologia para o ensino da matemática que envolva o aluno na aprendizagem de forma investigativa e participativa temos algumas opções com o uso materiais manipuláveis, materiais didáticos estáticos ou dinâmicos, e softwares de matemática. Seja no ambiente da própria sala de aula ou em um Laboratório de Matemática que as oportunidades de explorar os conceitos matemáticos podem ocorrer de forma interativa e participativa. O professor ao se propor em elaborar uma aula com metodologia diferenciada oportuniza ao aluno realizar atividades que o aluno sinta parte do seu próprio processo de construção do conhecimento.

Ao planejar algumas práticas pedagógicas que realizam uma sequência didática na qual permita a transposição didática dos conceitos matemáticos cientificamente construídos, para além do livro didático, com a participação do aluno num processo ao qual pode usar a metodologia de investigação, modelagem ou resolução de problemas matemáticos no contexto de um Laboratório de Ensino da Matemática (LEM), pensamos ser este o diferencial pelo qual pretendemos alcançar com esta produção didático-pedagógica.

A matemática é muitas vezes vista por um ensino de forma fragmentada e no contexto do LEM temos a oportunidade de mostrar como se articulam os conteúdos, uma vez que para realizarmos uma prática pedagógica com MD, é necessário que retomemos muitos conceitos estudados anteriormente pelos alunos antes de chegar a construir com eles um novo conceito matemático, aquele que temos como objetivo de ensinar para determinado ano do Ensino Médio. Desta forma, conduziremos uma organização de duas práticas pedagógicas para cada ano do Ensino Médio, associando ao conteúdo proposto no planejamento escolar.

As práticas pedagógicas a serem utilizadas nos laboratórios de matemática voltadas para o Ensino Médio (EM) são pouco encontradas. Ao pensar nesta realidade, e no acesso do professor em realizar práticas concomitantes com o conteúdo que está ensinando formalmente, propomos um material que realiza algumas práticas pedagógicas com o uso de materiais didáticos, especificados posteriormente, e os conteúdos do EM que se adéquam a cada prática pedagógica e a sequência didática das aulas que direcionam o encaminhamento da aula.

A produção didático-pedagógica será configurada na categoria de “Unidade Didática”, e se caracteriza na exploração de conceitos matemáticos a partir de práticas pedagógicas, com fundamentação em algumas tendências metodológicas da educação matemática – resolução de problemas, modelagem matemática, mídias tecnológicas, jogos e investigação matemática, que faz a transposição didática dos conceitos matemáticos, com MD apropriado, que será disponibilizado no LEM. Serão apresentadas cinco práticas pedagógicas, com duração de duas aulas cada uma, para os três anos do Ensino Médio Regular.

2 O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS PARA O ENSINO MÉDIO

Ao pensar no ensino e aprendizagem, a matemática já passou por algumas mudanças metodológicas, algumas concepções positivas e outras negativas. No contexto da educação matemática as Tendências Metodológicas mais utilizadas na prática do professor no Ensino Médio são voltadas para a Resolução de Problemas e História da Matemática, por serem de fácil aplicação pelos professores em sala de aula, em minha opinião. Porém, para um melhor aproveitamento da aprendizagem, o espaço do LEM, pode explorar as atividades com Modelagem Matemática, Investigação Matemática, Mídias Tecnológica, Jogos e Brincadeiras. Essas tendências são exemplificadas por Beatriz D'Ambrósio (1989) em seu texto sobre como ensinar matemática hoje? Com a intervenção dessas tendências temos fundamentação e metodologias que realizam de fato um grande avanço para o ensino da matemática. Atualmente, este ensino pode ir além da sala de aula, ao explorar conceito de forma investigativa e prática, assim, ao propor aulas em um ambiente do LEM e com materiais didáticos Passos comenta que,

> [...] esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo constituído. Na opinião de Pais (2000)[1], os recursos didáticos estão associados às *criações didáticas* descritas por Chevallard (2001)[2], ao analisar o fenômeno da transposição didática no contexto do ensino da matemática, e seriam criações pedagógicas desenvolvidas para facilitar o processo de aquisição do conhecimento (PASSOS, 2012, p.78)

Para as aulas com materiais didáticos (MD) o professor necessita conhecer o material, ter planejado sua aula e elaborar encaminhamentos que direcionam ao conteúdo matemático que o aluno irá explorar. Ao propor uma aula com MD são importantes alguns cuidados que o professor deve prever na abordagem com o aluno:

---

[1] PAIS, L. C. (1996). Zetetiké, Campinas, UNICAMP, vol. 4, n. 6. Foi citado por Passos.
[2] CHEVALLARD, Y. (1991), *La Transposition didactique: Du savouir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Paris. Foi citado por Pais.

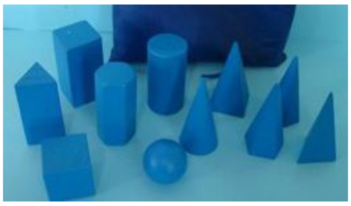
> i) dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
> ii) incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
> iii) mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
> iv) realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
> v) planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
> vi) sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material (RÊGO & RÊGO, 2012, p.54).

No ambiente do LEM podemos desenvolver as aulas com materiais didáticos, jogos, softwares, calculadoras, materiais de desenho, entre outros recursos que são encontrados comercialmente ou construídos para determinadas aplicações matemática. Existem vários tipos de materiais manipuláveis, os quais podem ser estáticos ou dinâmicos. Eles se diferenciam por possibilitarem modificar sua forma ou não. Para Lorenzato (2012) os

> sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina, por exemplo, que, por serem estáticos, permitem só a observação. Outros já permitem uma maior participação do aluno: é o caso do ábaco, do material montessoriano (cuisenaire ou dourado), dos jogos de tabuleiro. Existem, ainda, aqueles dinâmicos, que, permitindo transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem. É o caso da estrela constituída com 18 palitos ou cotonetes iguais e unidos por borrachas ... ela pode ser dobrada de várias maneiras e, assim, pode facilitar o estudo de simetria, rotação, reflexão, triângulo, hexágono, tetraedro, hexaedro, isometria ótica, entre outros assuntos (LORENZATO, 2012, p.18-19).

Serão descritos alguns materiais didáticos previstos para as aulas desta unidade didática com aplicação no Ensino Médio.

- **Sólidos em Madeira:** permitem a observação das diferentes formas e a realização de medidas de suas faces, arestas e altura, e posteriormente determinar a medida da superfície e volume.

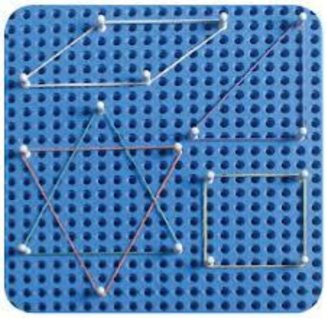


- **Sólidos em acrílico:** encontrado em várias formas, entre os poliedros, prismas, pirâmides e os corpos redondos. O seu potencial está em possibilitar, além de realizar medidas externas, poder comparar a medida do volume obtido pela fórmula matemática com a medida obtida, por exemplo, ao encher este sólido com água. Assim, os alunos podem comparar os resultados e debater com os colegas. No anexo 1 está disponibilizada a descrição de cada sólido.

- **Torre de Hanói:** pode ser considerado um jogo em que temos apenas um jogador. Esta estratégia de ensino possibilita uma discussão sobre a Função exponencial.

- **Geoplano:** possibilita a interação do aluno com o material e contribui com a construção de conceitos de geometria plana.

- **Multiplano:** possibilita a construção de figuras planas, polígonos, gráficos, entre outras situações que explorem a visualização e cálculo de área e perímetro, elementos de gráficos. Possui pinos para determinar o ponto e as figuras podem ser delimitadas por elásticos.



- **TANGRAM:** O mais conhecido é o de formato quadrado. Porém, foram criados centenas de de Tangrans. São explorados os conceitos de geometria plana, medidas de área, perímetro, entre outros conteúdos. Com as peças do Tangram podemos construir milhares de figuras. No anexo 2, será disponibilizado algumas figuras formadas por Tangrans.

Imagens: Materiais didáticos - Acervo da autora

O material didático é um mediador para a construção de um conceito. Existe a preocupação com o uso inadequado, assim,

> as práticas desenvolvidas mostram que muitos professores e licenciados recorrem, em suas salas de aula, ao uso de jogos e ao emprego de quebra-cabeças somente motivados pelos seus componentes lúdicos, não levando em conta os aspectos formadores, tanto no que se refere à construção dos conceitos geométricos, quanto à alfabetização diagramática (KALEFF, 2012, p.128).

O MD é uma opção metodológica para o professor e pode gerar alguns questionamentos em relação ao seu uso, corroboramos com a ideia de que "a utilização do MD pode inicialmente tornar o ensino mais lento, mas em seguida, graças à compreensão adquirida pelo aluno, o ritmo aumentará e o tempo gasto no início será, de longe, recompensado em quantidade e principalmente em qualidade" (LORENZATO, 2012, p.31). Outro questionamento é sobre o uso de jogos ou brincadeiras, que devem ter como foco o ensino e não apenas a parte lúdica, assim, uma das preocupações dos pesquisadores que trabalham com atividades desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) da Universidade Federal Fluminense é do uso inadequado de recursos didáticos, e comentam que

> as práticas desenvolvidas mostram que muitos professores e licenciandos recorrem, em suas salas de aula, ao uso de jogos e ao emprego de quebra-cabeças somente motivados pelos seus componentes lúdicos, não levando em conta os aspectos formadores, tanto no que se refere à construção dos conceitos geométricos, quanto à alfabetização diagramática (KALEFF, 2012, p.128).

As práticas propostas nesta unidade didática estão previstas para serem desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Matemática do Colégio Estadual do Paraná, o qual é equipado com diversos materiais didáticos, calculadoras e computadores que serão utilizados para realizar uma das práticas com o software Geogebra. Ainda, possui uma lousa digital que irá contribuir para o desenvolvimento da aula, dinamizando e contribuindo com a metodologia. Alguns materiais serão criados, construídos ou adaptados especificamente para desenvolver algumas das práticas elaboradas neste material.

3 PRÁTICAS PEDAGÓGICAS PARA O ENSINO MÉDIO

Vamos apresentar um quadro para a visualização do tema das práticas pedagógicas que são elaboradas em formato de sequência didática. São indicadas as práticas por série do Ensino Médio e o possível mês de implementação em 2014.

