Secretaria de Estado da Educação – SEED
Superintendência da Educação – SUED
Políticas e Programas Educacionais – DIPOL
Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE

A SENÓIDE E OS SONS MUSICAIS

SUELI DA SILVA ROSSI

LONDRINA
FEVEREIRO / 2008

Secretaria de Estado da Educação – SEED
Superintendência da Educação – SUED
Políticas e Programas Educacionais – DIPOL
Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE

SUELI DA SILVA ROSSI

A SENÓIDE E OS SONS MUSICAIS

Material Didático produzido para o Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE.
Orientação: Prof. Ms Luciana Gastadi Sardinha Souza.

LONDRINA
FEVEREIRO / 2008

SUMÁRIO

PDE – Programa de Desenvolvimento Educacional

A SENÓIDE E OS SONS MUSICAIS

Sueli da Silva Rossi

RESUMO: Este material inicia comparando-se o movimento de um peso suspenso por uma mola ao movimento de um ponto P percorrendo uma circunferência. Desse modo obtém-se a função seno. Posteriormente é feita uma comparação com a corda vibrante. Ao final, são propostas algumas atividades a fim de proporcionar um entendimento sobre as relações existentes entre os sons musicais e a função seno.

I. INTRODUÇÃO

Até o século XV, a Música era considerada uma ciência Matemática, que juntamente com a Aritmética, Geometria e a Astronomia compunham o Quadrivium.

A relação entre a Matemática e a Música é bastante antiga, mas se evidencia cientificamente com os experimentos de Pitágoras (séc VI a.C.), que conseguiu organizar os sons em uma escala musical por meio de seus experimentos com um monocórdio, partindo das divisões de uma corda.

Outros matemáticos também realizaram suas pesquisas, estabelecendo uma série de relações entre estas duas ciências, por exemplo: Arquitas de Tarento que foi o primeiro a caracterizar o fenômeno sonoro como resultado de pulsações de ar, que produziam sons mais agudos à medida que se tornavam mais rápidas, prenunciando a relação de freqüência com altura musical, formalizada em 1638 por Galileu; Mersenne, deduziu a fórmula que expressa a freqüência de vibração da corda em função de seu comprimento, densidade linear e sua tensão; B. Taylor foi o primeiro a calcular o período fundamental de uma corda vibrante; Johan Bernoulli que estabeleceu a primeira análise de configuração de uma pequena deformação da corda vibrante com um peso. Dentre outros, também destacamos a descoberta do matemático francês Jean Batiste Fourier, que provou que uma onda qualquer é formada pela somatória de várias outras de formato senoidal.

Para compreendermos as relações entre as cordas vibrantes e a função seno, iniciaremos o nosso estudo com o experimento do matemático Robert Hooke.

II. O MOVIMENTO DE UM PESO SUSPENSO A UMA MOLA E A SENÓIDE

Robert Hooke (1635 – 1703), professor de Matemática no Gresham College, estava bastante interessado em construir um relógio e acreditava que a natureza do mecanismo consistiria em molas. Enquanto estudava este movimento da mola, ele descobriu a lei básica que conhecemos hoje como **Lei de Hooke**.

Em um de seus experimentos ele prendeu uma mola em uma superfície fixa, e um peso na outra na extremidade. Com a ação da gravidade, o peso tende a ir para baixo, a mola se estica até que sua tensão compense a força da gravidade. Este peso retornará para a posição de repouso até chegar a uma posição mais elevada, e depois descerá, repetindo este movimento várias vezes. Se não houvesse a resistência do ar, o peso continuaria se movendo indefinidamente para cima e para baixo.

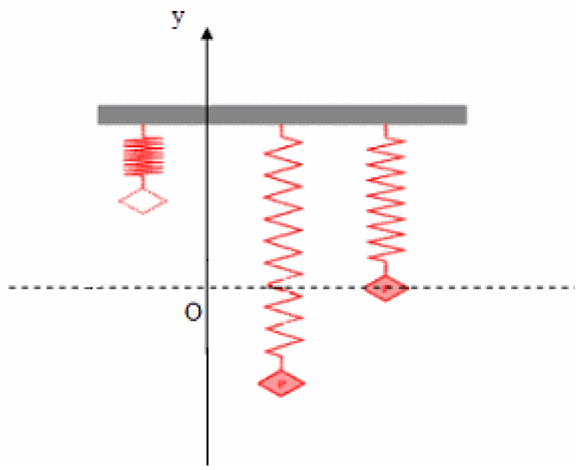


Fig. 01. Peso atado a uma mola

Para analisarmos matematicamente este movimento, desenhamos um eixo y junto à mola, e supomos que $y = 0$ corresponda à posição de repouso.

Quando o peso está acima ou abaixo da posição de repouso, dizemos que houve um deslocamento, que consideramos positivo quando o movimento realizado for para cima e negativo quando for para baixo.

