Versão Online ISBN 978-85-8015-079-7
Cadernos PDE

VOLUME II

OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE

Produções Didático-Pedagógicas

2014

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Educação

Ficha para identificação da Produção Didático-Pedagógica – Turma 2014

Título: Ensino e Aprendizagem de Progressão Geométrica através da Resolução de Problemas	
Autor: Josiane Aparecida Busquim Mota	
Disciplina/Área:	Matemática/Matemática
Escola de Implementação do Projeto e sua localização:	Colégio Estadual Professora Adélia Dionísia Barbosa.
Município da escola:	Londrina
Núcleo Regional de Educação:	Londrina
Professor Orientador:	Edilaine Regina dos Santos
Instituição de Ensino Superior:	Universidade Estadual de Londrina - UEL
Relação Interdisciplinar:	Não há.
Resumo:	Nesta produção, é apresentada uma proposta de trabalho contemplando uma das Tendências Metodológicas em Educação Matemática. O objetivo geral dessa proposta é o de oportunizar aos alunos, através da Resolução de Problemas, a compreensão do conteúdo Sequências Numéricas e Progressões Geométricas associada à noção de função. O público alvo para o desenvolvimento dessa proposta será alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Com o desenvolvimento dessa proposta também se pretende incentivar o trabalho coletivo entre os alunos, a troca de informações, de modo que compartilhando informações possam chegar a resolução para os problemas propostos. Por meio desse trabalho com a

	Resolução de Problemas, espera-se que as aulas de matemática se tornem mais dinâmicas e que o conhecimento sobre o conteúdo possa ser construído pelo aluno e mediado pelo professor, tendo em vista uma aprendizagem de matemática com compreensão.
Palavras-chave:	Tendências Metodológicas; Resolução de Problemas; Progressão Geométrica.
Formato do Material Didático:	Unidade Didática
Público:	Alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio.

APRESENTAÇÃO

De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p.75)

> As progressões aritméticas e geométricas podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma..., calcule o quinto termo,...")

Desse pressuposto, apresenta-se nessa Produção Didático-Pedagógica uma Unidade Didática visando o trabalho do conteúdo Sequências Numéricas e Progressão Geométrica associada à noção de função através da Resolução de Problemas, a qual se apresenta como uma estratégia de ensino para as aulas de matemática, tornando-as mais dinâmicas, onde o conhecimento será construído pelo aluno e mediado pelo professor, tendo em vista a construção de uma matemática com compreensão e significado.

Objetiva-se com isso, que alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Professora Adélia Dionísia Barbosa tenham oportunidade de, através da Resolução de Problemas, compreender o conteúdo Sequências Numéricas e Progressões Geométricas associada à noção de função. Além disso, que tenham a oportunidade de trabalhar coletivamente, compartilhar informações, discutir resoluções para um problema proposto.

ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS

Para a implementação desta Produção Didático-pedagógica em sala de aula pelo professor, sugere-se que o trabalho ocorra segundo a perspectiva de Resolução de Problemas descrita pelas autoras Allevato e Onuchic (2009,p.7-8), tendo em vista nove etapas:

> 1. Preparação do problema – Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador [...]
> 2. Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
> 3. Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos [...]
> 4. Resolução do problema – De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo [...]
> 5. Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo [...]
> 6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
> 7. Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas [...]
> 8. Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
> 9. Formalização do conteúdo – Nesse momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

A seguir, são apresentados os problemas que serão utilizados no desenvolvimento desse trabalho, possíveis resoluções para cada um deles, sugestão de encaminhamentos e formalização do conteúdo proposto.

Problema 1

O crescimento de uma colônia de bactérias é muito rápido. Um biólogo ao fazer uma experiência colocou 50 bactérias em um meio propício ao seu desenvolvimento, e observou que a cada hora o número de bactérias triplicava.

a) Qual era o número de bactérias:
   - 1 hora depois?
   - 2 horas depois?
   - 3 horas depois?
   - 5 horas depois?
   - 10 horas depois?

b) Descreva matematicamente, por meio de uma expressão algébrica, a relação entre o número de bactérias e o tempo.

c) Represente graficamente, para as três primeiras horas, a relação entre o número de bactérias e o tempo.

<u>Objetivos</u>:

- Identificar a relação de dependência entre as variáveis envolvidas no problema.
- Definir função do tipo exponencial.
- Construir o gráfico da função do tipo exponencial no plano cartesiano.

<u>Possíveis resoluções</u>

<u>Item a</u>

➢ 1ª possibilidade: Calcular mentalmente ou com o auxílio da calculadora, e apresentar as respostas:
   - 1 hora depois? 150 bactérias
   - 2 horas depois? 450 bactérias

- 3 horas depois? 1350 bactérias
- 5 horas depois? 12150 bactérias
- 10 horas depois? 2.952.450 bactérias

➢ 2ª possibilidade: Multiplicar a quantidade inicial de bactérias por 3, e, em seguida, multiplicar a quantidade de bactérias obtidas a cada hora anterior por 3:

- 1 hora depois? 50x3= 150
- 2 horas depois? 150x3= 450
- 3 horas depois? 450x3= 1350
- 4 horas depois? 1350x3= 4050
- 5 horas depois? 4050x3= 12150
- 6 horas depois? 12150x3= 36450
- 7 horas depois? 36450x3= 109350
- 8 horas depois? 109350x3= 328050
- 9 horas depois? 328050x3= 984150
- 10 horas depois? 984150x3= 2.952.450