	Prática Pedagógica	**Mês de aplicação**
1º ano	Construção de Tangram	Fevereiro
	Árvore Pitagórica e Torre de Hanói	Abril
2º ano	A Magia dos Triângulos	Março
	Jogo do Sistema Monetário	Junho
3º ano	A Superfície da Esfera	Maio

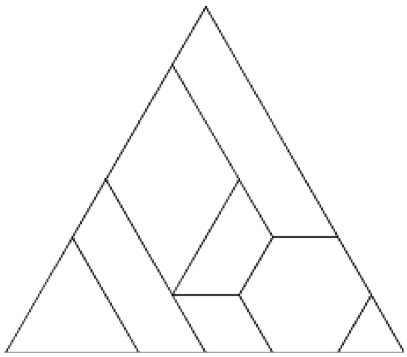
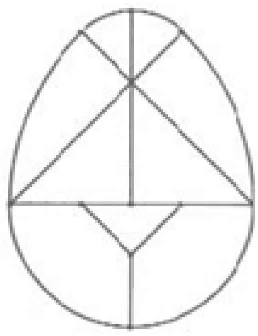
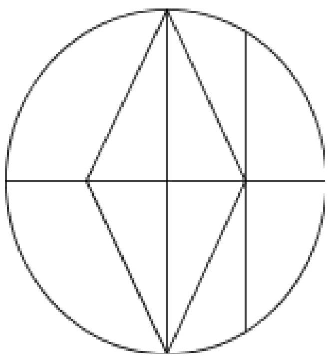
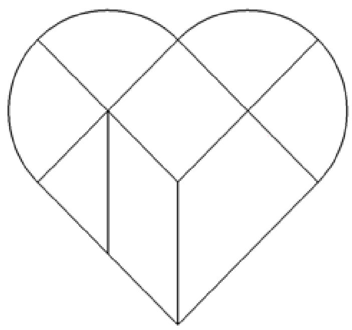
As cinco práticas pedagógicas estão previstas para serem realizadas entre os meses de fevereiro maio de 2014, no ambiente do Laboratório do colégio. Cada Prática Pedagógica tem a duração de duas aulas geminadas, conforme planejamento da disciplina de matemática e organizadas no horário escolar. As práticas pedagógicas serão acompanhadas de um plano de aula com a sequência didática da aula para o professor acompanhar o desenvolvimento da aula. No anexo 3, estão os roteiros das aulas.

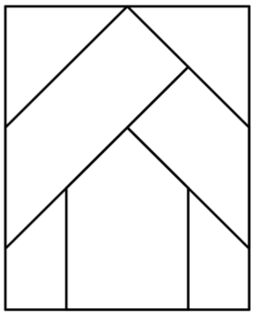
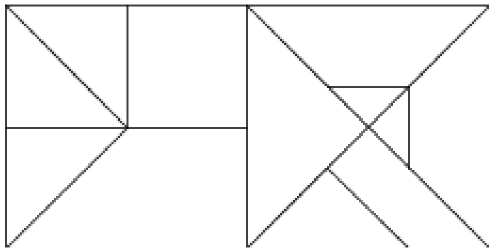
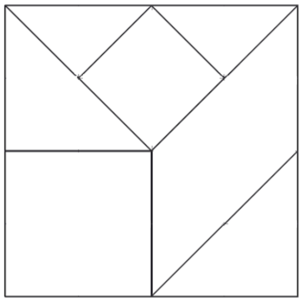
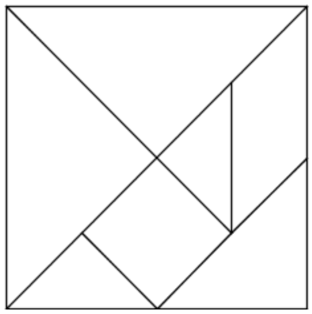
3.1 PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DO 1ºANO

PRÁTICA 1	Construção de Tangram
Conteúdos	**Geometrias:** Geometria Plana **Grandezas e Medidas:** medidas de área, perímetro e ângulo.
Material a ser utilizado	Computador, software Geogebra, lousa digital, multiplano, régua, compasso, transferidor, EVA e tesoura.
Objetivos	- Saber utilizar os elementos de geometria plana para construção de polígonos e figuras planas. - Construir figuras planas a partir dos conceitos de ponto, reta, segmento, polígono, mediatriz, bissetriz, interseção, ponto médio, circulo, semicírculo e arco. - Determinar medidas de lado, área, perímetro e ângulo de polígonos.
Indicação	1º ano

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PRÁTICA 1: Construção de Tangram

No ensino da matemática, são explorados conceitos de geometria plana, área, perímetro, relação entre a área das peças pode-se trabalhar com frações e porcentagem. Existem várias versões da história do Tangram, estamos considerando aquele que tem o seu formato inicial como um quadrado, conhecido também por Tangram Chinês de sete peças. Para iniciar a aula, temos um vídeo sobre uma das lendas do Tangram, disponível em: www.video.fixgen.com/ar/video/.../ahistóriado**tangram**.html). Com as sete peças pode-se montar milhares de figuras, desde animais, construção, pessoas e outras formas geométricas planas. Existem centenas Tangram com formados diferentes, escolhemos alguns para abordar metodologicamente em nossa aula, os quais são denominados Tangram: triangular, Flecher, oval, circular, coração, pitagórico e russo. Quando pesquisamos, por exemplo, o Tangram Pitagórico, encontramos pelo menos três diferentes formatos, assim, escolhemos um para trabalhar nesta unidade. A aula será realizada em duplas e está organizada em quatro momentos: construção do Tangram no Geogebra; construção do Tangram com régua e compasso; uso do multiplano para construir e explorar o Tangram; comentário final. A seguir são apresentados oito Tangram, para serem visualizadas e investigados nesta aula.

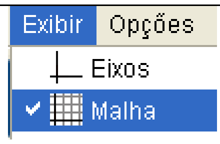
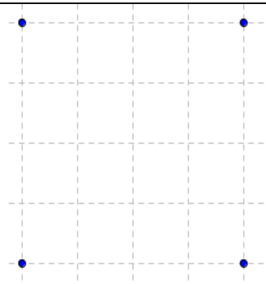
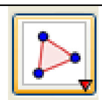
Tangram Triangular	**Tangram Oval**
	
Tangram Circular	**Tangram Coração**
	

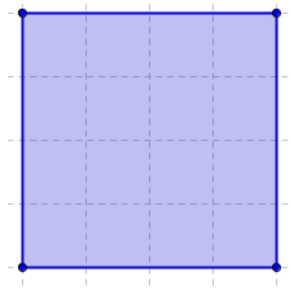
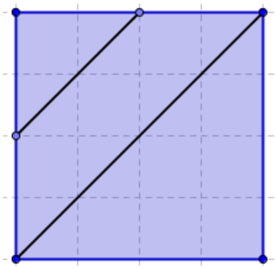
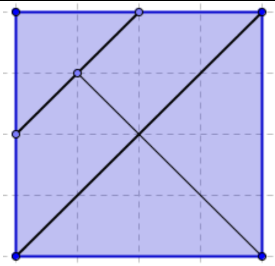
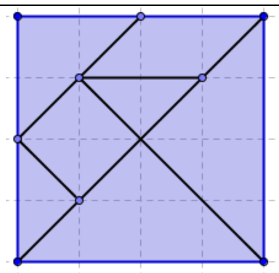
Tangram Pitagórico	**Tangram Russo**
	
Tangram de Flecher	**Tangram Quadrado**
	

Imagens: Tangram - Acervo da autora

Momento 1: Construção do Tangram no Geogebra

1) **Atividade:** A construção do Tangram Quadrado no Geogebra é realizada com a orientação do professor e do roteiro de aula.

Construção 1: Tangram Quadrado	
No Geogebra, selecione a malha quadriculada	
Insira quatro pontos na malha, formando um quadrado, conforme a figura ao lado.	
Selecione polígono.	

Clique em todos os pontos para formar o quadrado.	
Definir os pontos médios do lado superior e do lado esquerdo com a ferramenta ponto. Depois vamos unir esses dois pontos com a ferramenta segmento.	
Com a ferramenta segmento trace uma diagonal do quadrado.	
Insira um ponto médio no primeiro segmento criado e uma com o vértice oposto.	
A primeira diagonal traçada foi dividida em duas partes, agora determine o ponto médio dos dois segmentos formados. Veja a imagem ao lado e insira os dois últimos segmentos para finalizar nosso Tangram Quadrado com sete peças.	

2) **Atividade:** Construção do Tangram Coração no Geogebra indicando passo a passo a construção geométrica que a dupla realizou.

Momento 2: Construção do Tangram com régua e compasso

3) **Atividade:** A dupla irá construir o Tangram Pitagórico com régua e compasso no EVA. Após a construção devem recortar e montar a imagem que representa a prova do Teorema de Pitágoras. Registrar na folha do roteiro de aula as medidas encontradas e verificar se é válido o teorema.

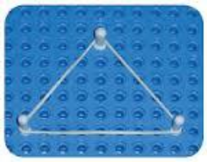
4) **Atividade:** Utilizar o Tangram que ficará disponibilizado na mesa (um dos oito Tangram) para a dupla e forma algumas figuras com suas peças. Registrem um formato encontrado.

5) Utilizar o Tangram Quadrado como quebra-cabeça e desenhe as seguintes formas: (adaptado de RÊGO, RÊGO & VIEIRA, 2012, p. 61-62)
   a) Como formar um quadrado usando 2 peças?
   b) Como formar um quadrado usando 3 peças?
   c) Como formar um quadrado usando 4 peças?
   d) Como formar um quadrado usando 5 peças?
   e) Como formar um paralelogramo usando 2 peças?
   f) Como formar um paralelogramo usando 5 peças?
   g) Como formar um retângulo usando 4 peças?
   h) Como formar um retângulo usando todas as peças?
   i) Como formar um triângulo usando todas as peças?
   j) Como formar um hexágono usando todas as peças?

Momento 3: Uso do multiplano para construir e explorar o Tangram

6) **Atividade:** Utilizar como material didático o multiplano para construir o Tangram Triangular. Acompanhem as seguintes as orientações:

- No multiplano, marque três pontos e defina um triângulo equilátero com elástico.



- Realize as subdivisões internas no triângulo, as quais definem as peças.
- Registrar as medidas dos lados de cada peça e o nome do polígono formado.
- Determinar a área de cada peça.
- Determinar a área do triângulo e comparar com a soma obtida das peças.
- Registrar as medidas de ângulos encontradas nas peças.

Momento 4: Comentário Final

7) **Atividade:** A dupla deve registrar seus comentários (reflexão crítica sobre a transposição didática) nos três momentos anteriores da aula, os materiais utilizados e os conteúdos que exploraram na aula.