O objetivo é buscarmos um novo tipo de fórmula que explique o movimento do peso. Então, suponhamos que um ponto P se mova em torno de uma circunferência de raio unitário a uma velocidade constante. Chamemos algumas de suas posições de P_1, P_2, P_3,... Na representação poderemos colocar um ponto Q na reta vertical que passa pelo centro O, tal que Q esteja sempre na mesma altura que P acima ou abaixo da horizontal que passa por O. Ao ponto Q denominamos projeção de P sobre a reta vertical. Assim, a posição P_1 de P corresponde a Q_1; P_2 corresponde a Q_2 e assim sucessivamente.

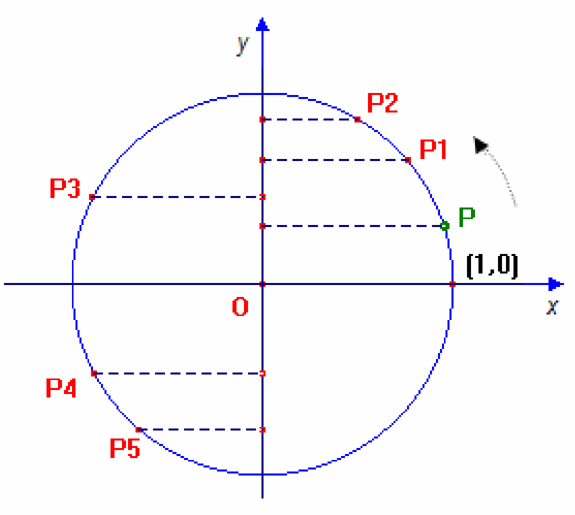


Fig. 02. Movimento de um Ponto P

Digamos que P, partindo do ponto (1,0) em sentido anti-horário, dê uma volta ao redor da circunferência. Ao observarmos o movimento deste ponto e sua projeção, notamos que a ordenada de P se move até alcançar a sua posição mais elevada, volta para o ponto 0, passa ponto mínimo e retorna ao ponto 0. É um movimento semelhante ao movimento da mola.

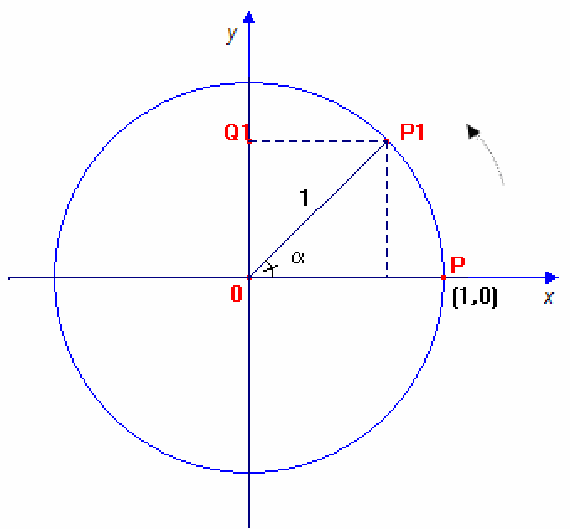


Fig. 03. Movimento de P_1

Introduzindo os eixos de coordenadas

Se P parte do eixo x e alcança, por exemplo, a posição P_1, então a posição de P pode ser dada pelo ângulo α. A altura de Q acima do eixo x é a mesma que o valor y de P. Assim,

$$sen\alpha = \frac{y}{1}, \quad \text{portanto}$$

$$y = sen\alpha$$

A posição do ponto Q será dada pela função: $y = sen\alpha$. Quando α é um ângulo agudo, sen α tem o seu significado antigo: é a razão entre o lado oposto e a hipotenusa do triângulo retângulo.

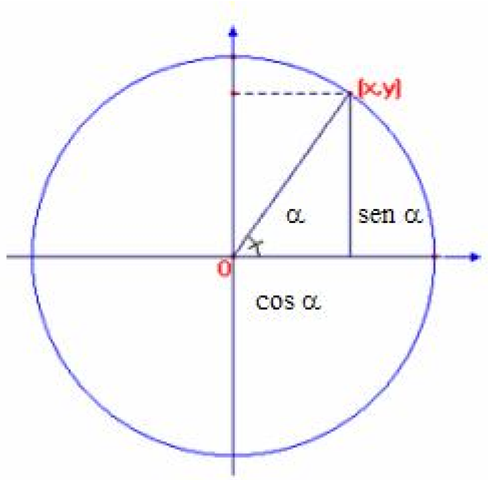


Fig. 04. A Função Seno

Porém, quando o ângulo ultrapassa 90°, a equação $y = sen\alpha$ representa a função real $y : \Re \to \Re$, y = sen α.

Para explicarmos este fenômeno, faz-se necessário o uso de uma variável contínua, pois este fenômeno depende do tempo. Assim, teremos que usar uma nova unidade, o **radiano**. Radiano é um ângulo central cujo arco que lhe corresponde possui um comprimento igual ao raio da circunferência.