➢ 3ª possibilidade: Multiplicar a quantidade inicial de bactérias por 3, e, e, seguida, multiplicar a quantidade de bactérias a cada hora anterior, ainda escrita na forma de multiplicação, novamente por 3:

- 1 hora depois? 50x3= 150
- 2 horas depois? 50x3x3= 450
- 3 horas depois? 50x3x3x3= 1350
- 4 horas depois? 50x3x3x3x3=4050
- 5 horas depois? 50x3x3x3x3x3= 12150
- 6 horas depois? 50x3x3x3x3x3x3=36450
- 7 horas depois? 50x3x3x3x3x3x3x3=109350
- 8 horas depois? 50x3x3x3x3x3x3x3x3=328050
- 9 horas depois? 50x3x3x3x3x3x3x3x3x3=984150
- 10 horas depois? 50x3x3x3x3x3x3x3x3x3x3=2.952.450

- 4ª possibilidade: Multiplicar, a cada hora, a quantidade inicial de bactérias por potência de base 3, em que o expoente se refere ao número de horas transcorridas.
  - 1 hora depois? $50x3^1= 50x3=150$
  - 2 horas depois? $50x3^2= 50x9= 450$
  - 3 horas depois? $50x3^3=50x27=1350$
  - 5 horas depois?$50x3^5= 50x243= 12150$
  - 10 horas depois? $50x3^{10}=50x\ 59049\ =2.952.450$

Item b

- 1ª possibilidade

  n(t): número de bactérias

  t: tempo

  expressão algébrica: $n(t) = 50x3^t$

- 2ª possibilidade:

  Poderá ocorrer nesse item, uma resposta errada, que pode ser justificada como possível devido à dificuldade encontrada por alguns alunos em trabalharem com expoentes.