PRÁTICA 2	Árvore Pitagórica e Torre de Hanói
Conteúdos	**Números e Álgebra:** Números Reais **Grandezas e Medidas:** Medidas de área **Funções:** Função Exponencial e Progressão Geométrica (PG). **Geometrias:** Geometria Plana (elementos da geometria e triângulo retângulo) e Geometria não-euclidiana (Fractais)
Material a ser utilizado	Multimídia, régua, compasso, lápis, borracha, calculadora, papel A4 branco e colorido, cola, tesoura e o jogo da Torre de Hanói.
Objetivos	- Estabelecer as articulações entre os conteúdos de funções, PG, geometria plana e fractais. - Propor atividades de confecção do material didático no sentido de explorar e estabelecer relações entre teoria e prática. - Construir a árvore pitagórica retomando o Teorema de Pitágoras. - Construir o gráfico da função exponencial e relembrar os conceitos sobre plano cartesiano, domínio e imagem, e referenciar os Números Reais. - Resolver problemas sobre função exponencial, PG e fractais.
Indicação	1º ano

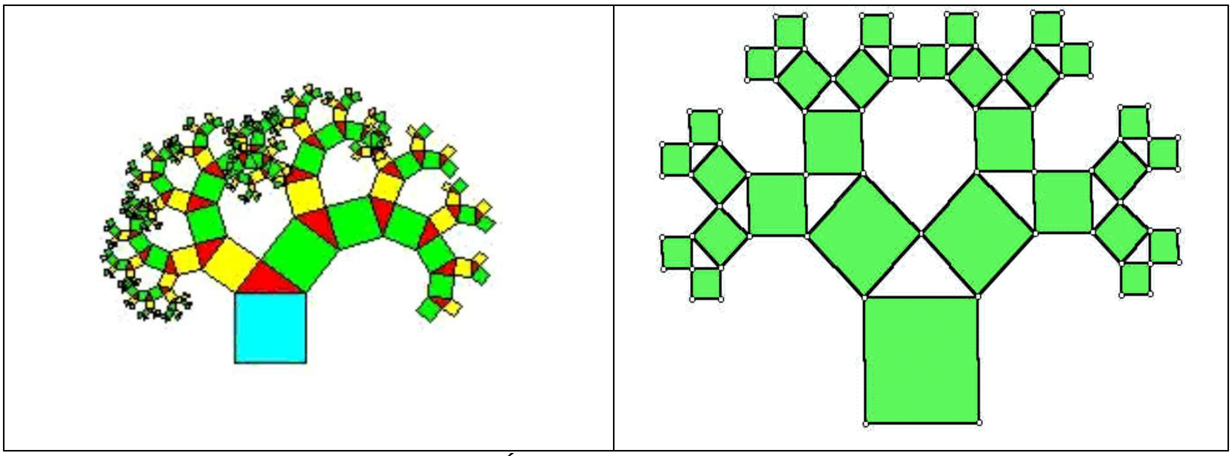
SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PRÁTICA 2: Árvore Pitagórica e Torre de Hanói

Com a intenção de que o aluno construa seu conhecimento sobre Função Exponencial e Progressões Geométricas, serão utilizadas duas situações problemas que envolvem a construção da “Árvore Pitagórica” e a exploração matemática com o jogo da “Torre de Hanói”. Outras abordagens serão realizadas em relação aos conteúdos de geometrias, grandezas e medidas, implícitos nas atividades propostas, para que se percebam, também, como os conteúdos matemáticos são trabalhados de forma articulada. Serão realizados dois momentos diferenciados na aula. Iniciamos a aula com a construção do triângulo retângulo, assim, retomamos os conceitos do teorema de Pitágoras, ampliamos com a construção da árvore pitagórica e seguimos com a explorar dos conceitos sobre geometria fractal. A investigação matemática ocorre com a construção da árvore e relembramos alguns conceitos de geometria plana. Explorar os conceitos da geometria não-euclidiana e da geometria plana envolvidos na construção da árvore. No segundo momento da aula é apresentado o jogo da Torre de Hanói como um jogo e depois investigamos o conteúdo matemático envolvido para que o aluno construa seu conhecimento sobre função exponencial. Serão realizadas algumas atividades para que o aluno perceba a relação entre função exponencial e PG. Retomamos com um último momento, ao apresentar questões de resolução de problemas, para estabelecer a relação desses conteúdos e os fractais. Temos situações em que a geometria euclidiana se torna insuficiente para responder as situações encontradas, e é com os conceitos da geometria não-euclidiana que podemos esclarecer essas questões.

Momento 1: Árvore Pitagórica

1) **Atividade:** Vamos construir a Árvore Pitagórica, assim, utilizamos régua e compasso. Vamos acompanhar sua construção com o professor. Segundo os conceitos de geometria plana, definimos um triângulo retângulo e demonstramos uma das provas do teorema de Pitágoras.

Neste Momento podemos optar por explorar a Árvore Pitagórica a partir de um triângulo escaleno ou isósceles.



Imagens: Árvore Pitagórica - Acervo da autora

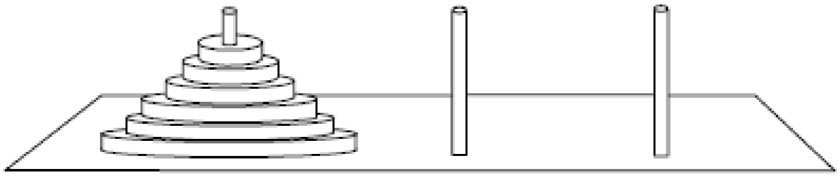
2) **Atividade:** Verifiquem a sequência de triângulos construídas nos ditos “galhos”, a partir do primeiro, e sua semelhança. Relacione os níveis de construção com uma função. Qual seria a função que expressa à quantidade de quadrados conforme aumentamos o nível, ou seja, o crescimento dos “galhos” da árvore?

Resposta: A função é expressa por $f(x) = 2^{n-1}$. Após a construção da árvore, apresentamos os conceitos de fractais - sua complexidade infinita e sua auto-similaridade.

Momento 2: Torre de Hanói

Ao utilizar a Torre de Hanói, estabelecemos um espaço em que se percebem as regras de um jogo, busca uma relação com a função exponencial e as progressões.

3) **Atividade:** Vamos conhecer as regras do jogo da Torre de Hanói e depois utilizar o jogo que está disponível. Regras: O Jogo inicia com os discos formando uma torre em um pino na extremidade esquerda. Os pinos são colocados em ordem decrescente de tamanho. Devemos transferir toda a torre para o pino da outra extremidade, de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor. O objetivo é realizar está tarefa com a menor quantidade de movimentos possíveis.



4) **Atividade:** Registrar a quantidade de passagem de discos necessárias para mover três discos, quatro e cinco discos para o último pino.

Resposta: 7, 15 e 31

5) **Atividade:** Estabelecer a relação matemática da passagem de discos.

Resposta: $f(x) = 2^{n-1}$

6) **Atividade:** Após estabelecer a relação de função, quantos movimentos mínimos serão necessários para mover seis discos?

Resposta: 63

7) **Atividade:** Estabeleça uma relação entre a função encontrada na construção da Árvore Pitagórica e Torre de Hanói. Qual é a função?

Resposta: Função Exponencial

Momento 3: Resolução de problemas que envolvem Função Exponencial, PG e Fractais.

8) **Atividade:** Inventado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, A Torre de Hanói teve uma versão que conta sobre uma lenda indiana que no tempo de Benares, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Com 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, os quais eram apoiados uns nos outras, com diâmetros diferentes, de baixo para cima, do maior para o menor. Conhecida como Torre de Brahma, ela era movimentada dia e noite pelos sacerdotes, que trocavam os discos de uma agulha para outra. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos de uma agulha para outra em um segundo, o mundo deixará de existir. Por enquanto, não acabou. Mas, qual seria o tempo necessário para o mundo acabar?

Resposta: $f(x) = 2^{64} – 1$, quase 512 bilhões de anos, já se passaram 4 bilhões.

9) **(UFPA)** Uma das práticas mais prazerosas da relação humana – o beijo – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. Supondo que o número de bactérias (**N**) por beijo (**b**) é determinado pela expressão **N (b) = 500. 2^b^** , para que o número de bactérias seja 32 000 você terá de dar:

a) 4 beijos
b) 5 beijos
c) **6 beijos**
d) 7 beijos
e) 8 beijos

10) Vamos observar a primeira sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) e a segunda (1, 3, 7, 15, 31, 63, ...), qual é a relação observada? Um dos casos expressa a relação entre uma função exponencial e a outra uma PG. Defina as duas e represente a lei de formação. Qual seria seu comentário, com base no que estudou nesta aula, sobre esta questão.

Resposta: PG (primeira – 2^n) e Função Exponencial (a segunda 2^n-1)

3.2 ROTEIRO DAS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS DO 2ºANO

PRÁTICA 3	A Magia dos Triângulos
Conteúdos	**Funções:** Função Exponencial. **Geometrias:** Geometria Plana (elementos da geometria e triângulo equilátero); Geometria Espacial (pirâmide); e Geometria não-euclidiana (Fractais - Triângulo de Sierpinski) **Tratamento da Informação:** Análise Combinatória (Binômio de Newton e Triângulo de Pascal).
Material a ser utilizado	Multimídia, régua, compasso, lápis, borracha, calculadora, cartolina com planificação do tetraedro.
Objetivos	- Construir os triângulos de Pascal e o triângulo de Sierpinski. - Estabelecer as articulações entre os triângulos de Pascal e o triângulo de Sierpinski. - Estabelecer a relação entre a sequência formada por triângulo, no fractal do triângulo de Sierpinski com a função exponencial. - Propor atividades de confecção do material didático no sentido de explorar e estabelecer relações entre teoria e prática. - Construir a árvore pitagórica retomando o Teorema de Pitágoras. - Fazer conjecturas sobre o triângulo de Pascal e os números binomiais. - Realizar por meio da investigação matemática, descobertas que contribuam com a construção do conhecimento do aluno. - Possibilitar a construção e visualização da Pirâmide de Sierpinski, na suas faces são formadas por triângulo equiláteros, que sua vez são os fractais do triângulo de Sierpinski.
Indicação	2º ano

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PRÁTICA 3: A Magia dos Triângulos

Os triângulos são apresentados às crianças desde a Educação Infantil e vem sendo explorados na matemática em todos os níveis de ensino. Vamos realizar algumas explorações matemáticas no Triângulo de Pascal e no Triângulo de Sierpinski e as possíveis relações matemáticas que se encontram entre eles. No estudo de Análise combinatória é apresentado o conceito e desenvolvimento do Binômio de Newton e muitas vezes o ensino desse conteúdo se torna apenas mecânico, sem muitas aplicações e explorações matemáticas. Neste contexto, podemos explorar os coeficientes binomiais no Triângulo de Pascal e depois fazer outra relação com um Fractal conhecido pela sua construção geométrica, o Triângulo de Sierpinski, no qual apresenta a construção inicial de um triângulo equilátero e a partir dele, determinamos o ponto médio de cada lado e construímos no seu interior um novo triângulo formado pelos pontos médio do triângulo do nível anterior. A construção de cada nível pode ser relacionada a uma função, a qual pode ter infinitos triângulos em seu interior, em cada nível eles vão se tornando menores. Existem muitas observações matemáticas a serem realizadas com a visualização do triângulo de Sierpinski, como os conceitos de função, geometria plana, área, perímetro e a relação com o triângulo de Pascal. Segue a sequência de atividades de investigação matemática para esta aula.