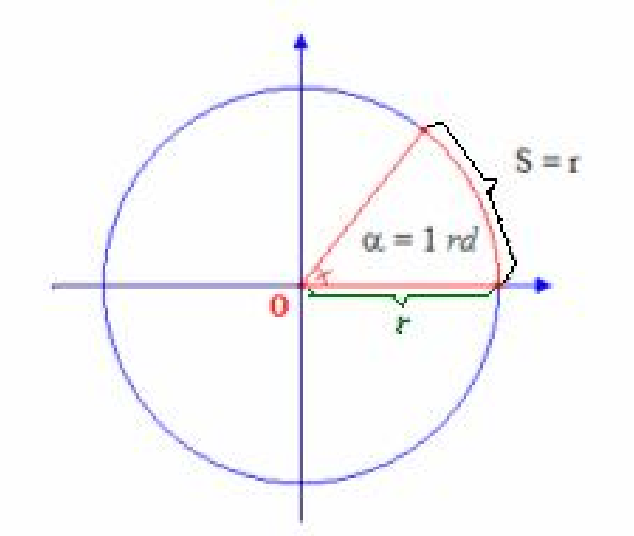


Fig. 05. Seno Radiano

S = comprimento do arco

R = raio da circunferência

1 rd ≅ 57,3°

III. FUNÇÃO SENO RADIANO

Dado um número x ∈ ℜ, efetua-se sobre a circunferência, a partir de A = (1,0) um percurso de comprimento |x| (no sentido horário, se x < 0 e no sentido anti-horário se x >0). Seja P o ponto de chegada, temos:

$$sen^{rad}\, x = ordenada \quad de \quad P$$

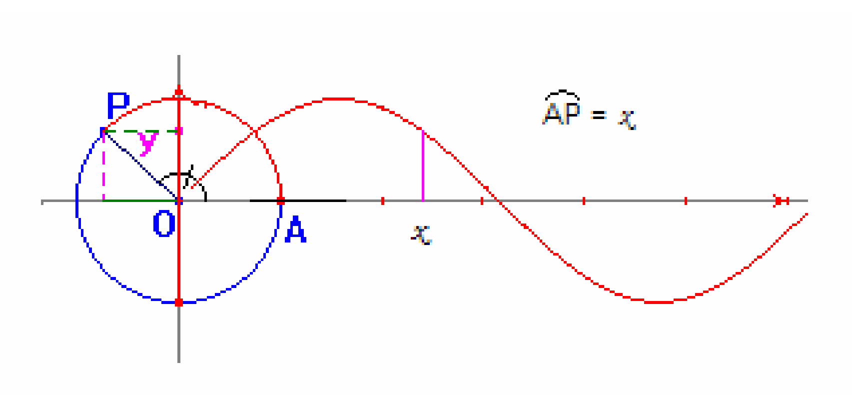


Fig. 06. Senóide

A função $y = sen\alpha$ tem um valor máximo de y = 1 e um valor mínimo y = -1. Ao valor do deslocamento máximo da posição de repouso, damos o nome de **Amplitude** da função.

Para tanto, significa que se tivéssemos uma função determinada por $y = 2.sen\alpha$, diríamos que sua amplitude seria 2. Assim, para qualquer valor de α, a função $y = 2.sen\alpha$, representa 2 vezes o seno de α, que se evidencia pela função:

$$y = A.sen\alpha$$

A = amplitude.

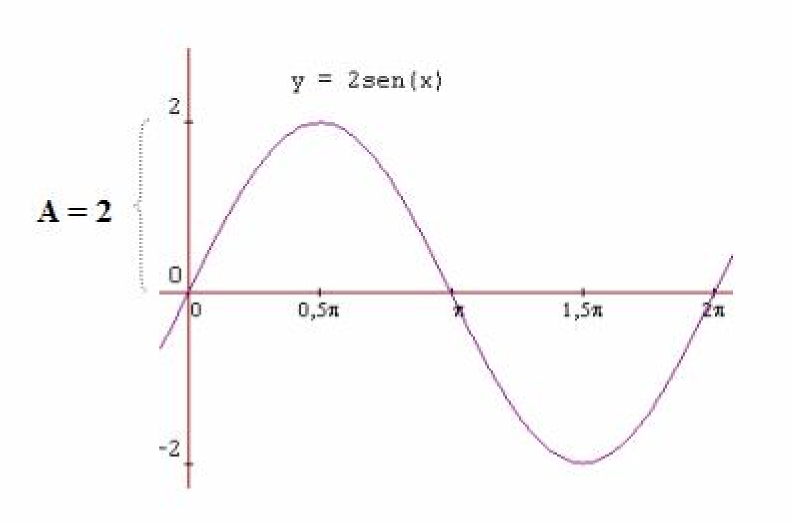


Fig. 07. Representação gráfica de y = 2.sen(x)

Antes de utilizarmos a função seno para representarmos o movimento de um peso atado a uma mola, deveremos eliminar uma outra dificuldade, pois a função que buscamos deverá representar uma relação entre o **deslocamento e o tempo**. Os valores de nossas funções, $y = sen\alpha$ ou $y = 2.sen\alpha$ representam o deslocamento de um ponto Q que se move para cima e para baixo sobre uma reta, mas a variável independente é um ângulo.