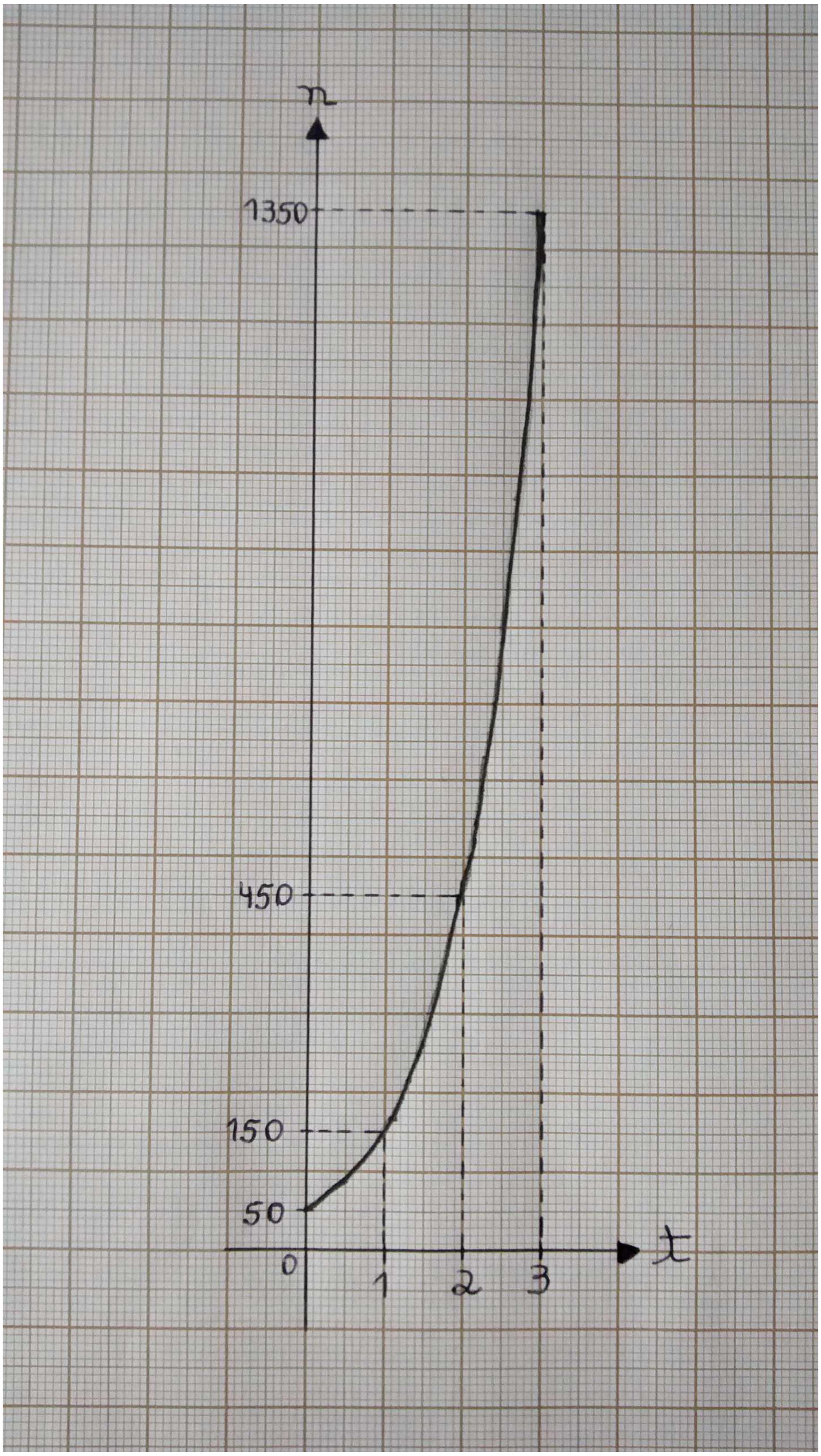
  n (t): número de bactérias

  t: tempo

  expressão algébrica: n (t) = 50x3t

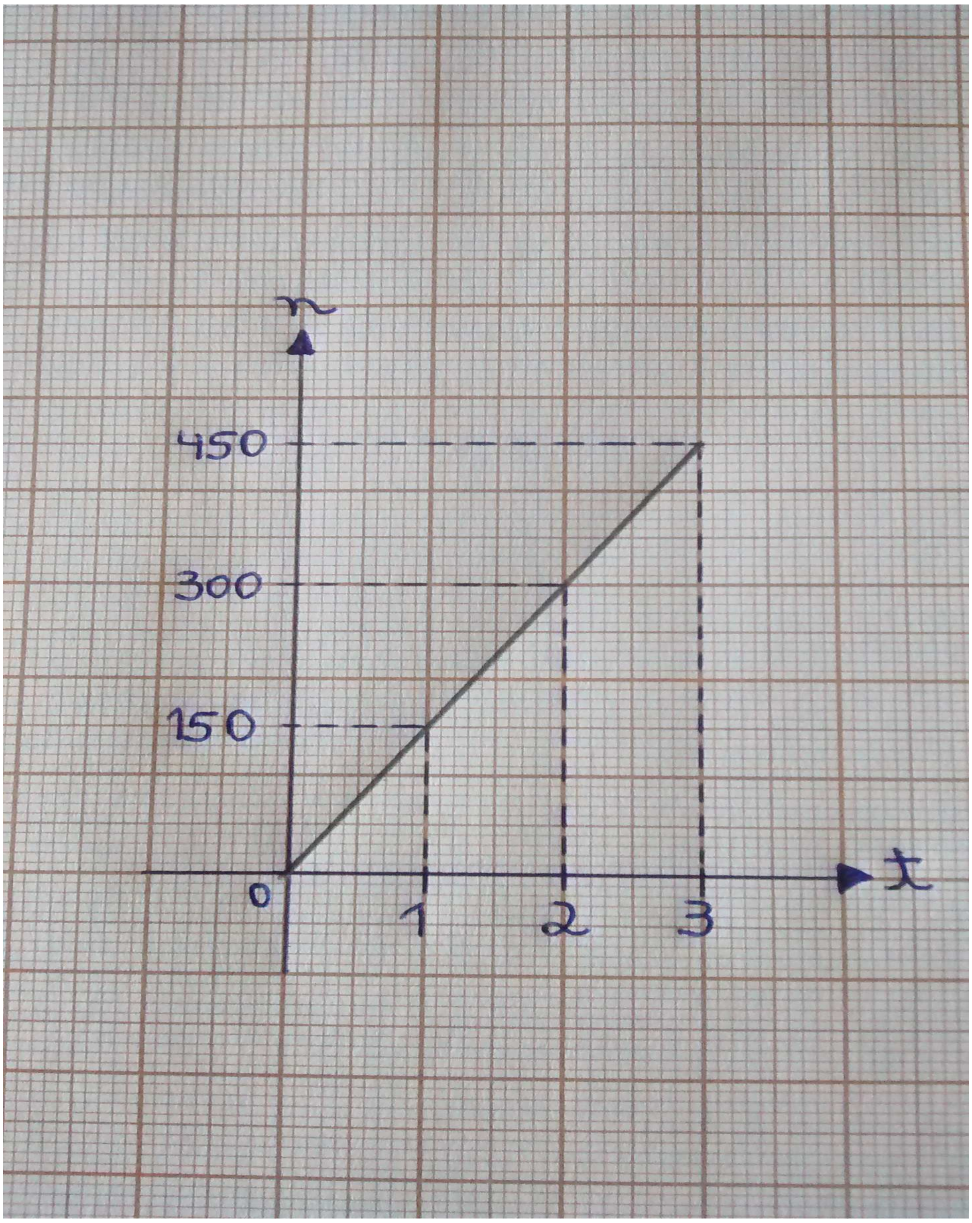
Item c

- 1ª possibilidade: considerando $n(t) = 50x3^t$



Fonte: Josiane Aparecida Busquim Mota

➢ 2ª possibilidade: considerando n(t) = 50x3t



Fonte: Josiane Aparecida Busquim Mota

<u>PROPOSTA DE FORMALIZAÇÃO</u>

Tendo em vista a resolução do item a, o professor pode sugerir que os alunos organizem as informações em um quadro, como o que segue:

Tempo (t)	Número de bactérias (n)
0	$50 = 50x1 = 50x3^0$
1	$150 = 50x3 = 50x3^1$
2	$450 = 50x9 = 50x3^2$
3	$1350 = 50x27 = 50x3^3$
4	$4050 = 50x81 = 50x3^4$
5	$12150 = 50x243 = 50x3^5$

A partir disso, o professor pode questionar seus alunos:

- no momento inicial, qual era a quantidade de bactérias?
- o que está acontecendo com a quantidade de bactérias a cada hora que passa?
- é possível determinar o número de bactérias para uma quantidade qualquer t de horas?