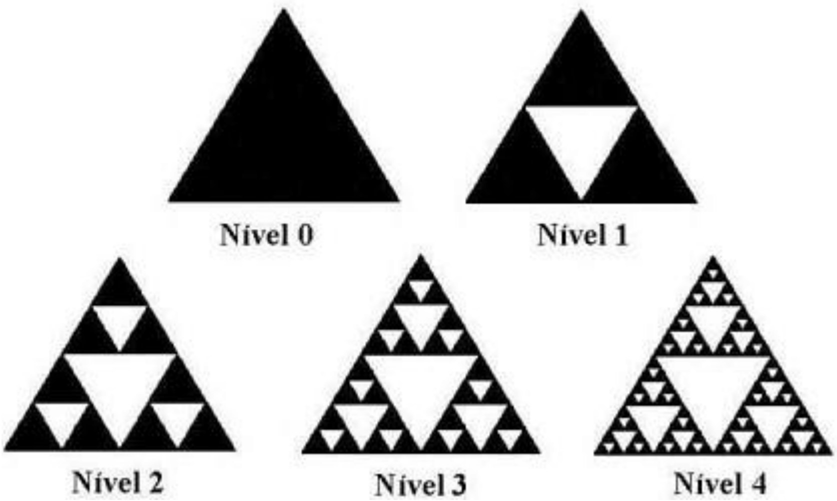
1) **Atividade:** Construir o triângulo de Pascal e explorar a sequência e posição dos números obtidos.

							1							
						1		**1**						
					1		**2**		**1**					
				1		**3**		**3**		**1**				
			1		**4**		**6**		**4**		**1**			
		1										**1**		
	1												**1**	
1														**1**

2) **Atividade:** Relacionar a construção do Triângulo de Pascal com o desenvolvimento dos cinco primeiros binômios. O que se pode conjecturar?

Resposta: Os alunos devem gerar a uma generalização semelhante a $\mathbf{(x + a)^n}$

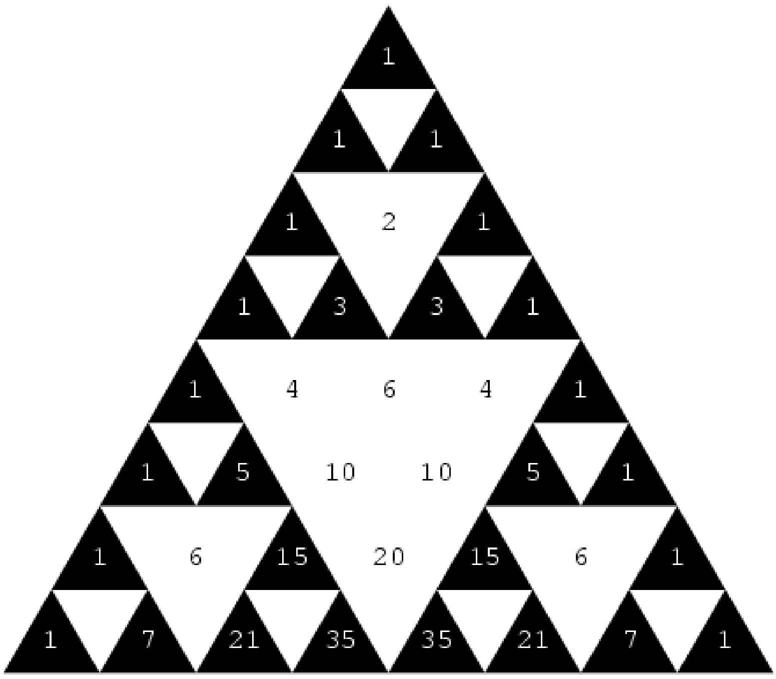
3) **Atividade:** Construa os primeiros quatro níveis do Triângulo de Sierpinski.



4) **Atividade:** Relacione a sequência de sua construção em função dos níveis e determine a função.

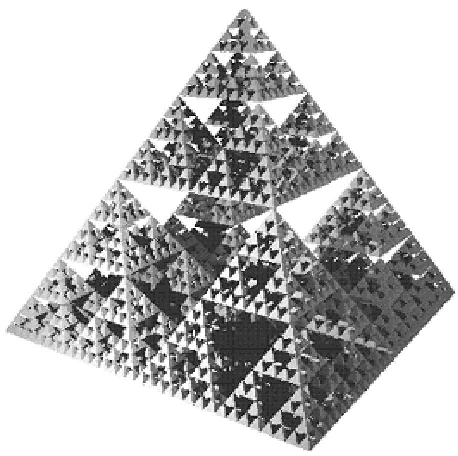
Resposta: Se espera que o aluno chegue a função exponencial $F(n) = 3^n$, consideramos o n como o nível em que está o triângulo.

5) **Atividade:** Observe a construção do Triângulo de Pascal com o Triângulo de Sierpinski, em relação aos números e quantidades de triângulos. Registre as observações do grupo.



6) **Atividade:** O desfio é em construir um tetraedro em que suas faces seguem o conceito do Triângulo de Sierpinski. Registrem as observações e relações possíveis dos conteúdos matemáticos que já estudaram.

Resposta: A imagem será da Pirâmide de Sierpinski



PRÁTICA 3	Jogo do Sistema Monetário
Conteúdos	**Tratamento da Informação:** Matemática Financeira e Estatística
Material a ser utilizado	Multimídia, computador, software Geogebra, multiplano, jogo do Sistema Monetário.
Objetivos	- Explorar por meio de jogos os conceitos de Matemática Financeira e Estatística. - Perceber a necessidade de uso da calculadora em situações problemas propostas com juros e porcentagem.
Indicação	2º ano

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PRÁTICA 4: Jogo do Sistema Monetário

Foi elaborado um jogo de tabuleiro que explora o sistema monetário brasileiro, apresentando cartas que desafiam o jogador a solucionar um problema de matemática financeira e estatística. Será utilizada a calculadora para auxiliar na resolução dos problemas que envolvem os cálculos de juros e porcentagem implícitos no jogo. Na busca de uma metodologia com jogos, a aula se dinamiza e busca instigar o aluno e envolve os participantes em conhecer os conceitos matemáticos necessários para que possam vencer o jogo. A aula proposta será desenvolvida em três momentos: 1) um início breve sobre Matemática Financeira e Estatística, juros, porcentagem e o sistema monetário brasileiro, e o material para o jogo; 2) Apresentar o jogo de tabuleiro discutindo sobre as regras do jogo e depois formando os grupos de quatro alunos para iniciar o jogo; 3) Preenchimento do roteiro de laboratório.

Momento 1: Explorando os conceitos de Matemática Financeira e Estatística

- Inicio da aula: Vídeo sobre estatística e Matemática Financeira; texto em slides sobre o conteúdo a ser explorado.
- Material para o jogo: um tabuleiro, um dado, notas de dinheirinho falso, cartas do jogo, calculadora e folha de anotações.

Momento 2: Regras do Jogo do Sistema Monetário

- O jogo é desenvolvido em um tabuleiro com mais de um participante.
- Com os pinos postos no **INICIO** do jogo, decidem quem começa a jogar os dados e vence quem der duas voltas completas no tabuleiro em sentido horário e tiver a maior quantidade em dinheiro.

- Todos devem completar as duas voltas.
- Os jogadores iniciam com R$ 50,00.
- Quando cai na casa **CARTA** deve pegar a primeira carta que está no monte ao centro do tabuleiro. Resolver o problema proposto e ganhar ou perder dinheiro.
- Segue para o próximo jogador.
- Se cair na casa **DOAÇÃO R$ 5,00**,ou **PERDEU R$ 5,00**, deve dar R$ 5,00 a todos os participantes do jogo e se cair nas casas GANHE R$ 2,00 ou GANHE R$ 8,00, todos os participantes devem entregar a quantia a este jogador.
- Existe a casa que o jogador fica uma rodada sem jogar (PARA UMA RODADA) e outra que ele deve jogar os dados mais uma vez (JOGAR + UMA VEZ).
- Quando o jogador cair nas casas PERDE 10% ou **ganhe 15%** , deve utilizar sua calculadora para determinar esse porcentagem, em relação ao dinheiro que tem em mãos e entregar ou ganhar esta quantia dos seus colegas de jogo. Lembrem que não usamos os centavos para isso o valor é sem arredondamento, por exemplo, se der o resultado na calculadora 5,25 será considerado R$ 5,00.

- Conhecendo algumas cartas do Jogo:

Você gastou 20% do seu dinheiro com combustível para o carro. Deve pagar esta quantia ao Banco.	O condomínio de seu prédio, que custava R$200,00, teve um desconto de 8% neste mês. Receba do Banco a quantia do desconto.	Você é estagiário e paga R$ 80,00 mensais na prestação de um computador, que corresponde a 10% do que ganha. Qual é o seu salário? Se acertar, ganhe do Banco R$ 10,00.	Se um carro teve um ajuste de 5% em seu valor e passou a custar R$21 mil, qual era o seu valor antes do reajuste? Caso acerte o problema, o Banco lhe pagará 0,2% desse valor.

O tabuleiro e as cartas do Sistema Monetário foram construídos pela autora no software geogebra. As imagens de ilustração foram retiradas de www.depositphotos.com/**Imagens_Gratis**, acesso em 25 novembro 2013.

Momento 3: Preenchimento do roteiro de laboratório.

- Registrar a resolução de um problema proposto nas cartas do jogo que foram retiradas por cada participante. Ou seja, são quatro jogadores, então, devem registrar a resolução de quatro situações problemas.