Suponhamos que um ponto P gaste 1s para dar uma volta completa em uma circunferência:

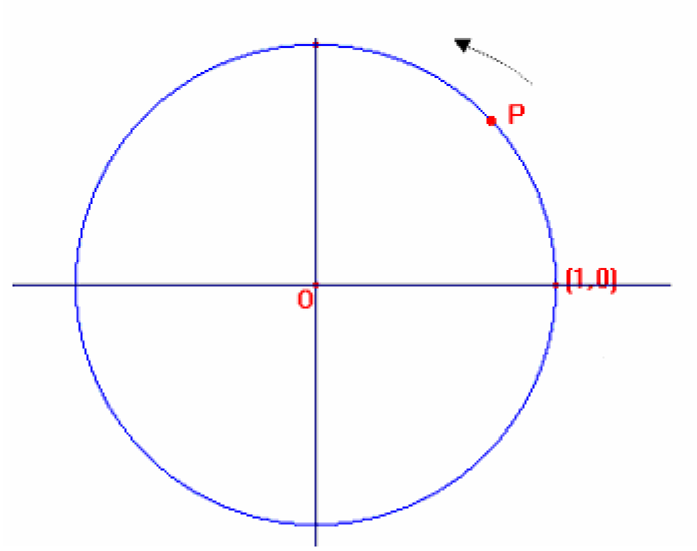


Fig. 08. Movimento de P

A) O ponto P executa 1 revolução por segundo

$$1s \rightarrow \text{percorrerá } 2\pi \text{ radianos}$$

$$t\ s \rightarrow \text{percorrerá } x \text{ radianos}$$

$$x = 2\pi\ t$$

Portanto, o valor de x em t segundos será 2π t.

Assim, a função y = sen x será representada por: $y = \text{sen } 2\pi t$

Graficamente teremos:

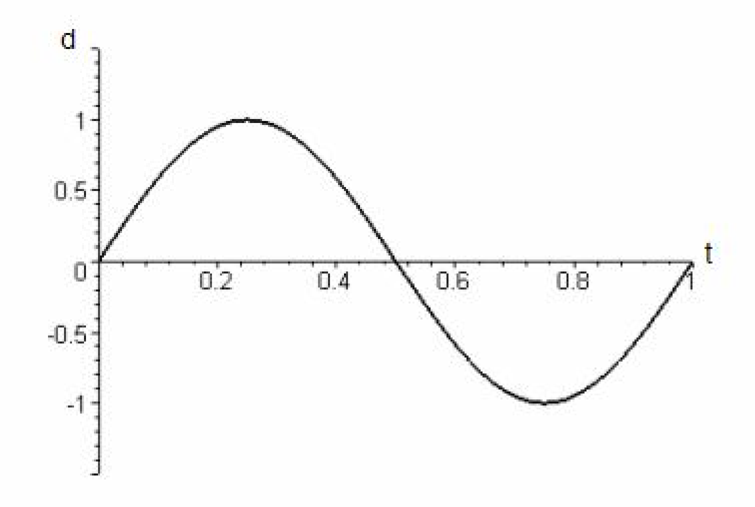


Fig. 09. Representação gráfica de $y = \text{sen } 2\pi t$

Enquanto o tempo (t) varia de 0 a 1 segundo, o ângulo α varia de 0 a 2π, ou seja, o ponto P completou um ciclo em um segundo, ou 1 ciclo por segundo. A este número de ciclos que um corpo apresenta no espaço de um segundo, chamamos de ***freqüência***, no qual 1 ciclo por segundo é igual a 1 hz (hertz).

O tempo gasto pelo ponto P para completar um ciclo denomina-se ***período***, e é medido geralmente, em segundos. Nesse caso, o período é de 1 segundo.

B) O ponto P executa 2 revoluções por segundo

$$1s \rightarrow \text{percorrerá } 2.\ 2\pi \text{ radianos}$$
$$t\ s \rightarrow \text{percorrerá } x \text{ radianos}$$

$$x = 2.2\pi\ t$$

Portanto, o valor de x em t segundos será 4π t.
Assim, a função y = sen x será representada por:

$$y = \text{sen } 4\pi t$$

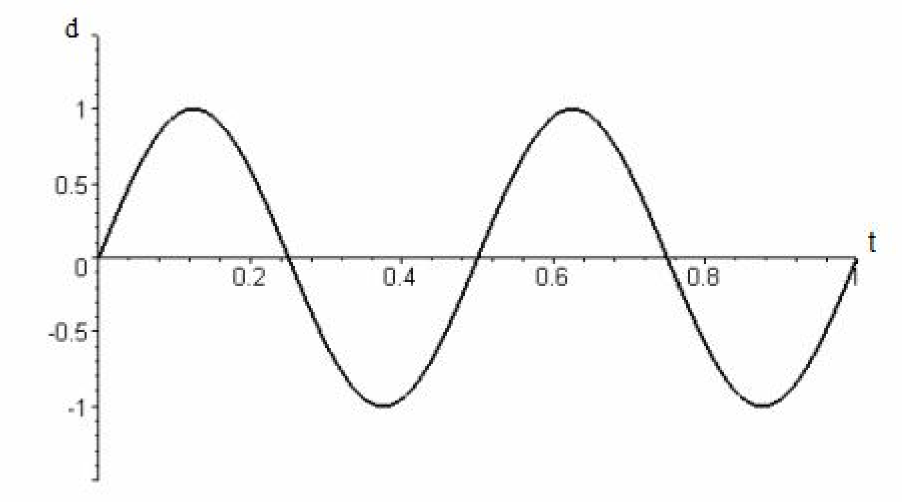


Fig. 10. Representação gráfica de $y = \text{sen } 4\pi t$

Ou

$$y = \text{sen } 4\pi\ t$$
$$y = \text{sen } 2\pi\ .2t$$

Neste caso, y passou por dois ciclos completos em um segundo, portanto, a freqüência é de dois ciclos por segundo (2 hz), “completando” o processo em uma volta, e o seu período equivale à metade, ou seja, 0,5 s.

2 ciclos completos em $\longrightarrow$ 1s
1 ciclo $\longrightarrow$ 0,5 s

C) P executa 3 revoluções por segundo. Analogamente teremos:

1s $\rightarrow$ percorrerá 3. 2π radianos

t s $\rightarrow$ percorrerá x radianos

$$x = 3.2\pi\, t$$

Portanto, o valor de x em t segundos será 6π t.Assim, a função y = sen x será representada por: $y = \text{sen } 6\,\pi\, t$

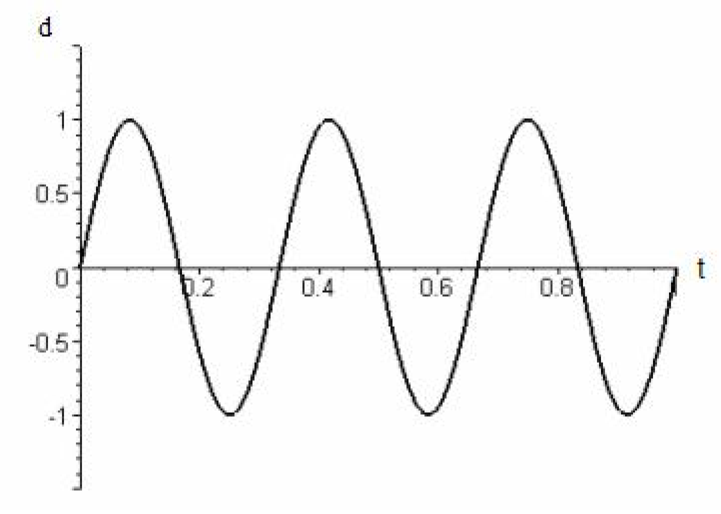


Fig. 11. Representação gráfica de $y = \text{sen } 6\,\pi\, t$

$$y = \text{sen}.6\pi.t$$

$$y = \text{sen}.2\pi.3.t$$

Foram completados 3 ciclos em 1 segundo, portanto, a freqüência foi de 3 hz, e o período equivalente a 1/3 de segundo, ou 0,3333... s.

Concluímos que se um ponto P percorrer uma circunferência f vezes em um segundo, teremos que a função y = sen x poderá ser representa por:

$$y = sen.2\pi.f.t \;\rightarrow\; \text{f revoluções em 1s}$$

Para aumentarmos a amplitude desta função, basta aumentarmos o fator A, assim teremos:

y = A. sen 2π.f.t

A = amplitude (raio do ciclo)
f = número de revoluções por segundo (freqüência)
t = tempo.

Genericamente, a função seno é definida como:

y = A. sen B(x + C) + D

A = amplitude (raio do ciclo)
B = relaciona-se com o período da função : $P = \frac{2\pi}{|B|}$
C = translação horizontal
D = translação vertical.

Exemplificando,

- y = $\text{sen}\, 2\pi.t - 1$

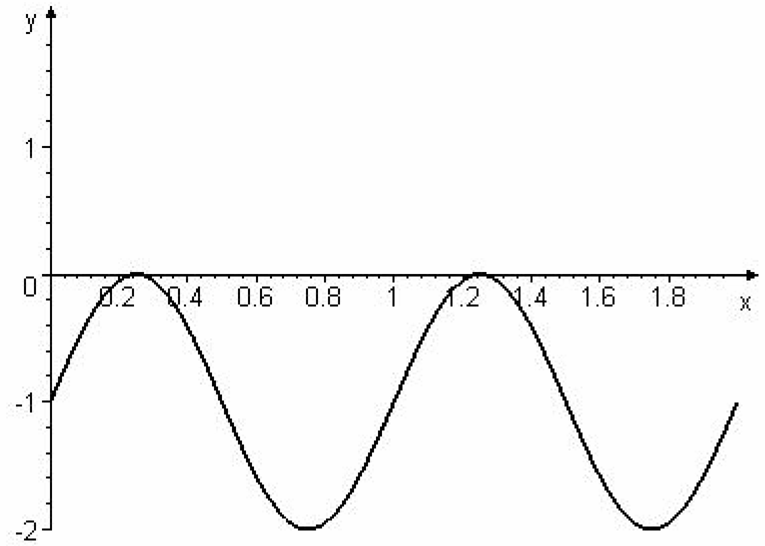


Fig. 12. Representação gráfica da função y = $\text{sen}\, 2\pi.t - 1$

Amplitude = 1

Período = 1 s

Freqüência = 1 hz

Translação horizontal = 0 (não houve)

Translação vertical = -1

- y = $2.\text{sen}\left(6\pi.t+\frac{\pi}{2}\right)+3$

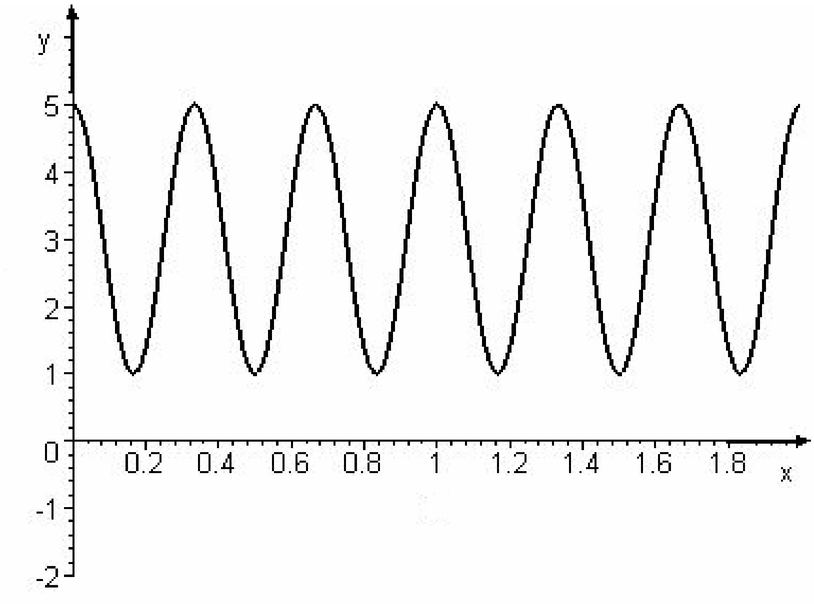


Fig. 13. Representação gráfica da função y = $2.\text{sen}\left(6\pi.t+\frac{\pi}{2}\right)+3$

Amplitude = 2

Período = 1/3 s

Freqüência = 3 hz

Translação horizontal = $-\frac{\pi}{2}$ (ou deslocamento de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda)

Translação vertical = 3

Quando observamos este mesmo tipo de movimento oscilatório (peso atado a uma mola) em um corpo deformável, como uma corda, verificamos a produção de som.

Mas, como o som é produzido?

IV. O SOM

Poderíamos definir som como sendo o resultado de oscilações muito rápidas que ocorrem na natureza. Desta forma, as notas musicais poderiam se definir como sendo variações da freqüência dessas oscilações.

Se quisermos ouvir o som de uma corda, deveremos pinçá-la e esta sairá de sua posição de equilíbrio realizando movimentos vibratórios, em um certo espaço de tempo.

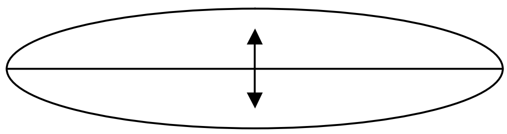


Fig. 14. Oscilação

Este movimento vibratório é análogo ao da mola anteriormente estudado.

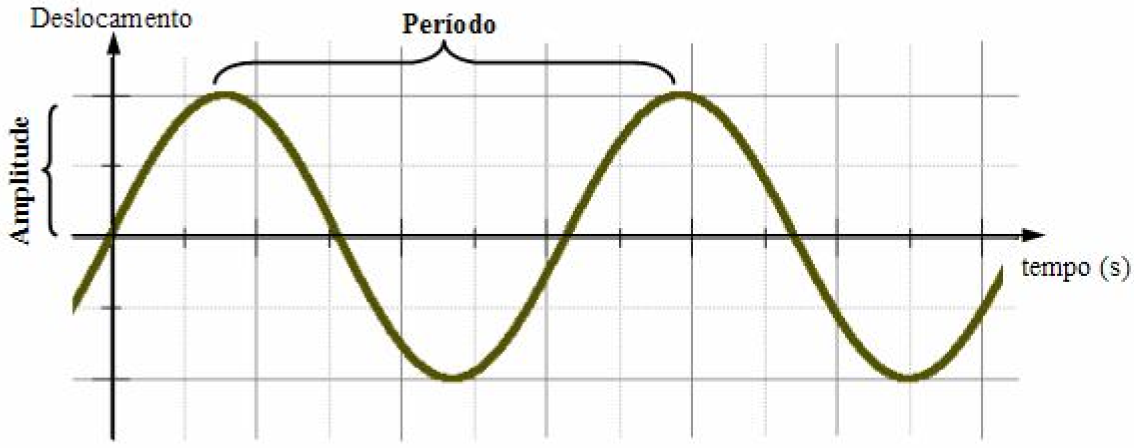


Fig. 15. Amplitude, Freqüência e Período

- A **amplitude** da onda equivale à propriedade do som de ser forte ou fraco, ou seja, a Intensidade.
- A **freqüência** equivale à altura da nota. Sendo assim, se executássemos 261 pulsos em um segundo obteríamos a nota Dó.

- O **período** é o tempo compreendido entre estados iguais de vibração.

Pitágoras realizou vários experimentos com um monocórdio. Nesta experiência ele dividiu uma corda ao meio, e verificou que esta corda tinha o dobro de vibrações, ou seja, considerando que a corda inteira vibrava 15 pulsos, metade da corda vibrou 30, e o período da função reduziu à metade.

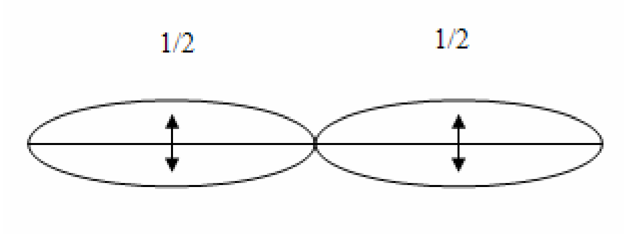


Fig. 16. Vibração da corda pressionada na metade

Representando por meio de um gráfico, teremos:

- $y_1 = \text{sen}\, 30\pi..t \quad \rightarrow \quad y_1 = \text{sen}\, 2\pi.15.t$

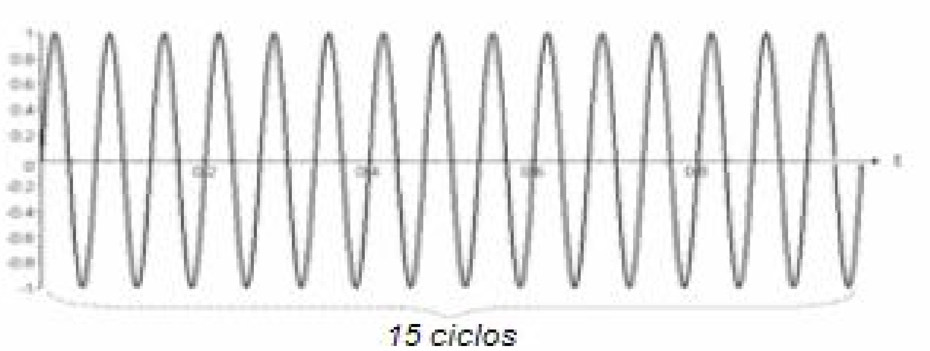


Fig. 17. Representação gráfica de y = sen 30π.t

Amplitude = 1

Período = 1/15 segundos (0,0666 s)

Freqüência = 15 hz

- $y_2 = \text{sen}\,60\pi.t \quad \rightarrow \quad y_2 = sen2\pi.2.15.t$

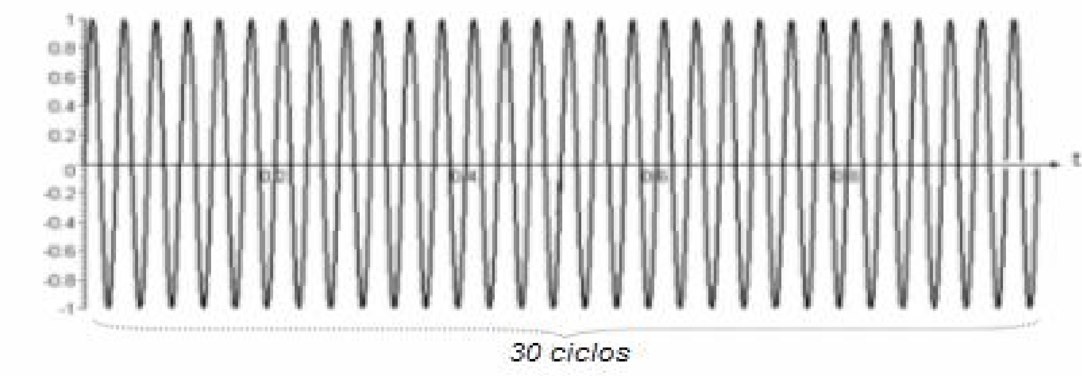


Fig. 18. Representação gráfica de y = sen 60π.t

Amplitude = 1

Período = 1/30 segundos (0,033 s)

Freqüência = 30 hz

Portanto, y_2 tem o dobro das vibrações de y_1. O som obtido (y_2) soa uma oitava acima.