Com base nisso, tem-se a expectativa de que os alunos obtenham a expressão solicitada no item b: $n(t) = 50x3^t$.

Nesse momento, pode ser discutida a possível resolução errada (2ª possibilidade do item b), caso seja apresentada pelos alunos. O professor pode questionar seus alunos:

- existe alguma diferença entre as expressões $n(t)= 50x3^t$ e $n(t)= 50x3t$?
- em caso afirmativo, qual?
- o que é um expoente?
- o que é um número elevado a outro representa? Como ele é calculado?

Espera-se que os alunos observem a diferença existente entre um número elevado a outro e um número multiplicado por outro. Quando há um número elevado a outro, tem-se uma multiplicação de fatores iguais em que o expoente indica a quantidade de fatores da multiplicação; quando há uma multiplicação de um número por outro, tem-se uma adição de parcelas iguais.

O professor também pode, na sequência, pedir aos alunos que observem o fato de que a cada hora está associada uma única quantidade de bactérias, destacando que essa relação de dependência existente entre as variáveis envolvidas nesse problema, tempo e quantidade de bactérias, é uma função.

A partir disso, e com base na lei de formação já apresentada e discutida, o professor pode conversar com seus alunos quanto ao tipo de função que está envolvida nessa situação, relacionando-a com uma função do tipo exponencial: “Dizemos que uma função $g: R \to R$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in R$, onde a e b são constantes positivas” (LIMA, 1998, p.184).

Espera-se que os alunos observem que essa função tem como expoente uma variável. Depois da formalização a respeito de função do tipo exponencial, é preciso que o professor discuta com os alunos que nesse caso do problema há uma restrição no domínio da função, devido ao fato de a variável independente ser o tempo. O professor também pode destacar que nesse caso o conjunto imagem não coincide com o contradomínio da função, já que a variável dependente diz respeito ao número de bactérias.

Em seguida, a partir da resolução apresentada no item c, o professor pode explorar a representação gráfica da função do tipo exponencial.

Para isso, primeiramente deve-se obter os pares ordenados da forma (t, n) em que t representa o tempo e n a quantidade de bactérias. Reconhecendo que t está relacionando ao eixo das abscissas e n ao eixo das ordenadas, na representação gráfica no plano cartesiano.

Substitui-se os valores de t na função $n(t) = 50x3^t$ por 0, 1, 2 e 3 com o intuito de calcular o número de bactérias nestes referidos momentos, desta forma encontra-se os valores de n(t):