Enunciado	**Resolução**

3.3 ROTEIRO DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DO 3ºANO

PRÁTICA 5	A Superfície da Esfera
Conteúdos	**Grandezas e Medidas:** medidas de comprimento, medidas de área e medidas de ângulo. **Geometrias:** Geometria Plana; Geometria Espacial (Corpos redondos- Esfera, e Poliedros de Platão); Geometria não-euclidiana (superfície esférica)
Material a ser utilizado	Multimídia, esfera de isofor, poliedros de Platão em acrílico, transferidor de papel, barbante, alfinete, esfera de acrílico, bexigas e calculadoras.
Objetivos	- Explorar os conceitos da geometria esférica com bola de isopor e bexigas. - Fazer a relação de alguns conceitos de geometria plana, geometria espacial e geometria não-euclidiana na superfície esférica. - Explorar o conceito e medida de ângulo em um triângulo geodésico.
Indicação	3º ano

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PRÁTICA 5: A Superfície da Esfera

Vamos explorar os conceitos da geometria na superfície esférica, com uma proposta de ensino-aprendizagem dos conceitos envolvidos nessa geometria. A aula terá três momentos, inicia com um breve histórico sobre geometria euclidiana e geometria não-euclidiana. No segundo momento, dividimos a turma em grupos de três alunos para realizar atividades que exploram alguns conceitos geométricos na superfície esférica, situações problema sobre geodésicas, à distância entre dois pontos na superfície esférica e uma atividade prática com bexiga para explorar a soma dos ângulos internos de um triângulo na superfície curva. No terceiro momento da aula serão construídos os poliedros de Platão e realizar a tesselação na superfície esférica, utilizando bolas de isopor.

Momento 1: Explorando conceitos de Geometria Euclidiana e Geometria não-euclidiana.

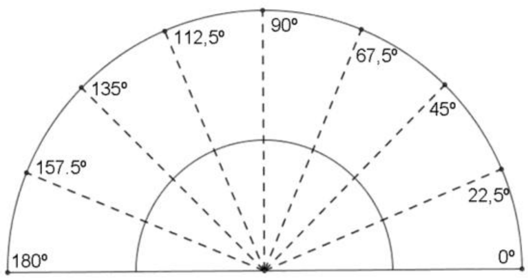
- Introdução da aula com um histórico sobre Geometrias:

A geometria criada por Euclides por volta de 300 a.C foi estudada por aproximadamente dois mil anos e não eram questionadas, até que os matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann realizarem estudos sobre outras geometrias e perceberam que os primeiros postulados de Euclides não eram válidos para certas situações. Se configuram as geometrias não-euclidianas em superfícies curvas: Geometria Hiperbólica desenvolvida por Lobachevsky e Bolyai; e Geometria Elíptica desenvolvida por Riemann. Surge a discussão do postulado das paralelas, o mais estudado e foi enunciado como: "*Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta*" (EVES, p.539, 2004). Vamos estudar a Geometria da superfície esférica, que parte dos conceitos da Geometria Elíptica. Nesta geometria, o ponto continua com o mesmo conceito da Geometria Euclidiana, mas as retas são definidas por Geodésicas, que são circunferências máximas do "plano" que é a superfície esférica.

Momento 2: Explorar a superfície esférica

1) **Atividade:** Construir as geodésicas que interceptam a linha do equador e são perpendiculares. Utilize uma bola de isopor, alfinetes e fios coloridos. Marque com um alfinete o pólo norte e com outro o pólo sul. Coloque quatro alfinetes na linha do equador e passe o fio colorido por eles. Utilize um fio de cor diferente para fazer os meridianos que irão interceptar o equador e formar a perpendicular passando pelos pólos. Agora posicione aqueles quatro alfinetes nos pontos que formam o ângulo de 90^o na linha do equador, ou seja, a perpendicular de intersecção entre as linhas coloridas. Utilize o transferidor de papel para auxiliar na posição linhas que formam o ângulo de 90^o. Podemos observar a perpendicular formada pela intersecção dos fios com os pontos antípodas e a visualização de um triângulo formado na superfície da esfera.

Transferidor de papel: Com o transferidor de 180^o, conforme a figura a seguir, faça dobras nas linhas pontilhadas para facilitar o manuseio na superfície esférica.



2) **Atividade:** Represente com um desenho os pontos e as linhas formadas pela construção das geodésicas.

Resposta e Orientação: Possíveis representações:

Imagens: Ângulos do triângulo geodésico – acervo da autora

Nesta atividade é possível visualizar um triângulo que possui dois ângulos retos, que ocorre na superfície esférica, assim temos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é maior que 180^{o}, denominado **triângulo esférico**. Esse triângulo tem lados formados por arcos geodésicos, ou seja, arcos de circunferências máximas.

3) **Atividade:** Como determinar o menor caminho entre dois pontos na superfície esférica. Será que o menor caminho entre dois pontos é uma reta? Considere a superfície da Terra, para obter o menor caminho entre dois pontos, devemos considerar os círculos máximos, portanto as geodésicas, que já são utilizadas na navegação. Depois de conhecer um pouco dos conceitos dessa geometria, vamos encher uma bexiga, marcar com uma caneta dois pontos em sua superfície, ligar os pontos formando a menor distância. Como se descreve a linha formada entre esses pontos?

Resposta e Orientação: quando realizamos uma atividade na superfície plana, o menor caminho, sem obstáculos, seria um segmento de reta. Na superfície esférica temos as linhas curvas.

4) **Atividade:** Utilizem a bexiga para desenhar um triângulo em sua superfície. Meçam com o transferidor de papel os ângulos internos do triângulo e faça a sua soma. Registrem e comentem o resultado obtido. Desenhe outros triângulos e realizem as medidas dos ângulos internos e comparem os resultados.

Resposta e Orientação: Possíveis representações de triângulos. Vamos observar que a soma dos ângulos internos do triângulo são diferentes de 180º.

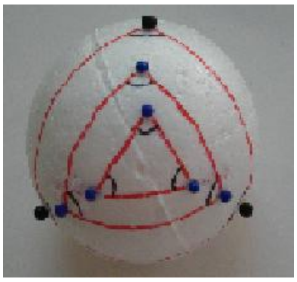


Imagem: Triângulos na superfície esférica - acervo da autora

5) **Atividade:** Vamos explorar a superfície da Terra

a) Calcule o comprimento do círculo máximo formado pela linha do Equador.

b) Qual é a distância entre capital do estado do Amapá e a cidade de Quito no Peru, com a mesma latitude 0^o, ou seja, eles estão na linha do equador, Macapá. Macapá tem longitude 51^o Oeste e Quito 78^o Oeste.

c) Considere a cidade de Florianópolis (latitude 27^o Sul) em Santa Catarina e Belém no Pará (latitude 1^o Sul), elas tem aproximadamente a mesma longitude 48^o Oeste. Calcule a distância entre elas.

d) As ilhas da Indonésia possuem várias cidades para turismo, Pontianak é uma delas e está localizada na linha do equador e sua longitude é 109^o Leste. Calcule a distância entre ela e a cidade do Macapá no Brasil, também localizado na linha do equador, mas a oeste do Meridiano de Greenwich, longitude 51^o Oeste. Considere a diferença entre as longitudes igual a 160^o.

Resposta e orientação:

Temos algumas observações em relação a esse arco, porque quanto maior for o raio (R) da circunferência, mais esse arco se aproxima de uma reta. As circunferências máximas de uma superfície esférica são as que possuem maior raio, por exemplo, a linha do equador. Se os pontos A e B estão contidos na linha do equador, ele é o arco menor da circunferência máxima que passa por AB.

Considere na figura ao lado, a circunferência máxima como o equador, e o arco AB contido nela. O ponto O é o centro da circunferência (também da esfera) e α a medida do ângulo formado pelas semi-retas OA e OB.

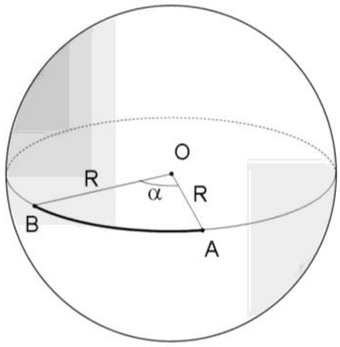


Imagem: distância entre dois pontos – acervo da autora

Lembrando que o comprimento de uma circunferência é $C = 2\pi.R$ e que a circunferência tem 360^o, tem-se que o arco AB é proporcional a α, assim, com uma regra de três simples pode-se obter o comprimento deste arco solucionando o problema da distância (D) entre dois pontos na superfície esférica.

$$\begin{array}{rcl} 360^o & \leftrightarrow & 2\pi.R \\ \alpha^o & \leftrightarrow & D\ (A;\ B) \end{array}$$

A distância entre dois pontos A e B na superfície esférica é dada por $D(A,B) = \dfrac{\alpha^o \cdot \pi \cdot R}{180^o}$.

Para calcular uma distância na superfície da Terra onde os dois pontos de localização se encontram em um mesmo paralelo, que não é o Equador, poderíamos imaginar que a menor distância seria o comprimento do arco menor desse paralelo, mas não é! A menor distância é o arco menor da circunferência máxima que passa por esses dois pontos de localização, ou seja, se estamos na superfície da Terra podemos considerar o seu raio, cujos extremos são o centro da Terra O e um ponto qualquer da superfície, e sua medida é aproximadamente 6 378 km. Como α^o, a medida do ângulo formado pelas duas semirretas com origem O e que passam pelos dois pontos de localização. Observe que não estamos considerando a altitude da localização.

Momento 3: Os Poliedros de Platão e a Tesselação

6) **Atividade:** Construir os Poliedros de Platão na superfície esférica através da tesselação. Os cinco poliedros regulares convexos – o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, são chamados de Poliedros de Platão. Vamos inicialmente observar os poliedros de Platão em acrílico. O grupo deve escolher um poliedro, conforme os desenhos anteriores, para construir, utilizar uma bola de isopor, alfinetes e barbantes.