V. SUGESTÕES DE ATIVIDADES

1. Ciclo Trigonométrico e o Movimento Oscilatório

Conteúdo:	Função Seno.
Objetivo:	Definir a Função Seno, como o valor da ordenada do ponto P.
Recursos:	Papel milimetrado ou malha; Régua, compasso, transferidor.

a) Construa o círculo trigonométrico no eixo de coordenadas (use papel milimetrado ou malha);

b) Marque as coordenadas dos pontos de intersecção entre a circunferência e os eixos coordenados;

c) A partir da coordenada (1,0) construa um ângulo de 60º, marque as coordenadas deste ponto;

d) Pela definição de seno do ângulo agudo, calcule o valor do seno;

e) Construa outros ângulos agudos e complete a tabela:

Ângulo	Coordenadas do Ponto (x,y)	sen α = $\frac{cat.op.}{hip.}$	sen α
60º			
45º			
α			

f) Compare os valores obtidos na coluna sen α com as coordenadas do ponto.

g) Como ficam os valores do seno caso o ponto P percorra na circunferência ângulos maiores que 90º?

Ângulo	Quadrante	Coordenadas do Ponto (x,y)	sen α
120º			
210º			
330º			
740º			

h) Analise a tabela e escreva o que observou.

2. Ciclo Trigonométrico e o Movimento Oscilatório – Seno Radiano

Conteúdo	Função Seno Radiano.
Objetivo	Compreender o conceito de Função Seno Radiano.
Recursos	Papel milimetrado ou malha; Barbante, linha ou similar.

a) Construa o círculo trigonométrico no eixo de coordenadas (use papel milimetrado ou malha);

b) Marque o ângulo de 1 radiano. (Use um barbante, linha ou similar);

c) Anote as coordenadas deste ponto;

d) Pela definição de seno do ângulo agudo, calcule o valor do seno;

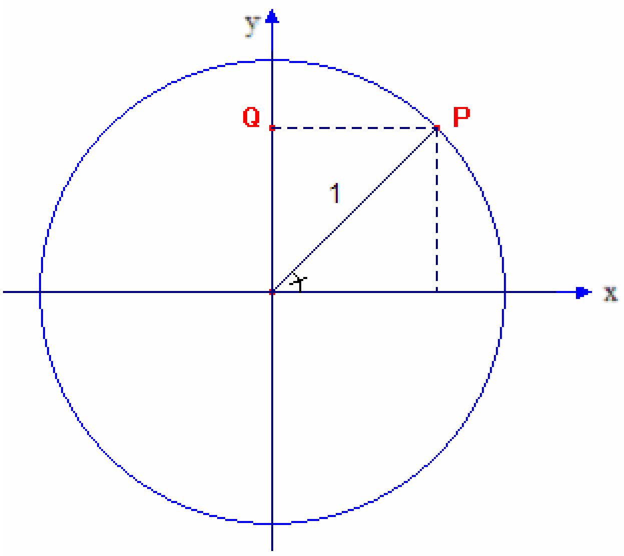
e) Construa outros ângulos e complete a tabela:

Ângulo	**Coordenadas do Ponto (x,y)**	**sen** α **=** $\frac{cat.op.}{hip.}$	**sen** α
1 rd			
2rd			
α			

3. Trajetória de um ponto P sobre uma Circunferência

Conteúdo	Função Seno - Representação Gráfica.
Objetivo	Compreender que o movimento de um ponto ao redor de uma circunferência, segundo a sua ordenada, descreve uma senóide.
Recursos	Régua, compasso. • Pode ser utilizado o software Cabri Geometric, Geogebra, ou similar.

Construa o gráfico da função que descreve a trajetória de um ponto P sobre uma circunferência, segundo a sua projeção no eixo y.



4. Identificando Período, Freqüência e Amplitude em uma Representação Gráfica

Conteúdo	Período, Freqüência, Amplitude.
Objetivo	Identificar o período, freqüência e amplitude; Reconhecer o deslocamento da ordenada e da abscissa.
Recursos	Régua, compasso • Pode ser utilizado um software de construção de gráficos, por exemplo: maple, winplot, e outros.

Construa os gráficos abaixo e dê o período, a freqüência e a amplitude:

a) $y = \text{sen}\ 2\pi\ t$

b) $y = 3.\text{sen}\ 2\pi\ t$

c) $y = 5\ \text{sen}\ 10\ \pi\ t + 2$

d) $y = 2 - 3.\text{sen}\ (8\pi\ t + \pi/2)$

e) $y = 0{,}03\ \text{sen}\ 440\ \pi.t$

VI. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABDOUNUR, J. O. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados.** 3ª Ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

KLINE, M. **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. México: Addison – Wesley Publishing Company, 1992.

LUCCAS, S. **Matemática e Música a harmonia perfeita**. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 1996.

MARTINS, N. S. M. **Movimentando gráficos de funções**. Monografia. (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, PR, 2001.

MÁXIMO, A. ALVARENGA, B. **Curso de Física – Vol 2**. 2ª Ed. São Paulo: Scipione, 1997.