$n(0)= 50x\ 3^0= 50x\ 1= 50$

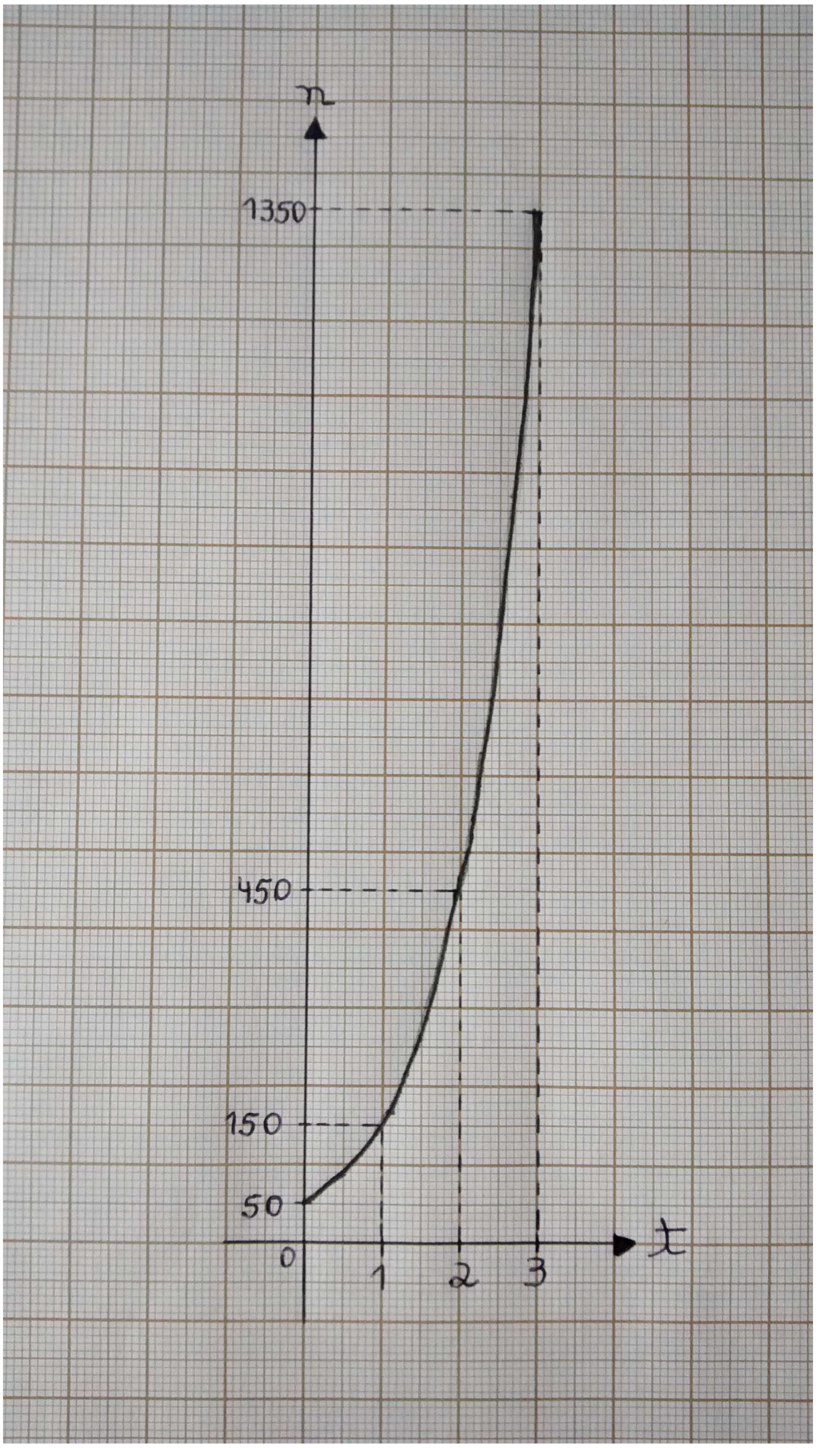
$n(1)= 50x\ 3^1=50x3 = 150$

$n(2)= 50x3^2= 50\ x\ 9= 450$

$n(3)= 50x3^3= 50x\ 27 = 1350$

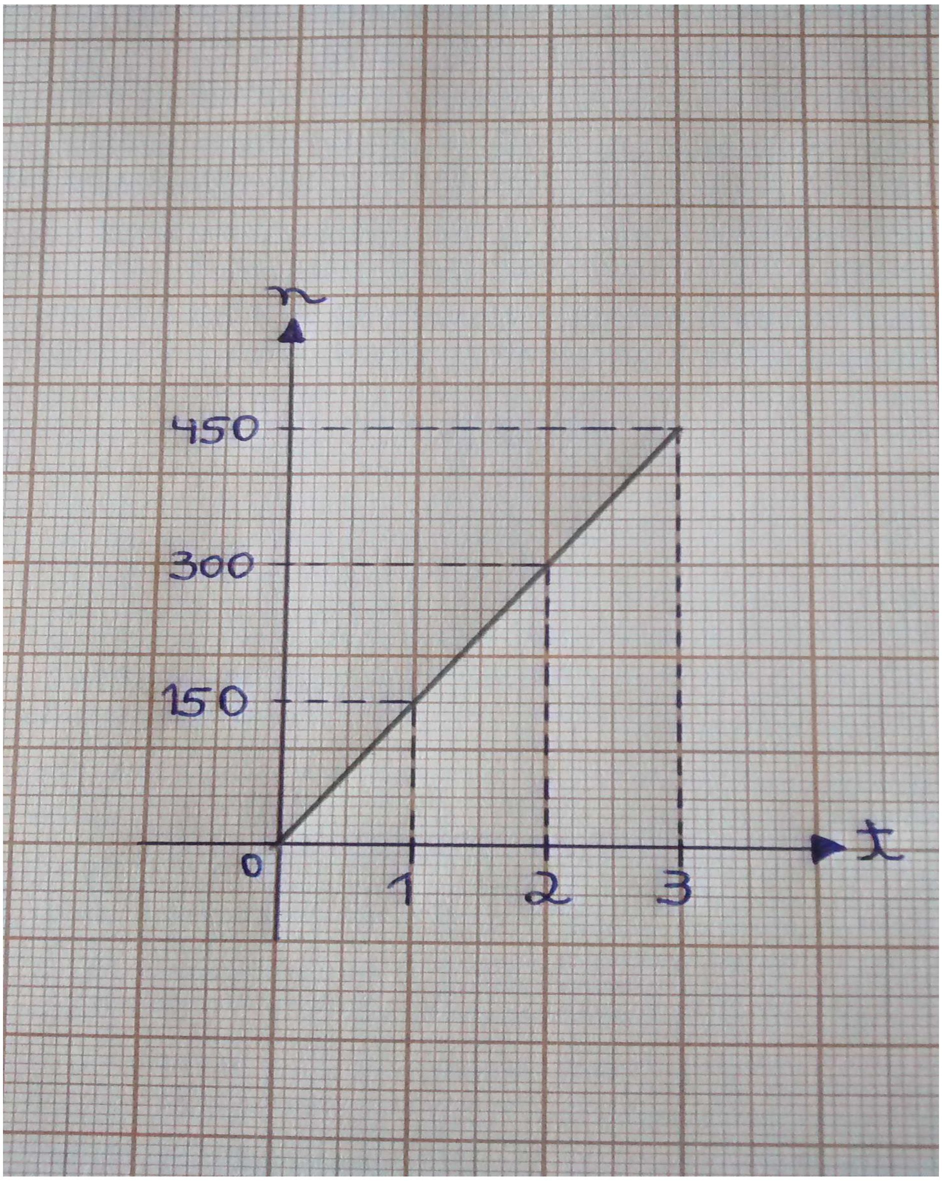
Assim, tem-se os seguintes pares ordenados: (0,50); (1,150); (2,450); (3,1350).

Em seguida, representa-se esses pares ordenados no plano cartesiano a fim de se traçar a curva que representa graficamente essa função.



Fonte: Josiane Aparecida Busquim Mota

Nesse momento, também pode ser discutida a possível resolução errada (2ª possibilidade do item c), caso seja apresentada pelos alunos. Se ao invés de utilizar a expressão algébrica n(t)= $50x3^t$, os alunos utilizarem a expressão algébrica n(t)= 50x3t, o professor pode explicar que nesse caso será obtido um segmento de reta como representação gráfica.



Fonte: Josiane Aparecida Busquim Mota

Problema 2

A brincadeira preferida de Sofia é empilhar blocos. Certo dia, ela empilhou seus blocos da seguinte maneira:

Fonte: Josiane Aparecida Busquim Mota

Se Sofia continuar a empilhar blocos e seguir o mesmo padrão, quantos blocos terá:

a) a figura 5?
b) a figura 6?
c) a figura 7?
d) a figura 20?
e) Descreva matematicamente, por meio de uma expressão algébrica, a relação entre o número da figura e a quantidade de blocos empilhados.

Objetivos:

•Definir Sequência como função.

•Definir Progressão Geométrica.

Possíveis resoluções

Item a

- 1ª possibilidade: Apenas apresentar a resposta:

  Resposta: 16 blocos.

- 2ª possibilidade: Contar os blocos:

  Fig.1: 1 bloco

  Fig.2: 2 blocos

  Fig.3: 4 blocos

  Fig.4: 8 blocos

  Fig.5: 16 blocos

  Resposta: 16 blocos.

- 3ª possibilidade: Analisando o desenho, vemos que a figura 1 tem 1 bloco, a partir da figura 2, o número de blocos é igual ao dobro do número de blocos da figura anterior:

  Fig.1: 1

  Fig.2: 2x1=2

  Fig.3: 2x2=4

  Fig.4: 4x2=8

  Fig.5: 8x2=16

  Resposta: 16 blocos

- 4ª possibilidade: Utilizar potências de base 2, e o expoente será o número da figura menos 1:

  Fig.1: $2^0=1$

  Fig.2: $2^1=2$

  Fig.3: $2^2=4$

  Fig.4: $2^3=8$

  Fig.5: $2^4=16$

  Resposta: 16 blocos

<u>Item b</u>

- 1ª possibilidade: Apenas apresenta a resposta:

  Resposta: 32 blocos

- 2ª possibilidade: Contar os blocos:

  Fig.1: 1 bloco

  Fig.2: 2 blocos

  Fig.3: 4 blocos

  Fig.4: 8 blocos

  Fig.5: 16 blocos

  Fig.6: 32 blocos

  Resposta: 32 blocos

- 3ª possibilidade: Analisando o desenho, vemos que a figura 1 tem 1 bloco, a partir da figura 2, o número de blocos é igual ao dobro do número de blocos da figura anterior:

  Fig.1: 1

  Fig.2: 2x1=2

  Fig.3: 2x2=4

  Fig.4: 4x2=8

  Fig.5: 8x2=16

  Fig.6:16x2=32

  Resposta: 32 blocos

- 4ª possibilidade: Utilizar potências de base 2, e o expoente será o número da figura menos 1:

  Fig.1: $2^0 = 1$

  Fig.2: $2^1 = 2$

  Fig.3: $2^2 = 4$

  Fig.4: $2^3 = 8$

  Fig.5: $2^4 = 16$

  Fig.6: $2^5 = 32$

  Resposta: 32 blocos

<u>Item c</u>

- 1ª possibilidade: Apenas apresenta a resposta:

Resposta: 64 blocos

- 2ª possibilidade: Contar os blocos e perceber que os valores estão dobrando:

Fig.1: 1 bloco
Fig.2: 2 blocos
Fig.3: 4 blocos
Fig.4: 8 blocos
Fig.5: 16 blocos
Fig.6: 32 blocos
Fig.7: 64 blocos
Resposta: 64 blocos

- 3ª possibilidade: Analisando o desenho, verifica-se que o número de blocos da figura 1 é 1, e, a partir da figura 2, o número de blocos é igual ao dobro do número de blocos da figura anterior:

Fig.1: 1
Fig.2: 2x1=2
Fig.3: 2x2=4
Fig.4: 4x2=8
Fig.5: 8x2=16
Fig.6: 16x2=32
Fig.7: 32x2=64
Resposta: 64 blocos

- 4ª possibilidade: Utilizar potências de base 2, e o expoente será o número da figura menos 1:

Fig.1: $2^0=1$
Fig.2: $2^1=2$
Fig.3: $2^2= 4$
Fig.4: $2^3= 8$
Fig.5: $2^4=16$

Fig.6: 2^5= 32

Fig.7: 2^6= 64

Resposta: 64 blocos

Item d

Nesse item, já não é aconselhável desenhar os blocos, pois são muitos e espera-se que o aluno já tenha percebido a regularidade existente.

- Utilizar a potência de base 2, e o expoente será o número da figura menos 1:

Fig.1: 2^0=1

Fig.2: 2^1=2

Fig.3: 2^2=4

Fig.4: 2^3=8

Fig.5: 2^4= 16

Fig.6: 2^5= 32

Fig.7: 2^6= 64

Fig.8: 2^7= 128

Fig.9: 2^8= 256

....

Fig.20: 2^{19}=524288

....

Fig.n: 2^{n-1}

Item e

Q(n): 2^{n-1} em que Q(n): quantidade de blocos empilhados e n: número da figura

PROPOSTA DE FORMALIZAÇÃO

Tendo em vista as resoluções apresentadas nos itens (a), (b), (c) e (d), o professor pode sugerir que os alunos organizem as informações em um quadro, como o que segue:

Número da figura (n)	Quantidade de blocos (Q)
1	$1= 2^0$
2	$2= 2^1$
3	$4= 2^2$
4	$8 =2^3$
5	$16 = 2^4$
6	$32 = 2^5$
7	$64 = 2^6$
...	...
10	$512 =2^9$
...	...
20	$524288 = 2^{19}$

Em seguida, pode orientar os alunos no sentido de que identifiquem se há alguma relação de dependência entre o número da figura (n) e a quantidade de blocos empilhados (Q), e se para cada figura há uma única quantidade de blocos correspondente. Ou seja, o professor pode orientar os alunos para que percebam que a relação apresentada trata-se de uma função e que o domínio dessa função é {1,2,3,...,n,...}, e o conjunto imagem é $\{1,2,4,8,16,...,2^{n-1},...\}$.

Tendo em vista que o domínio dessa função é o conjunto dos números naturais não nulos, o professor pode explicar aos alunos que essa função pode ser definida como uma sequência:

"Uma **sequência numérica** é uma função f cujo domínio está contido em N* e cujo contradomínio é R (BARROSO, 2010)."

O professor pode também explicar aos alunos que "é usual representar uma sequência numérica por meio de seu conjunto imagem, colocando-o entre parênteses" (IEZZI et al., 2010). Além disso, cada elemento ou termo da sequência pode ser representado por uma letra com um índice, que indica a posição ou ordem do elemento na sequência. No caso desse problema, tem-se:

1º termo: $a_1 = 1$

2º termo: $a_2 = 2$

3º termo: $a_3 = 4$

4º termo: $a_4 = 8$

5º termo: $a_5 = 16$

Além disso, que para calcular qualquer termo da sequência pode-se utilizar sua lei de formação ou termo geral, que neste caso é $a_n = 2^{n-1}$.

O professor também pode aproveitar o trabalho com esse problema para formalizar as definições de sequência finita e de sequência infinita: "Uma sequência finita de *n* termos é indicada por (a_1,a_2, a_3, ...,a_n)" e "Uma sequência infinita é indicada por (a_1,a_2, a_3, ...,a_n,...)" (BARROSO, 2010, p. 253). Desse modo, "se a sequência tiver um último termo a_n, dizemos que ela é **finita**. Em caso contrário, dizemos que é **infinita**, e a indicamos colocando reticências no final" (BARROSO, 2010, p. 252, grifo do autor).

Diante disso, o professor pode questionar os alunos:

- A sequência que estamos trabalhando é finita ou infinita? Por quê?

Espera-se que os alunos respondam que essa sequência, $(1,2,4,8,16,...,2^{n-1},...)$, é infinita, pois ela não possui um último termo.

O professor também pode utilizar as informações do quadro que apresenta a quantidade de blocos para formalizar com os alunos o conceito de Progressão Geométrica. Para isso, pode inicialmente fazer alguns questionamentos, tais como:

- o que está acontecendo com os elementos ou termos dessa sequência?
- o que está acontecendo do 2º elemento da sequência em relação ao 1º elemento da mesma sequência?
- e do 3º elemento em relação ao 2º elemento?

Com isso, espera-se que os alunos observem a regularidade que está acontecendo na sequência $(1, 2, 4,..., 2^{n-1},...)$. Nesse caso, cada termo, a partir do segundo, é o resultado da multiplicação do termo anterior por 2.

O professor pode explicar que devido a isso essa sequência é chamada de progressão geométrica e apresentar a definição: "Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q chamada **razão da PG**. (BARROSO, 2010, p. 265, grifo do autor)".

Problema 3

Maria abriu uma pequena fábrica de camisetas. Em janeiro ela conseguiu produzir apenas 20 camisetas. Nos meses seguintes, foi instalando novas máquinas e contratando mais funcionários. Sua produção duplicou mês a mês até agosto. Em julho, quantas camisetas ela produziu?

Objetivos:

- Reconhecer P.G. e deduzir a fórmula do termo geral.
- Relacionar a P.G. com a função do tipo exponencial.

Possíveis Resoluções

- 1ª possibilidade: Fazer os cálculos mentalmente ou com o auxílio de uma calculadora e apresentar os valores mês a mês:

janeiro: 20 camisetas

fevereiro: 40 camisetas

março: 80 camisetas

abril: 160 camisetas

maio: 320 camisetas

junho: 640 camisetas

julho: 1280 camisetas

Resposta: Em julho foram produzidas 1280 camisetas.

- 2ª possibilidade: No primeiro mês foram produzidas 20 camisetas, a partir do segundo mês, a quantidade produzida em cada mês é o resultado da multiplicação da quantidade produzida no mês anterior por 2:

janeiro: 20 camisetas

fevereiro: 20x2= 40

março: 40x2= 80

abril: 80x2 =160

maio: 160x2= 320

junho: 320x2= 640

julho: 640x2 =1280

- 3ª possibilidade: No primeiro mês foram produzidas 20 camisetas, a partir do 2º mês realiza-se uma adição de duas parcelas, em que cada parcela corresponde à quantidade de camisetas do mês anterior:

janeiro: 20 camisetas

fevereiro: 20+20 = 40

março: 40+40 = 80

abril: 80+80 =160

maio: 160+160 = 320

junho: 320+320 = 640

julho: 640+640 = 1280

- 4ª possibilidade: Utilizar o número inicial de camisetas produzidas no primeiro mês, 20, e a partir do segundo mês multiplicar o valor 20 por uma potência de base 2, em que o expoente se refere a cada mês menos 1, sendo mês 1: janeiro; mês 2: fevereiro, mês 3: março, e assim sucessivamente:

janeiro: 20 camisetas

fevereiro: $20x2^1 = 40$

março: $20x2^2 = 80$

abril: $20x2^3 =160$

maio: $20x2^4 = 320$

junho: $20x2^5 = 640$

julho: $20x2^6 = 1280$

PROPOSTA DE FORMALIZAÇÃO

A partir da segunda e da quarta possibilidade de resolução o professor pode fazer a dedução da fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica. Para isso, inicialmente pode fazer alguns questionamentos aos alunos, tais como:

- o que está acontecendo com essa sequência?
- ela tem algo em comum com a sequência apresentada no problema anterior?

Espera-se com isso que os alunos identifiquem essa sequência como sendo uma Progressão Geométrica em que cada termo a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante, que é a razão q.

O professor pode fazer ainda outros questionamentos:

- o que cada termo representa?
- como podemos representar cada um dos termos tendo em vista sua posição na sequência?

Espera-se que os alunos percebam que cada termo a_n da sequência indica a quantidade de camisetas produzidas em cada mês, representado por n.

Exemplo:

a_1: representa a quantidade de camisetas produzidas no mês 1, que é janeiro.

$a_{2:}$ representa a quantidade de camisetas produzidas no mês 2, que é fevereiro.

... ...

$a_{n:}$ representa a quantidade de camisetas produzidas no mês n.

Em seguida, o professor pode sugerir que os alunos construam um quadro, como o apresentado a seguir:

mês	Quantidade de camisetas
1	20
2	40 = 20x2 = 20 x 2^1
3	80 = (20x2)x2= 20 x 2^2
4	160 = (20x2)x2x2= 20x2^3
5	320 = (20x2) x2x2x2= 20x2^4
6	640 = (20x2)x2x2x2x2= 20x2^5
7	1280 = (20x2)x2x2x2x2x2=20x2^6

A partir disso, o professor pode chamar a atenção dos alunos para o fato de que cada termo dessa sequência pode ser escrito em função do primeiro e da razão da progressão, isto é,

$$a_1 = 20$$

$$a_2 = 40 = 20 \times 2 = 20 \times 2^1 = a_1.q$$

$$a_3 = 80 = (20 \times 2) \times 2 = 20 \times 2^2 = a_1.q^2$$

$$a_4 = 160 = ((20 \times 2) \times 2) \times 2 = 20 \times 2^3 = a_1.q^3$$

$$a_5 = 320 = (((20 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2 = 20 \times 2^4 a =_1 .q^4$$

$$a_6 = 740 = ((((20 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2 = 20 \times 2^5 = a_1.q^5$$

$$a_7 = 1280 = (((((20 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2 = 20 \times 2^6 = a_1.q^6$$

Logo, para um *n* qualquer se tem $a_n = a_1.q^{n-1}$, que é conhecida como fórmula do termo geral da Progressão Geométrica, em que

a_n: enésimo termo da P.G.

a_1: primeiro termo da P.G.

n: quantidade de termos da P.G.

q: razão da P.G.

Em seguida, pode ser explicado que, a partir da fórmula obtida $a_n = a_1 . q^{n-1}$, a resolução do problema pode ser feita da seguinte maneira, tendo em vista que $a_1 = 20$; q=2, n=7.

$a_7 = a_1 . q^{7-1}$

$a_7 = 20 . 2^{7-1}$

$a_7 = 20 . 2^6$

$a_7 = 20 . 64$

$a_7 = 1280$ camisetas

Resposta: No mês de julho foram produzidas 1280 camisetas.

Ao definir a fórmula do termo geral da P.G. e comparando esse problema estudado com o problema 1, o professor pode questionar seus alunos:

- O que tem em comum nesses dois problemas?
- Qual a relação existente entre eles?

Tendo isso em vista, o professor pode explicar aos alunos que é possível fazer uma relação entre essa sequência, que é uma progressão geométrica, com a função do tipo exponencial, cujas características e lei de formação foram trabalhadas a partir do problema 1.

Para essa sequência tem-se que o termo geral é $a_n = 20.2^{n-1}$. No entanto, utilizando algumas propriedades de potenciação, tem-se:

$$a_n = 20.2^{n-1}$$

$$a_n = 20.2^n.2^{-1}$$

$$a_n = 20.2^n.\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{20}{2}.2^n$$

$$a_n = 10.2^n$$

que é da forma algébrica de uma função do tipo exponencial, $g(x) = ba^x$, mas com restrições aos valores que a variável independente pode assumir, isto é, números naturais não nulos.

Assim sendo, o professor pode explicar aos alunos que, nesse caso, a P.G. pode ser associada à função do tipo exponencial, restrita aos números naturais não nulos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas**. Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 33, n. 55, jul./dez. 2009.

BARROSO, J. (Ed.). **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura/Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2. 2006.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 1.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 3ªed. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v. 1.