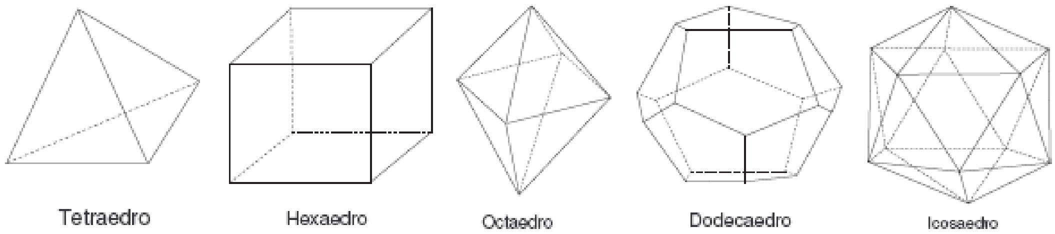


Imagem: Poliedros regulares – acervo da autora

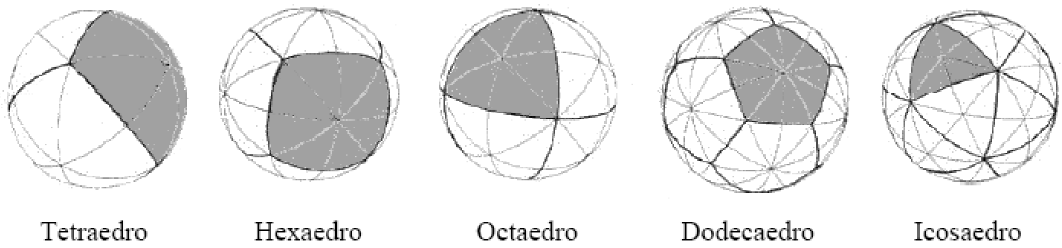


Imagem: Tesselação dos Poliedros de Platão na superfície esférica[3]

Resposta e Orientação:

Para construir um poliedro na superfície esférica, vamos utilizar fios coloridos para representar as arestas e a intersecção delas formará os vértices, assim teremos definidas as faces. Os fios formam várias geodésicas, ou seja, uma circunferência máxima, que serão as arestas, onde o encontro delas forma o vértice do poliedro, que pode ser indicado com alfinetes.

Imagem: Tesselação do Octaedro - acervo da autora

O que é tesselar? Para Marqueze "Tesselar uma superfície Plana significa cobrir a superfície com figuras planas, de modo que não existiam espaços entre elas e nem sobreposições" (p.72, 2006). A diferença para tesselar na superfície esférica é que as figuras são esféricas.

Para realizar esta atividade é retomado o conceito de poliedro. Por definição um poliedro é convexo se o seu interior é convexo, onde "Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos" (LIMA, 1998, p. 233).

[3] Fonte: Figura 32 extraída de MARQUEZE, 2006.

Referências:

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: GOMIDE. E.F. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

KALEFF, A. M. M. R. **Do fazer concreto ao desenho em geometria.** In: LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** 3 ed. Campinas, SP: Autores associados, 2012.

KRULIK, S.; REYS, R.E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. v. 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

MARQUEZE, J.P. **AS FACES DOS SÓLIDOS PLATÔNICOS NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA**: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIA ESFÉRICA. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – PUC/SP, São Paulo, 2006.

LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores associados, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretriz Curricular de Matemática para a Educação Básica do estado do Paraná**. Curitiba: SEED, 2009.

PASSOS, C. L. B. **Materiais didáticos na formação de professores de matemática.**

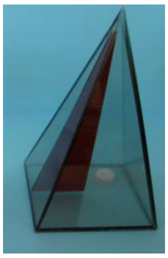
POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

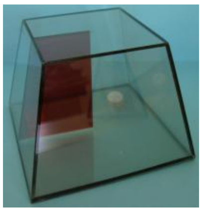
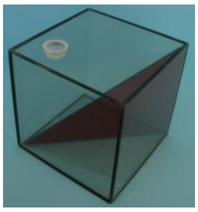
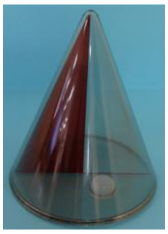
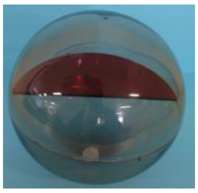
PATAKI, I. **GEOMETRIA ESFÉRICA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES:** UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, São Paulo, 2003.

RÊGO, R. M. & RÊGO, R.G. **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática.** In: LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** 3 ed. Campinas, SP: Autores associados, 2012.

ANEXO 1 – SÓLIDOS EM ACRÍLICO

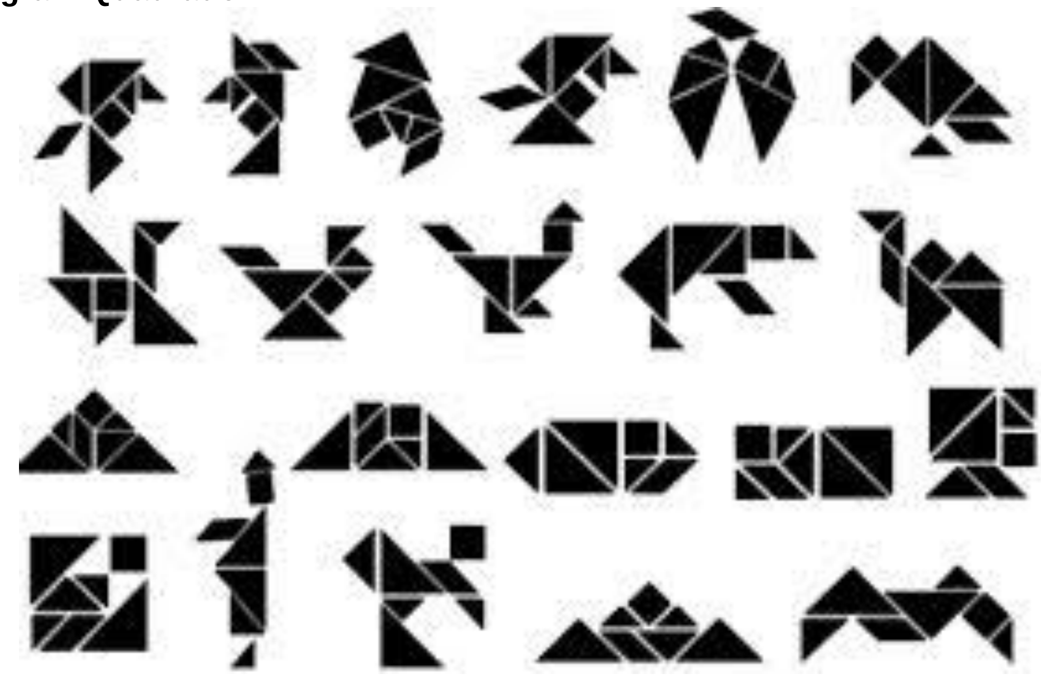
Os sólidos geométricos, confeccionados em acrílico, possibilitam identificar as formas espaciais, suas características e semelhanças, realizar medidas e sistematizar modelos de área e volume. Esses sólidos possuem um orifício com tampa em sua superfície, que possibilita verificar a medida de volume interno realizando um experimento com copo graduado e água. Em 2009, todas as escolas estaduais receberam este material, assim, com a possibilidade de explorar os conceitos de geometrias e grandezas e medidas segue especificado cada um dos sólidos geométricos.

Prisma Triangular Reto  Base quadrada de 10 cm de lado, altura 17 cm	**Prisma Quadrangular Reto “Paralelepípedo”**  Base quadrada de 9 cm de lado, altura 17 cm.	**Prisma Quadrangular Oblíquo**  Base quadrada de 8,5 cm de lado, altura 16,4 cm.
Prisma Reto de Base Trapezoidal  Base trapezoidal de lado maior 11,9 cm/lado menor 7,3 cm/altura 9 cm, altura 17 cm.	**Prisma Reto de Base Hexagonal**  Base hexagonal de 6 cm de lado, altura 17,5 cm.	**Pirâmide de Base Triangular**  Base triangular 9,4 cm de lado, altura 16,5 cm.
Pirâmide Reta de Base Quadrada  Base quadrada de 9,4 cm de lado, altura 17,4 cm.	**Pirâmide Oblíqua de Base Quadrada**  Base quadrada de 10,4 cm de lado, altura 15,5 cm	**Pirâmide Reta de Base Hexagonal**  Base hexagonal de 6 cm de lado, altura 17,5 cm.

Tronco de Pirâmide Quadrada  Base quadrada (quadrado maior de 13,5 cm/quadrado menor 9 cm), altura 9,7 cm.	**Tetraedro**  Arestas medindo 16 cm.	**Cubo**  Arestas medindo 10 cm
Octaedro  Arestas medindo 11,8 cm.	**Dodecaedro**  Arestas medindo 6 cm.	**Icosaedro**  Arestas medindo 9 cm.
Cilindro Reto  Diâmetro da base 11 cm, altura 11 cm.	**Cilindro Oblíquo**  Diâmetro da base 11 cm, altura 15,6 cm.	**Cone**  Base quadrada de 8,5 cm de lado, altura 16,4 cm
Tronco de Cone  Diâmetro da base maior 15,5 cm , diâmetro da base menor 10cm e 8,8 cm altura.	**Esfera**  Diâmetro 15 cm	

ANEXO 2 – Algumas figuras do Tangram

- **Tangram Quadrado:**

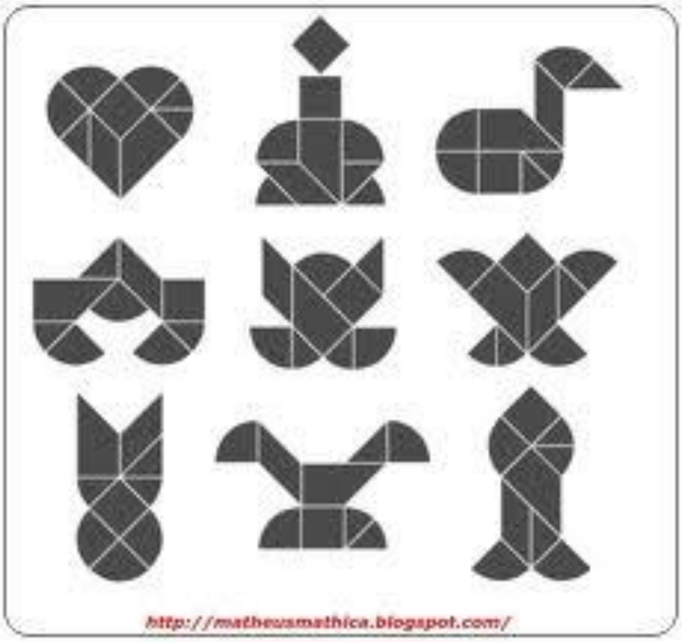


Disponível em: https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRK-dslOWH6z9nNJp9aWS2v4qbkjcYs9A0liy9tisG5i7dS0YjqnA

- **Tangram Oval:**

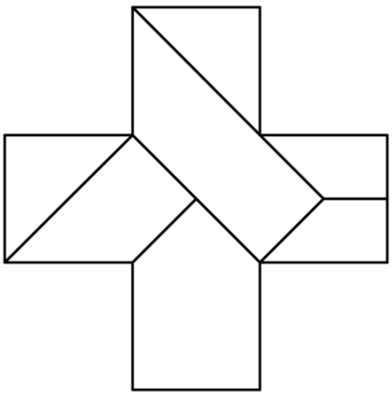
Disponível em: https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRK-dslOWH6z9nNJp9aWS2v4qbkjcYs9A0liy9tisG5i7dS0YjqnA

- **Tangram Coração:**



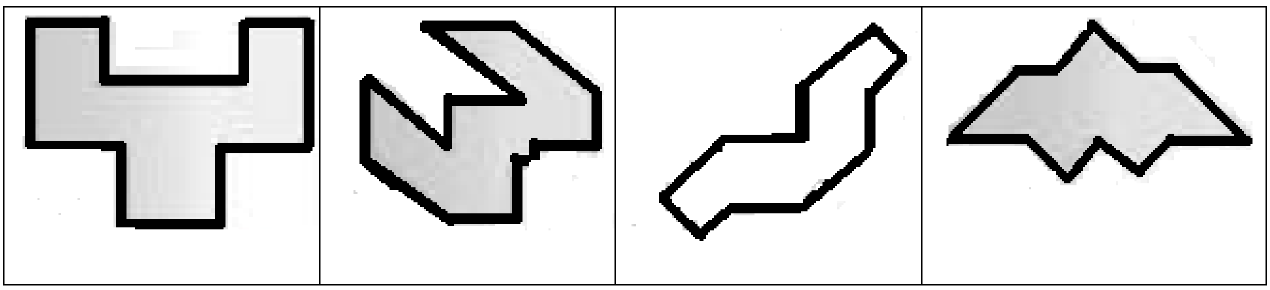
Disponível em: https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRTaFyQIQ44trypmJwABQiZXj2fhWIIAQGYcJN7y9qH6a-rkTFR

- **Tangram Pitagórico:**



Fonte: imagem construída pela autora

- **Tangram de Flecher**



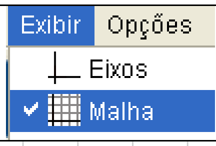
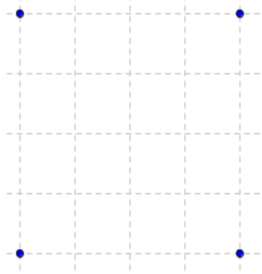
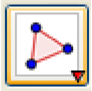
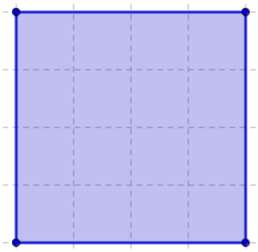
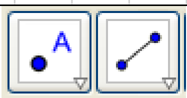
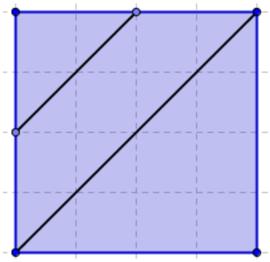
Fonte: imagem construída pela autora

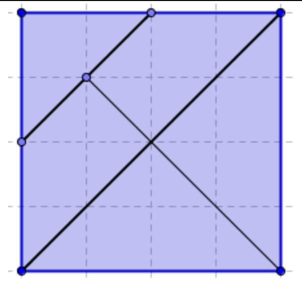
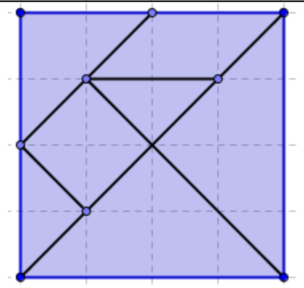
ANEXO 3 – Roteiro das aulas

COLÉGIO ESTADUAL DO PARANÁ - Ensino Fundamental, Médio e Profissional Aluno (a)..Nº........ Série: 1º Turma: .... Aluno (a)..Nº........ Data:........../......./ 2013 Professor (a)	
Aula de Laboratório de Ensino da Matemática - (Valor: 1,0)	**Nota:**

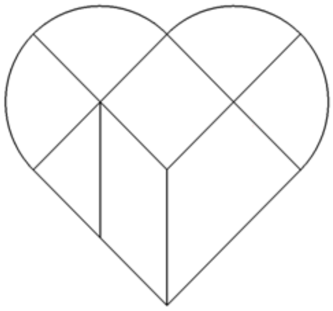
Construção de Tangram

1) A construção do Tangram Quadrado no Geogebra é realizada com a orientação do professor e do roteiro de aula.

Construção do Tangram Quadrado	
No Geogebra, selecione a malha quadriculada	
Insira quatro pontos na malha, formando um quadrado, conforme a figura ao lado.	
Selecione polígono.	
Clique em todos os pontos para formar o quadrado.	
Definir os pontos médios do lado superior e do lado esquerdo com a ferramenta ponto. Depois vamos unir esses dois pontos com a ferramenta segmento.	
Com a ferramenta segmento trace uma diagonal do quadrado.	

Insira um ponto médio no primeiro segmento criado e uma com o vértice oposto.	
A primeira diagonal traçada foi dividida em duas partes, agora determine o ponto médio dos dois segmentos formados. Veja a imagem ao lado e insira os dois últimos segmentos para finalizar nosso Tangram Quadrado com sete peças.	

2) Construção do Tangram Coração no Geogebra indicando passo a passo a construção geométrica que a dupla realizou.



3) A dupla irá construir o Tangram Pitagórico com régua e compasso no EVA. Após a construção devem recortar e montar a imagem que representa a prova do Teorema de Pitágoras. Registrar, a seguir as medidas encontradas e verificar se é válido o teorema.

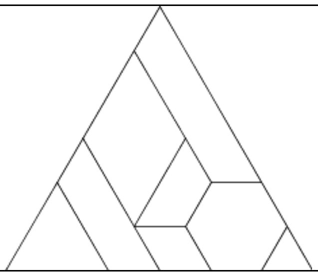
4) Utilizar o Tangram que ficará disponibilizado na mesa para a dupla e formar algumas figuras com suas peças. Indique o nome do Tangram usado e registrem uma imagem formada.

5) Utilizar o Tangram Quadrado como quebra-cabeça e desenhe as seguintes formas:

a) Como formar um quadrado usando 2 peças?	b) Como formar um quadrado usando 3 peças?

c) Como formar um quadrado usando 4 peças?	d) Como formar um quadrado usando 5 peças?
e) Como formar um paralelogramo usando 2 peças?	f) Como formar um paralelogramo usando 5 peças?
g) Como formar um retângulo usando 4 peças?	h) Como formar um retângulo usando todas as peças?
i) Como formar um triângulo usando todas as peças?	j) Como formar um hexágono usando todas as peças?

6) Utilizar como material didático o multiplano para construir o Tangram Triangular. Acompanhem as seguintes as orientações:

• No multiplano, marque três pontos e defina um triângulo equilátero com elástico. • Realize as subdivisões internas no triângulo, as quais definem as peças.	
• Registrar as medidas dos lados de cada peça e o nome do polígono formado.	
• Determinar a área de cada peça. • Determinar a área do triângulo maior e comparar com a soma obtida das peças.	
• Registrar as medidas de ângulos encontradas nas peças. Utilize o transferidor.	

7) A dupla deve registrar seus comentários, expressando sua opinião sobre as a realização das atividades anteriores, refletindo sobre os materiais utilizados e os conteúdos que exploraram na aula.

____
____
____
____

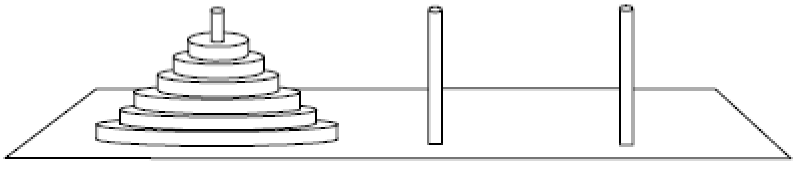
	COLÉGIO ESTADUAL DO PARANÁ - Ensino Fundamental, Médio e Profissional Aluno (a)..Nº........ Série: 1º Turma: .... Aluno (a)..Nº........ Data:........../......./ 2013 Professor (a)	
Aula de Laboratório de Ensino da Matemática - (Valor: 1,0)		**Nota:**

Árvore Pitagórica e a Torre de Hanói

1) Vamos construir a Árvore Pitagórica, assim, utilizamos régua e compasso. Vamos acompanhar sua construção com o professor. Segundo os conceitos de geometria plana, definimos um triângulo retângulo e demonstramos uma das provas do teorema de Pitágoras.

2) Verifiquem a sequência de triângulos construídas nos ditos “galhos”, a partir do primeiro, e sua semelhança. Relacione os níveis de construção com uma função. Qual seria a função que expressa à quantidade de quadrados conforme aumentamos o nível, ou seja, o crescimento dos “galhos” da árvore?

3) Vamos conhecer as regras do jogo da Torre de Hanói e depois utilizar o jogo que está disponível. Regras: O Jogo inicia com os discos formando uma torre em um pino na extremidade esquerda. Os pinos são colocados em ordem decrescente de tamanho. Devemos transferir toda a torre para o pino da outra extremidade, de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor. O objetivo é realizar está tarefa com a menor quantidade de movimentos possíveis.



4) Registrar a quantidade de passagem de discos necessárias para mover três discos, quatro e cinco discos para o último pino.

5) Estabelecer a relação matemática da passagem de discos.

6) Após estabelecer a relação de função, quantos movimentos mínimos serão necessários para mover seis discos?

7) Estabeleça uma relação entre a função encontrada na construção da Árvore Pitagórica e Torre de Hanói. Qual é a função?

8) Inventado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, A Torre de Hanói teve uma versão que conta sobre uma lenda indiana que no tempo de Benares, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e da grossura do corpo de uma abelha. Com 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, os quais eram apoiados uns nos outras, com diâmetros diferentes, de baixo para cima, do maior para o menor. Conhecida como Torre de Brahma, ela era movimentada dia e noite pelos sacerdotes, que trocavam os discos de uma agulha para outra. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos de uma agulha para outra em um segundo, o mundo deixará de existir. Por enquanto, não acabou. Mas, qual seria o tempo necessário para o mundo acabar?

9) **(UFPA)** Uma das práticas mais prazerosas da relação humana – o beijo – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. Supondo que o número de bactérias (**N**) por beijo (**b**) é determinado pela expressão **N (b) = 500. 2**$^{\mathbf{b}}$, para que o número de bactérias seja 32 000 você terá de dar:

a) 4 beijos
b) 5 beijos
c) 6 beijos
d) 7 beijos
e) 8 beijos

10) Vamos observar a primeira sequência (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) e a segunda (1, 3, 7, 15, 31, 63, ...), qual é a relação observada? Um dos casos expressa a relação entre uma função exponencial e a outra uma PG. Defina as duas e represente a lei de formação. Qual seria seu comentário, com base no que estudou nesta aula, sobre esta questão.

COLÉGIO ESTADUAL DO PARANÁ - Ensino Fundamental, Médio e Profissional

Aluno (a)..Nº........ Série: 2º Turma: ....

Aluno (a)..Nº........

Data:........../......./ 2013 Professor (a) ....

Aula de Laboratório de Ensino da Matemática - (Valor: 1,0)	**Nota:**

A Magia dos Triângulos

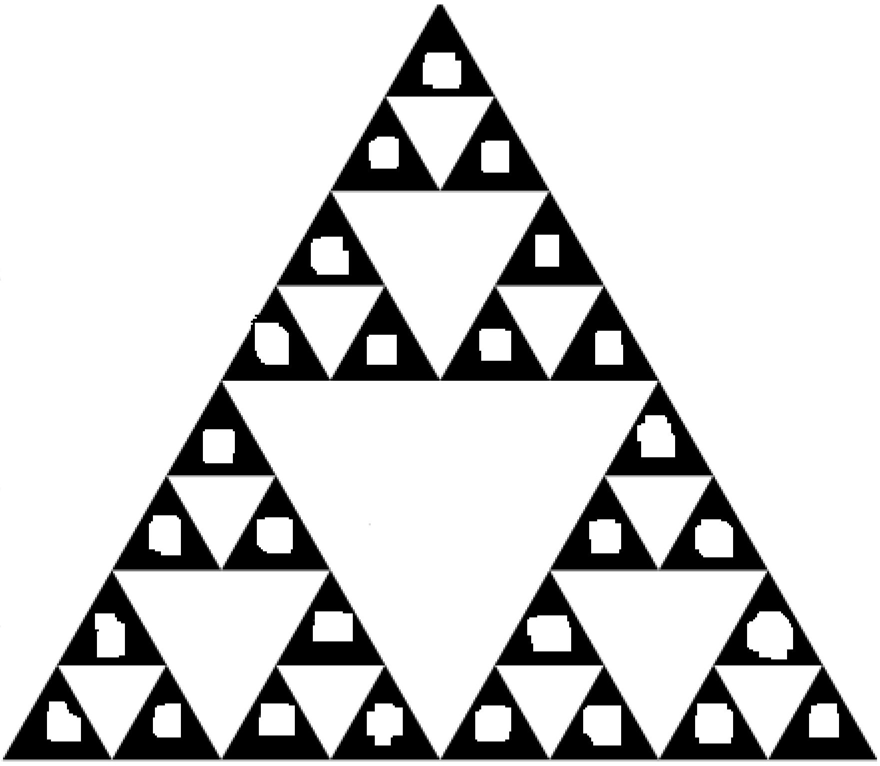
1) Construir o triângulo de Pascal e explorar a sequência e posição dos números obtidos.

2) Relacionar a construção do Triângulo de Pascal com o desenvolvimento dos cinco primeiros binômios. O que se pode conjecturar?

3) Construa os primeiros quatro níveis do Triângulo de Sierpinski.

4) Relacione a sequência de sua construção em função dos níveis e determine a função.

5) Observe a construção do Triângulo de Pascal com o Triângulo de Sierpinski, em relação aos números e quantidades de triângulos. Registre as observações do grupo.



6) O desfio é em construir um tetraedro em que suas faces seguem o conceito do Triângulo de Sierpinski. Registrem as observações e relações possíveis dos conteúdos matemáticos que já estudaram.

COLÉGIO ESTADUAL DO PARANÁ - Ensino Fundamental, Médio e Profissional

Aluno (a)..Nº........ Série: 2º Turma: ....

Aluno (a)..Nº........

Aluno (a)..Nº........

Aluno (a)..Nº........

Data:........../......./ 2013 Professor (a) ....

Aula de Laboratório de Ensino da Matemática - (Valor: 1,0)	**Nota:**

O jogo do Sistema Monetário

- Inicio da aula: Vídeo sobre estatística e Matemática Financeira; texto em slides sobre o conteúdo a ser explorado.
- Material para o jogo: um tabuleiro, um dado, notas de dinheirinho falso, cartas do jogo, calculadora e folha de anotações.

Regras do Jogo do Sistema Monetário

- O jogo é desenvolvido em um tabuleiro com mais de um participante.
- Com os pinos postos no **INICIO** do jogo, decidem quem começa a jogar os dados e vence quem der duas voltas completas no tabuleiro em sentido horário e tiver a maior quantidade em dinheiro.
- Todos devem completar as duas voltas.
- Os jogadores iniciam com R$ 50,00.
- Quando cai na casa **CARTA** deve pegar a primeira carta que está no monte ao centro do tabuleiro. Resolver o problema proposto e ganhar ou perder dinheiro.
- Segue para o próximo jogador.
- Se cair na casa **DOAÇÃO R$ 5,00**,ou **PERDEU R$ 5,00**, deve dar R$ 5,00 a todos os participantes do jogo e se cair nas casas GANHE R$ 2,00 ou GANHE R$ 8,00, todos os participantes devem entregar a quantia a este jogador.
- Existe a casa que o jogador fica uma rodada sem jogar (PARA UMA RODADA) e outra que ele deve jogar os dados mais uma vez (JOGAR + UMA VEZ).
- Quando o jogador cair nas casas PERDE 10% ou **ganhe 15%** , deve utilizar sua calculadora para determinar esse porcentagem, em relação ao dinheiro que tem em mãos e entregar ou ganhar esta quantia dos seus colegas de jogo. Lembrem que não usamos os centavos para isso o valor é sem arredondamento, por exemplo, se der o resultado na calculadora 5,25 será considerado R$ 5,00.

- Registrar a resolução de um problema proposto nas cartas do jogo que foram retiradas por cada participante. Ou seja, são quatro jogadores, então, devem registrar a resolução de quatro situações problemas.

Enunciado	**Resolução**

COLÉGIO ESTADUAL DO PARANÁ - Ensino Fundamental, Médio e Profissional Aluno (a)...Nº........ Série: 3º Turma: .... Aluno (a)...Nº........ Data:........../......./ 2013 Professor (a)	
Aula de Laboratório de Ensino da Matemática - (Valor: 1,0)	**Nota:**

A Superfície da Esfera

1) Construir as geodésicas que interceptam a linha do equador e são perpendiculares. Utilize uma bola de isopor, alfinetes e fios coloridos. Marque com um alfinete o pólo norte e com outro o pólo sul. Coloque quatro alfinetes na linha do equador e passe o fio colorido por eles. Utilize um fio de cor diferente para fazer os meridianos que irão interceptar o equador e formar a perpendicular passando pelos pólos. Agora posicione aqueles quatro alfinetes nos pontos que formam o ângulo de 90^o na linha do equador, ou seja, a perpendicular de intersecção entre as linhas coloridas. Utilize o transferidor de papel para auxiliar na posição linhas que formam o ângulo de 90^o. Podemos observar a perpendicular formada pela intersecção dos fios com os pontos antípodas e a visualização de um triângulo formado na superfície da esfera.

2) Represente com um desenho os pontos e as linhas formadas pela construção das geodésicas.

3) Como determinar o menor caminho entre dois pontos na superfície esférica. Será que o menor caminho entre dois pontos é uma reta? Considere a superfície da Terra, para obter o menor caminho entre dois pontos, devemos considerar o os círculos máximos, portanto as geodésicas, que já são utilizadas na navegação. Depois de conhecer um pouco dos conceitos dessa geometria, vamos encher uma bexiga, marcar com uma caneta dois pontos em sua superfície, ligar os pontos formando a menor distância. Como se descreve a linha formada entre esses pontos?

4) Utilizem a bexiga para desenhar um triângulo em sua superfície. Meçam com o transferidor de papel os ângulos internos do triângulo e faça a sua soma. Registrem e comentem o resultado obtido. Desenhe outros triângulos e realizem as medidas dos ângulos internos e comparem os resultados.

5) Vamos explorar a superfície da Terra:

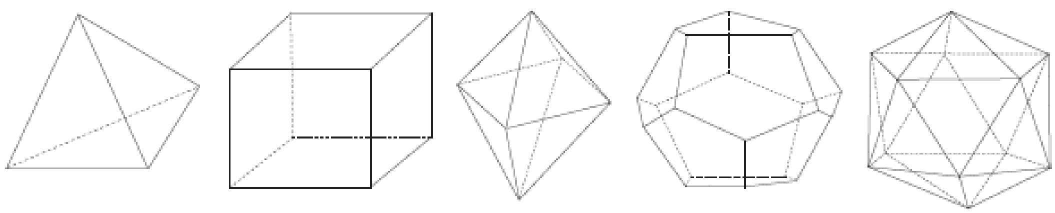
a) Calcule o comprimento do círculo máximo formado pela linha do Equador.

b) Qual é a distância entre capital do estado do Amapá e a cidade de Quito no Peru, com a mesma latitude 0^o, ou seja, eles estão na linha do equador, Macapá. Macapá tem longitude 51^o Oeste e Quito 78^o Oeste.

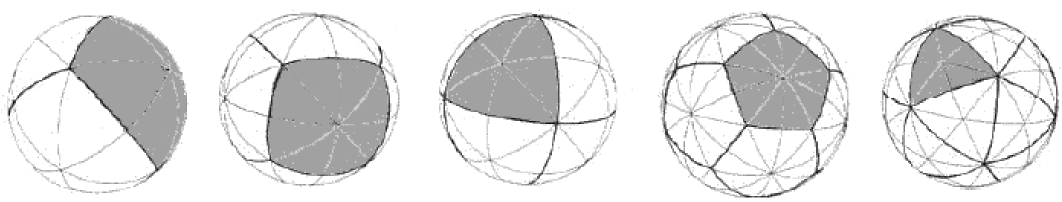
c) Considere a cidade de Florianópolis (latitude 27^o Sul) em Santa Catarina e Belém no Pará (latitude 1^o Sul), elas tem aproximadamente a mesma longitude 48^oOeste. Calcule a distância entre elas.

d) As ilhas da Indonésia possuem várias cidades para turismo, Pontianak é uma delas e está localizada na linha do equador e sua longitude é 109^o Leste. Calcule a distância entre ela e a cidade do Macapá no Brasil, também localizado na linha do equador, mas a oeste do Meridiano de Greenwich, longitude 51^o Oeste. Considere a diferença entre as longitudes igual a 160^o.

6) Construir os Poliedros de Platão na superfície esférica através da tesselação. Os cinco poliedros regulares convexos – o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, são chamados de Poliedros de Platão. Vamos inicialmente observar os poliedros de Platão em acrílico. O grupo deve escolher um poliedro, conforme os desenhos anteriores, para construir, utilizar uma bola de isopor, alfinetes e barbantes.



Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro



Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro