TENDÊNCIAS METODOLOGICAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - UM CAMINHO

Ludovico Maior[1]

José Trobia[2]

RESUMO

A Educação Matemática tem sido alvo de constantes pesquisas. Todavia, longe de ser unanimidade entre os pesquisadores, cada um, apresenta uma metodologia que pode ser um caminho para o entendimento da matemática como linguagem das ciências na interpretação e análise dos fatos e relações que ocorrem na sociedade. Neste trabalho, foi feito uma breve explanação das tendências metodológicas, constantes nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2009), sendo que a ênfase foi dada a Resolução de Problemas, que em um primeiro momento abordou-se as estratégias de resolução e, posteriormente, como metodologia de ensino. Autores "consagrados" contribuíram para que se fizesse uma comparação com os resultados obtidos na implementação deste projeto intitulado: *Análise combinatória, esportes e conhecimentos em ação*, desenvolvido no Colégio Estadual Presidente Vargas, em Telêmaco Borba, Paraná no primeiro semestre do ano de 2009, como atividade integrante do PDE. O trabalho confirmou o prescrito nas DCEs sobre a necessidade urgente de uma mudança no ensino da matemática. Isso se justifica devido à visão linear que os alunos têm da matemática, uma vez que encontram muita dificuldade quando se deparam com problemas inseridos em um determinado contexto e, principalmente, quando precisam interpretar, se organizar e estabelecer estratégias de resolução e, não apenas, seguir modelos de uma forma mecânica, sem entender o quê e o porquê está se fazendo daquele modo, não participando da construção do seu próprio conhecimento.

Palavras chave: Educação Matemática. Estratégias de Ensino. Metodologias. Resolução de Problemas.

[1] Professor PDE do Colégio Estadual Presidente Vargas-Telêmaco Borba-PR. ludovicomaior@seed.pr.gov.br

[2] Professor Orientador e Mestre em Matemática, lotado no Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa -UEPG. jtrobia@uepg.br

ABSTRACT

The Mathematical Education has been detached of constant research. However, far from being unanimity between the researchers, each one, presents a methodology that can be a way for the agreement of the mathematics as language of sciences in the interpretation and analysis of the facts and relations that occur in the society. In this work, one brief communication of the methodological, constant trends was made in the Curricular Lines of direction of the State of the Paraná (2009), being that the emphasis was given the Solving Problems, that at a first moment approached the resolution strategies and, later, as education methodology. "Consecrated" authors had contributed so that a comparison with the results gotten in the implementation of this entitled project became: *Combinatorial Analysis, sports and knowledge in action*, developed in the President Vargas State College, Telêmaco Borba, Paraná in the first semester of the year of 2009, as integrant activity of the PDE. The work confirmed the prescribed one in the DCEs on the urgent necessity of a change in the education of the mathematics. This if justifies due to linear vision that the pupils have of the mathematics, a time whom they have lots of difficulty when they come across with inserted problems in a determined context and, mainly, when they need to interpret, organize themselves and establish resolution strategies and, not only, to follow models of a form mechanics, without understanding what and the reason the are proceeding that way that way, and then, not participating of the construction of their own knowledge.

Keywords: Mathematical Education. Teaching Strategies. Methodologies. Solving Problems

1- INTRODUÇÃO

Desde os tempos mais remotos, a matemática está atrelada à história da humanidade, sendo considerada como uma alavanca para o desenvolvimento e progresso das civilizações. A matemática esteve presente em todas as etapas da construção do conhecimento científico. A história da matemática nos mostra as mudanças que ocorreram na maneira de ensinar. O momento atual requer uma atenção especial, não só para o ensino de matemática, mas para educação de um modo geral.

A escola pública vem revendo seu papel e sua função social, assumindo a consciência da importância e responsabilidade que tem para com a sociedade, que em grande parte, encontra nela o único meio de acesso ao conhecimento. Nesse sentido, entendemos que as dificuldades, que nós educadores, professores de matemática encontramos no dia a dia da sala de aula, precisam ser mais estudadas e debatidas. Entre elas podemos destacar: a falta de interesse dos alunos, a não relevância de alguns conteúdos de ensino, metodologias inadequadas e, as próprias condições em que desenvolvemos a nossa prática educativa. Estes desafios implicam na busca de alternativas possíveis, para ensinar matemática.

Sabemos que a sociedade passa por transformações profundas, decorrentes do ritmo acelerado dos avanços científicos e tecnológicos. A educação não consegue acompanhar as mudanças resultantes dessas transformações e acaba ficando defasada. Na escola, ainda persistem os métodos tradicionais de ensino, como consequência da formação que tivemos, pois, a grande maioria dos professores, vem de uma formação, onde o ensino era centrado no professor. Nesse modelo de prática educativa, o professor era o “dono da verdade” e o aluno um mero receptor dos ensinamentos transmitidos. O que se ensinava era aceito sem questionamentos, quase não havendo espaço para discussões, prevalecendo, na maioria das vezes, o autodidatismo pedagógico imposto aos educandos.

Os fundamentos teórico-metodológicos da disciplina de matemática das Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná (2009) apontam à necessidade urgente de mudanças no ensino. Os conteúdos matemáticos em si mesmos, desvinculados de um contexto, pouco contribui para a formação dos alunos e, muitas vezes, servem apenas como um fator complicador. Desse modo é necessário que haja a interação da matemática com outras áreas do conhecimento, para que os alunos possam ser desafiados a perceber que ela não é uma ciência isolada.

As transformações sociais implicam em mudanças na educação e nessa perspectiva, ensinar matemática implica em ir além do simples ato de fazer cálculos, muitas vezes desprovidos de significados para os alunos. No desenvolvimento de sua prática educativa, o professor precisa ser instrumentalizado para ter clareza da importância de instigar os alunos a compreender melhor o conteúdo de ensino, desafiando-os, a fazer a interação com outras situações, onde a matemática não é tão evidente.

Para isso, é importante que o professor atue como articulador no processo ensino-aprendizagem, e faça uso de metodologias que venham de encontro às necessidades atuais da educação. Nessa perspectiva, o ensino da matemática pode contribuir para que o aluno não seja apenas um sujeito passivo que recebe informações, desconectadas da realidade, mas que as compreenda e, em vista delas, tome iniciativas e faça parte do processo de construção do próprio conhecimento.

2 - AS MUDANÇAS SOCIAIS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Vivemos em uma sociedade permeada pelos conhecimentos resultantes do avanço científico e tecnológico. O desafio da educação hoje, é acompanhar as mudanças que ocorrem em ritmo acelerado, com maiores progressos em menores intervalos de tempo. Segundo Parra e Saiz (1996), a realidade social vive em constante processo de transformação, que em determinados momentos da história humana, tornam-se verdadeiras revoluções, implicando na necessidade de mudanças para não perecermos. Na educação, os conteúdos de ensino, que ocupam o trabalho docente, tendem a mudar, à medida que a cultura vai sendo reconstruída. Por ser a escola um espaço de reconstrução cultural, quando ela não cumpre o seu papel, acaba comprometendo as múltiplas inter-relações, que esse espaço encerra, com todo o contexto social.

O objetivo da educação básica é assegurar ao aluno as condições necessárias para que ele possa se inserir e participar na sociedade. A escola é o espaço de educação formal em que o aluno vivencia situações diversificadas que favorecem o aprendizado e o diálogo com a comunidade.

Bicudo (1985) nos diz que, para o aluno compreender a realidade na qual está vivendo, e participar da mesma, é necessário aumentar a sua confiança para enfrentar desafios. Isso implica em ampliar os recursos necessários para que os mesmos possam obter êxito nas iniciativas que tomarem e requer mudanças na prática educativa.

3 - AS TENDÊNCIAS ATUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA – EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Com a deflagração de um processo de discussão coletiva direcionado pela Secretaria da Educação, envolvendo principalmente professores e pedagogos para se compor as Diretrizes Curriculares, a Educação Matemática que já vinha conquistando seu espaço passa a ser considerada oficialmente como campo de estudo.

O "professor de matemática" está sendo desafiado a ser substituído pelo "educador matemático" que vê a matemática como um campo investigativo, onde ele vai construir seus próprios métodos e não apenas seguir modismos de opinião pública.

A Secretaria de Estado da Educação por meio das Diretrizes Curriculares, (2009), apresenta as tendências metodológicas que compõe o campo de estudo da Educação Matemática: Etnomatemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas.

3.1 - ETNOMATEMÁTICA

Segundo D'Ambrosio (1987): Etno (sociedade, cultura, jargão, códigos, mitos, símbolos) + matema (explicar, conhecer) + tica (tchné, arte e técnica). Raízes sócio-culturais da arte ou técnica de explicar e conhecer. A etnomatemática prioriza a cultura local onde quer que o trabalho seja desenvolvido valorizando sempre a matemática presente nas diferentes culturas. Tem como ponto de partida o conhecimento prévio, isto é, o conhecimento adquirido com as experiências e observações fora do âmbito escolar dos alunos. Partindo dos conceitos informais trazidos pelos alunos, a etnomatemática, contraria a concepção de que todo conhecimento matemático é adquirido na escola, pois se vale desses conceitos e de situações existentes na comunidade escolar para formalizar os conceitos. O professor precisa se inteirar dos costumes, para perceber se os conceitos que os alunos têm sobre determinados assuntos são válidos, e assim saber o que pode ser mudado ou complementado. Isso exige muita disponibilidade do professor. Os principais trabalhos nesta linha são: D'Ambrosio (1986); Carraher, Carraher & Schlieman (1988), entre outros.

3.2 - MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática é conceituada por diferentes autores, alguns com conceitos mais detalhados, outros menos. Contudo, todos dão a entender que se trata da arte de transformar problemas da realidade em problemas para serem resolvidos em sala de aula, analisando os resultados.

Ao falar sobre as atividades de modelagem matemática em sala de aula, Burack (2004) apresenta as etapas para o encaminhamento e desenvolvimento desse trabalho: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução do (s) problema (s) e desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; análise crítica da (s) solução (es). De acordo com o autor, o grande desafio para o professor é que os problemas levantados com a pesquisa exploratória determinam o conteúdo matemático a ser trabalhado e, muitas vezes, diferem dos conteúdos trabalhados na série em que está se desenvolvendo esta atividade de modelagem. Cabe ao professor, romper com a sequência estabelecida, “abrir parênteses” e trabalhar com os problemas encontrados de acordo com o nível dos alunos. A modelagem, como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática na Educação Básica é uma estratégia desafiadora, que rompe as barreiras do ensino tradicional na perspectiva de um ensino, onde o aluno participa na construção dos conceitos e dos conhecimentos matemáticos.

3.3 - MÍDIAS TECNOLÓGICAS

De acordo com Moran (2007), o uso de novas tecnologias na escola está sendo implantado gradativamente. Este uso tem sem dúvida seus pontos positivos, no entanto, sabemos que, muitas vezes a tecnologia é usada sob o pretexto de modernização, tentando ocultar os problemas sérios que a escola enfrenta. As tecnologias precisam ser compreendidas como ferramentas que auxiliam o trabalho do professor, pois os conteúdos, as informações podem estar contidas em grande quantidade em um pequeno espaço como *CD-ROM*, *Pen Drive* e, até mesmo, estar disponíveis na *internet*, porém o professor é indispensável no processo de interpretação, de relacionamento, de julgamento, para fazer as considerações e tirar as conclusões, fazendo as complementações necessárias. No Paraná, no Portal Dia-a-Dia Educação (http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br), o professor tem disponível um *site* da disciplina de matemática (http://matematica.seed.pr.gov.br) que tem a finalidade de informar os professores, servindo como recurso de apoio a implementação de tecnologias na prática pedagógica.

3.4 - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A História da Matemática, de acordo com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2009), pode servir como referência na elaboração de atividades e problemas favorecendo o entendimento de conceitos matemáticos. Ela nos mostra que as grandes descobertas matemáticas surgiram da necessidade ou pela curiosidade em descobrir as relações entre medidas para se chegar a uma fórmula matemática, ou a uma constante numérica, como é o caso do π. Através da história da Matemática o estudante pode ser instigado a compreender como o conhecimento matemático é construído tornando-o, assim mais significativo para o aluno.

3.5 - INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

De acordo com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2009), a prática pedagógica da investigação matemática vem despontando como um caminho aceito e recomendado por muitos estudiosos como forma de proporcionar ao aluno uma melhor compreensão da disciplina. As atividades investigativas devem ser desafiadoras e preparadas com antecedência pelo professor, que poderá usar um mesmo texto com questões diferentes aos grupos participantes. Podemos dividir em três etapas a atividade de investigação: a introdução da tarefa, a sua realização pelos alunos com acompanhamento do professor e a discussão/reflexão entre alunos de grupos diferentes com a participação do professor.

3.6 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Das tendências metodológicas, para o ensino da matemática, entendemos que, por meio da resolução de problemas, é que a matemática se desenvolve por manter um elo, com todas as outras tendências da Educação Matemática. Os problemas são importantes porque trazem ideias novas, impulsionando os diversos ramos da matemática, muitas vezes sem estarem diretamente ligados. De acordo com Polya (2006) à medida do possível, é importante que os problemas sejam provocativos, pois quando o aluno é desafiado, suas emoções de entusiasmo na busca de solução são despertadas.

Para esse autor, se o professor apresentar aos alunos problemas que desafiem a curiosidade certamente vai despertar o interesse dos mesmos, para resolvê-los. A satisfação gerada, pela solução encontrada, pode ativar um talento natural para a matemática que poderá ser um instrumento profissional ou até mesmo a própria profissão. Isso significa dizer que ninguém pode saber o gosto de alguma coisa sem antes experimentá-la. O autor ressalta ainda que, os problemas precisam estar adequados ao nível dos alunos, isto é, nem tão difíceis para que não desanimem frente às dificuldades encontradas e nem tão fáceis para que não percam o interesse por julgarem fáceis demais.

Segundo Polya (2006), outra questão que não pode ser desconsiderada pelo professor é o momento da explicação de como se resolve um problema. É preciso deixar claro aos alunos que essa não é tarefa fácil, pois podemos encarar um problema de diferentes maneiras. Muitas vezes, o nosso entendimento do problema, quando lemos pela primeira vez é parcial, só vai se completando na medida em que lemos mais atentamente e, dessa forma, nos organizamos em busca da solução. Para resolver um problema não podemos seguir regras, ou simplesmente fazer o uso de algum algoritmo, pois os problemas quando bem formulados exigem muito mais que uma forma mecânica para resolver. Os problemas variam muito, mas de uma maneira geral, existem etapas que podem ajudar na resolução. Essas etapas não são rígidas nem infalíveis e podem variar quanto ao número, geralmente de três a cinco, podendo ser mais, ou menos.

Polya (2006) apresenta quatro etapas principais para resolução de problemas:

- Compreender o problema: quem vai resolver um problema, primeiramente precisa entender o que se pede, através de uma leitura atenta, ou até mais de uma, interpretando corretamente, para saber o que se pretende calcular. São partes importantes de um problema: a incógnita; os dados fornecidos pelo problema e a condição que deve ser satisfeita relacionando esses dados conforme as condições estabelecidas no enunciado.
- Elaboração de um plano: depois de interpretar o problema é preciso escolher uma estratégia de ação, que pode variar muito dependendo da natureza do problema. Pode se iniciar com o esboço de uma figura geométrica, com um gráfico, uma tabela ou um diagrama; fazer uso de uma fórmula; tentativa-e-erro sistemática, entre outras.
- Executar o plano: se o plano foi bem elaborado, não fica tão difícil resolver o problema, seguindo passo a passo o que foi planejado, efetuando todos os cálculos, executando todas as estratégias, podendo haver maneiras diferentes de resolver o mesmo problema. O importante é que o professor acompanhe todos os passos, questionando o aluno, podendo dar alguma ajuda, mas que o aluno se sinta o idealizador e realizador do plano.
- Retrospecto ou verificação: depois de encontrar a solução é hora de verificar se as condições do problema foram satisfeitas, se o resultado encontrado faz sentido. Pode-se questionar também sobre outras maneiras de resolver o mesmo problema, como também a resolução de outros problemas correlatos, usando a mesma estratégia.

Entendemos que todas as etapas mencionadas são importantes, mas se a primeira não acontecer a contento, nenhuma outra poderá levar ao objetivo final que é a resolução e o entendimento do problema. Uma leitura bem feita, para que o aluno consiga captar todas as informações contidas no enunciado do problema, isto é, investigar tudo o que o problema encerra, é mais que meio caminho andado para se chegar a solução. É papel do professor de Matemática, como educador, propiciar as condições necessárias aos alunos, através de problemas bem formulados. Conforme o nível de compreensão dos alunos, o professor pode ir adequando os problemas, para que os mesmos possam fazer uma leitura interpretativa. Cabe ainda ao professor, acompanhar e questionar o aluno, para saber se houve entendimento, auxiliando-o, quando ele apresentar dificuldades. Para Butts (*apud* Dante, 2005), primeiramente, é necessário distinguir um problema de um exercício. Segundo esse autor, o exercício serve apenas para treinar uma habilidade em praticar determinados processos algorítmicos, e o problema é descrito como uma situação, onde não se sabe de antemão por qual meio se chega à solução, não existindo nenhum algoritmo que possa previamente considerar como caminho.

3.6.1 - A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NUMA PERSPECTIVA METODOLÓGICA

A resolução de problemas, no final da década de 80, começa a ter uma nova dimensão, despontando como metodologia de ensino. Osborne e Kasten (1996) afirmam que usar um problema como recurso para desenvolver e introduzir tópicos de matemática pode ser considerado uma metodologia importante que pode contribuir com o trabalho do professor.

Considera-se como um problema toda situação que pode ser problematizada, tais como: jogos, em que se busca uma estratégia para vencer, qualquer tipo de atividade planejada, levantamento e seleção de informações, qualquer atividade que requeira uma atitude investigativa. Uma situação problematizada não se resolve simplesmente através de fórmulas ou aplicação de uma determinada regra, é necessário uma atitude de investigação mais profunda, onde a resposta encontrada não é mais importante do que o caminho percorrido para se chegar até ela.

Na Resolução de Problemas como metodologia de ensino, os conceitos e as técnicas operatórias são apresentadas aos alunos fazendo uma relação entre a ideia matemática e o contexto. Diniz (2001) afirma que a resolução de problemas é um caminho para se ensinar matemática. Nessa perspectiva, por meio da resolução de problemas, como ponto de partida, é possível introduzir novos conceitos, fazer a conexão com outros ramos da matemática e iniciar novos conteúdos. Na resolução de problemas, a comunicação é essencial, seja ela oral, escrita, ou através de desenhos. Isso possibilita ao professor, observar as mudanças de atitudes e acompanhar o progresso do aluno, bem como, interferir nas dificuldades encontradas, seja para o desenvolvimento das estratégias planejadas, ou mesmo para entender determinados conceitos.

4 - DESCRIÇÃO DO TRABALHO DESENVOLVIDO COM OS ALUNOS

O trabalho foi desenvolvido no Colégio Estadual Presidente Vargas, município de Telêmaco Borba, PR, em três turmas da segunda série do Ensino Médio, (A, B e C), do período da manhã, no primeiro semestre de 2009.

Como temos três turmas, trabalhamos de maneira diferente em uma delas, o segundo A. Nessa turma discutimos e exemplificamos as estratégias sugeridas por Polya (2006) para a resolução de problemas: interpretação do problema, elaboração de um plano, execução desse plano e finalmente a verificação. Em seguida, propomos alguns problemas para os alunos resolverem, apenas observando a atitude deles e os comentários que faziam. O resultado não foi o esperado, mas, percebemos que alguns deles demonstraram iniciativa com sucesso, outros, ainda tiveram bastante dificuldade, pois o que havia sido trabalhado com eles, ainda não era o suficiente.

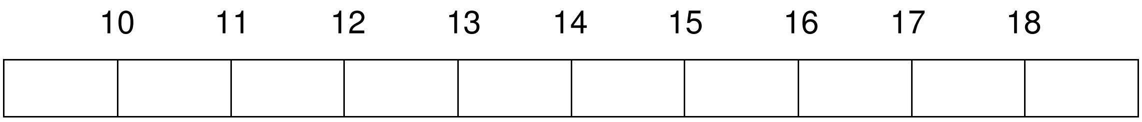
Em outras duas turmas, B e C, passamos os mesmos problemas, sem apontar caminhos, para que cada um resolvesse como achasse melhor. Poucos alunos resolveram os problemas dados. A maioria deles mostrou não ter entendido o problema, chegando a respostas que não tinha nada a ver com a pergunta do problema. Constatamos que a maioria dos alunos do segundo ano do Ensino Médio não conseguiu resolver problemas em nível de sexta série.

No desenvolvimento desse trabalho, a atitude de alguns alunos para resolver os problemas propostos, nos chamaram à atenção. Para ilustrar a situação, apresentamos o seguinte problema:

Um alfaiate comprou uma peça de tecido de 20 m de comprimento. A cada dia ele faz um corte retirando 2 m dessa peça. Ele trabalha todos os 7 dias da semana ininterruptamente. Se ele fizer o primeiro corte nessa peça no dia 10 de um determinado mês, em que dia ele fará o último corte?

Na turma A, trabalhamos com as estratégias de resolução de problemas. Para isso, resolvemos com os alunos, alguns problemas, discutimos sobre a importância da interpretação bem feita e de uma análise mais profunda sobre os dados e sobre as condições do problema. Mesmo assim, no problema, exemplificado acima, alguns alunos, ainda, foram precipitados, dizendo de imediato que o último corte seria dia 20. Outros pensaram um pouco mais e disseram: *“não professor, conta o primeiro e o último dia, então o último corte será no dia 19”.*

Finalmente, outro grupo de alunos, correspondendo a um terço da turma, buscou seguir as estratégias de resolução, elaborando um plano e executando-o, chegaram a resposta certa do problema:



Somente os que se utilizaram, de um desenho, descobriram que o último corte seria dia 18, pois para dividir os últimos 4 m em duas partes iguais é necessário apenas um corte.

Nas outras turmas B e C, em que deixamos os alunos livres para resolver os problemas, pois ainda não tínhamos discutido as estratégias de resolução de problemas, um único aluno acertou. Nessas turmas perguntamos individualmente aos alunos sobre a resposta do problema e quase todos foram precipitados em responder, 20 ou 19.

Apresentamos abaixo, outro problema, geralmente proposto para a sexta série, quando se trabalha equação do primeiro grau, como complemento do conteúdo.

João e Pedro fizeram juntos 40 cestas em um jogo de basquete. João fez 10 cestas a mais que Pedro. Quantas cestas fizeram cada um?

Os mais precipitados já disseram: Um fez 30 e o outro fez 10. Alguns fizeram por tentativas, procurando dois números cuja soma seja 40, e um deles tenha 10 unidades a mais que o outro. Outros fizeram uma operação de subtração: 40 – 10 = 30 deixaram o 10 de lado e dividiram o 30 em duas partes iguais a 15, em seguida adicionaram o 10 ao 15, encontrando o número de cestas feitas por João. Alguns tentaram resolver por meio de um sistema de equações, se equivocando na montagem do sistema e com muita dificuldade na resolução. O que mais nos surpreendeu é que nenhum aluno resolveu por meio de uma equação do primeiro grau, como é trabalhado na sexta série, conforme exemplificamos a seguir:

$$\text{Pedro} \rightarrow x$$

$$\text{João} \rightarrow x + 10$$

$$x + (x + 10) = 40$$

Observamos durante as aulas em que trabalhamos com as estratégias de resolução de problemas, que a maioria dos alunos não tem o hábito de interpretar. Apenas observam, superficialmente, os dados mais evidentes, sem fazer a leitura com uma análise mais profunda da situação. Dessa forma, não percebem detalhes que são importantes e decisivos no processo de resolução de problemas. Muitos alunos alegaram que nunca tiveram a oportunidade de trabalhar com problemas diferentes daqueles propostos pelo professor, como complemento de um conteúdo específico. Os problemas que estavam habituados a resolver eram baseados em problemas padrões, em que o professor fazia alusão a um determinado modelo e o trabalho do aluno consistia apenas em aplicar determinadas fórmulas ou algoritmos. Analisando os depoimentos dos alunos, percebemos a necessidade da problematização para que eles possam traçar o seu caminho, e não apenas seguir o caminho traçado por outros.

5 - INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA - UNIDADE DIDÁTICA

5.1- Princípio Multiplicativo

Nossa primeira intenção foi trabalhar a unidade didática, material esse que produzimos como professor participante do PDE. Essa unidade possui uma abordagem centrada em um tema específico, no caso, Análise Combinatória, contendo textos e atividades que objetivam o aprofundamento teórico/metodológico do mesmo. Como o único data show da escola está estragado, consultamos os alunos sobre a preferência entre a TV Multimídia com a utilização do *pen drive* e o retroprojetor. A turma ficou dividida e por uma questão de melhor visibilidade, preferiram o retroprojetor, pois as $TV_{s,}$ além de terem uma tela pequena, em relação a projeção do retro, estão instaladas num canto da sala. Isso dificulta a visibilidade para uma fileira de alunos.

Reproduzimos toda a unidade didática em transparências e introduzimos o assunto, contando a história do futebol, desde a sua origem até os dias de hoje.

Comentamos sobre as diferentes competições, a nível Estadual, Nacional, Continental e Mundial, falando sobre o regulamento e as diferentes formas de disputa dos campeonatos de futebol, sempre abrindo espaço para as colocações dos alunos.

Ao final da abordagem sobre o tema apresentamos um problema, fazendo comparações com as situações que deram origem ao estudo da Análise combinatória, nos chamados jogos de azar. Esses jogos começaram a ser estudados por Tartáglia (Gago), no período do Renascimento. Tartáglia começou o estudo interessado em descobrir o número de resultados possíveis em jogos, tais como o baralho, lançamentos consecutivos de moedas ou dados. Nesses estudos não pudemos deixar de mencionar o "Stomachion" que foi considerado como um indício da Análise Combinatória, que ocorreu no século III AC. Continuamos falando sobre a Análise Combinatória e suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Após fazermos o comentário, voltamos ao problema proposto conforme o enunciado abaixo:

Observe a seguinte situação e tente responder:

A equipe de futebol do Flamengo vai disputar três partidas numa semifinal do campeonato carioca. A primeira contra o Botafogo, a segunda contra o Vasco e a terceira contra o Fluminense. Considerando os jogos para o Flamengo, na ordem como as partidas acontecem de quantos modos diferentes poderá ser essa sequência de resultados. Considere apenas os resultados de vitória, empate ou derrota, sem considerar o placar.

Ainda sem falar sobre o princípio multiplicativo, deixamos que eles resolvessem como achassem melhor. As respostas foram surgindo imediatamente, sem muita reflexão por parte de alguns alunos e, por conseguinte quase todas incorretas. A maioria deles procurou enumerar todos os resultados possíveis, mas primeiramente sem organização, não seguindo uma determinada ordem. Assim, durante o tempo, reservado para a resolução foram surgindo respostas, nem sempre certas, a maioria delas faltando algumas situações possíveis. A falta de organização, ao enumerar os possíveis resultados, levou os alunos a esquecerem de algumas possibilidades e repetirem outras. Percebemos que alguns alunos se perderam na hora de enumerar todas as situações possíveis, no entanto, retomaram o problema, se organizaram e seguindo uma determinada ordem, chegaram ao resultado desejado. O modo como estes alunos enumeraram os possíveis resultados, foi o mesmo que tivemos a intenção de apresentar para eles, apenas com alteração na ordem das colunas.

V, V, V	E, V, V	D, V, V
V, V, E	E, V, E	D, V, E
V, V, D	E, V, D	D, V, D
V, E, V	E, E, V	D, E, V
V, E, E	E, E, E	D, E, E
V, E, D	E, E, D	D, E, D
V, D, V	E, D, V	D, D, V
V, D, E	E, D, E	D, D, E
V, D, D	E, D, D	D, D, D

Neste momento discutimos como fazer o cálculo, sem enumerar todos os resultados possíveis, pela inviabilidade em certos casos, quando temos um número grande de elementos. Chegamos então, ao princípio multiplicativo. Um aluno apresentou uma fórmula para se calcular, o número de resultados possíveis, quando se pode repetir o mesmo elemento, quantas vezes quiser, até o total de elementos do grupo:

n = número de agrupamentos possíveis.

$n = x^y$ x = número total de elementos que eu pretendo agrupar.

y = número de elementos de cada grupo.

O aluno explicou:

"professor, se eu quiser calcular, quantos números diferentes, podendo repetir os algarismos, eu posso escrever com os algarismos 1, 2 e 3 eu faço:

$n = x^y$

$n = 3^3$, *ou seja,* $n = 27$.

Portanto, posso escrever 27 números diferentes de três algarismos usando também três algarismos e podendo repetí-los no mesmo número. Se eu pretendo saber, quantos números diferentes de dois algarismos eu posso escrever com os algarismo 1, 2, 3, 4 e 5, (podendo repetir os algarismos) eu uso a fórmula e determino:

$n=x^y$

$n = 5^2$, *isto é,* $n = 25$*".*

Concordamos com o aluno, lembrando que a fórmula é válida somente para os casos em que podemos repetir os elementos para compor o grupo, como é o caso dos algarismos para compor números, letras usadas em placas de carros, senhas, bem como o problema que acabamos de resolver. Complementamos, falando sobre o princípio multiplicativo, e a importância da organização, de se estabelecer uma estratégia para resolver um problema.

Apresentamos mais alguns problemas, resolvendo-os, com a participação dos alunos. Após termos interagido com eles na resolução desses problemas, entregamos em papel impresso uma relação de atividades, contemplando principalmente, a resolução de problemas.

Dividimos a turma em grupos de 3 alunos, orientando-os para discutirem as atividades. Durante o tempo em que acompanhamos de perto, houve envolvimento total dos alunos, nos seus grupos.

Os alunos, desenvolveram o complemento dessas atividades, como trabalho extra classe, em razão da necessidade de apressarmos a implementação deste projeto, devido à mudança no cronograma do grupo de trabalho em rede – GTR – modalidade de ensino à distância, com o objetivo da formação continuada dos professores da rede pública de ensino. Isso ocorreu, porque a implementação do projeto, foi o tema de discussão no GTR. Neste espaço de tempo, nos propusemos a orientar os alunos, nas horas atividades do mesmo período e também em período contrário. A maioria dos problemas foram resolvidos sem muita dificuldade. Um dos problemas mais discutidos tinha o seguinte enunciado:

Para identificar um carro e o seu proprietário, além do número do Renavan e outros dados do veículo o meio mais usado e prático é através das placas. As placas nos últimos anos sofreram alteração, devido ao aumento no número de veículos e porque os sistemas anteriores não mais podiam dar conta do total da frota de veículos.

Atualmente em nosso país cada estado da federação tem uma seqüência de letras e números que podem ser usados para o emplacamento de seus veículos novos. É uma sequência de três letras maiúsculas, seguidos de quatro dígitos, não podendo haver a sequência 0000. Para cada Estado existem sequências de letras que podem ser utilizadas e a numeração é comum em todos os Estados podendo variar de 0001 até 9999. O Estado do

Paraná foi quem iniciou o atual sistema de emplacamento, por isso as placas aqui no Estado vão a partir de AAA-0001 até BEZ-9999.

No Estado de São Paulo, onde temos a maior frota do país, a série inicial para o emplacamento é BFA-0001 e pode ir até GKI-9999. Até quantos veículos podem emplacados nesse estado com o atual sistema?

Os alunos acharam muito difícil a resolução por não ter uma fórmula que permita o cálculo direto, mas sim por etapas que exigem raciocínio matemático e uma grande quantidade de cálculos. As respostas foram bem diversas, inclusive alguns procuraram professor particular para ajudá-los na resolução. Infelizmente não obtiveram sucesso, pois foram orientados a utilizar a fórmula de arranjos simples, o que não ajuda em nada para chegar a solução. Os alunos na grande maioria não conseguiram resolver o problema, ou quando resolveram, encontraram respostas incorretas, com um número possível de placas muito pequeno. Os alunos não perceberam que o resultado encontrado era incoerente, pois não poderia atender a maior frota de carros do país.

Contudo, apesar das reclamações da maioria dos alunos e da ajuda de professor particular não ser suficiente, teve dois grupos de alunos que obtiveram êxito total na iniciativa. Veja como eles resolveram e se propuseram a ajudar os colegas a resolver:

*"Para cada série de letras, é possível emplacar 9999 carros já que não pode haver a sequência 0000. Mantendo as duas primeiras **BF** e mudando apenas a terceira podemos ter 26 X 9999 placas diferentes, já que são permitidas o uso de 26 letras.*

26 X 9999=259974 placas diferentes.

*Para cada letra que eu utilizar na segunda posição eu vou ter 259997 placas diferentes. Como são 21 letras a partir da letra **F** letras, portanto eu terei 259997 X 21= 5459937 possibilidades de placas diferentes, todas com a letra **B** na primeira posição e utilizando na segunda posição todas as letras a partir do **F** com todas as possibilidades de variação na terceira posição.*

*Começando com a letra **C**, eu terei: 26 x 26X9999= 6759324 possibilidades, também acontecendo o mesmo com as letras **D**, **E** e **F**.*

*Como essas séries começado com as letras **C**, **D**, **E** e **F** são totalmente reservadas para o Estado de São Paulo e cada uma delas permite um número de 6759324 placas diferentes temos nessas séries:*

6759324 X 4 =27037296 possibilidades.

*A série começada por **G**, temos na segunda posição as letras de **A** até **J** todas as possibilidades, portando:*

10 X 26 X 9999= 2599740 possibilidades.

*Finalmente, começando com a letra **G**, tendo o **K** como segunda letra e na terceira a variação de **A** até **I** temos: 9 X 9999= 89991.*

Somando essas possibilidades teremos:

Placas de BFA 0001 até BZZ 9999 temos: 21 X 26 X 9999= 5459454.

Placas de CAA 0001 até CZZ 9999 temos: 26 X 26 X 9999= 6759324.

Placas de DAA 0001 até DZZ 9999 temos: 26 X 26 X 9999= 6759324.

Placas de EAA 0001 até EZZ 9999 temos: 26 X 26 X 9999= 6759324.

Placas de FAA 0001 até FZZ 9999 temos: 26 X 26 X 9999= 6759324.

Placas de GAA 0001até GJZ 9999 temos: 10 X 26 X 9999= 2599740.

Placas de GKA 0001 até GKI 9999 temos: 09 X 9999= 89991.

Total= 35 186 481".

O problema que no início gerou polêmica e foi motivo de reclamação por parte da maioria dos alunos, tornou-se motivo de satisfação para outros, por terem vencido um desafio e ajudarem os colegas a chegaram a um entendimento, com exceção de alguns, que disseram que estes problemas são somente para "CDF".

5.2 - Principio Aditivo

Introduzimos o assunto com o seguinte problema:

No início do ano letivo o professor de Educação Física passou duas listas aos alunos de uma turma. Uma para inscrição no curso de futsal e outra para o curso de futebol, podendo cada aluno fazer a opção por um ou pelos dois cursos, pois as aulas seriam em dias diferentes. No final da aula o professor constatou que todos os alunos fizeram a inscrição em pelo menos um curso. O total de alunos inscritos para o futsal foi 17 e o total para o futebol foi 30 e que

12 haviam feito a inscrição nos dois cursos. Qual é o número de alunos dessa turma?

O problema foi facilmente entendido e resolvido pelos alunos, visto que no ano anterior trabalharam com o conteúdo nas operações com conjuntos.

Apesar de não utilizarem a simbologia dos conjuntos como foi trabalhado anteriormente, fizeram uso do mesmo raciocínio, trabalhando apenas com as operações, sem fazer alusão à teoria dos conjuntos.

Veja o modo como os alunos resolveram o problema e a explicação justificando o processo:

"17 + 30 -12 = 35.

Nós adicionamos o número de alunos que fizeram inscrição para o futsal com o número de alunos que fizeram inscrição para o futebol, em seguida subtraímos 12, porque foram contados duas vezes, os que fizeram a inscrição nos dois cursos. Com conjuntos, é muito complicado, assim é bem mais fácil de fazer".

Neste momento aprovamos o raciocínio do aluno mostrando a ele e aos outros colegas que eles utilizaram o mesmo raciocínio da teoria dos conjuntos, mas de forma mais direta. Vejam o que acontece aplicando a teoria dos conjuntos:

Sendo A, o conjunto de inscritos para o Futsal e B, o conjunto dos inscritos para o futebol temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

A interseção é exatamente o número de alunos que fizeram a inscrição nos dois cursos e que vocês subtraíram depois de terem efetuado a soma.

Apresentamos, também, a solução através de diagramas e, em seguida, distribuímos algumas atividades. A maioria dos alunos desenvolveu as atividades com sucesso.

5.3 - Permutação Simples

Por ser em período do ano em que ocorrem os campeonatos estaduais de futebol e o paulista é o de maior interesse dos alunos, foi proposto o seguinte problema:

Conforme regulamento do campeonato Paulista, as quatro equipes melhores classificadas na primeira fase (duas de cada grupo) disputam as fases finais do campeonato. Considerando que São Paulo, Palmeiras, Santos e Corinthians vão disputar essa fase, de quantas maneiras diferentes poderá ocorrer a classificação final desse campeonato até o quarto lugar?

Ao apresentarmos esse problema a maioria dos alunos resolveu de forma direta, aplicando o princípio multiplicativo. Os demais começaram a resolver utilizando o diagrama da árvore. Contudo, nem concluíram o diagrama e já perceberam qual seria o resultado. Comentamos com eles sobre esses agrupamentos em que os elementos em todos os grupos permanecem os mesmos mudando simplesmente a ordem. Explicitamos que se trata de um caso particular do principio multiplicativo que denominamos permutação. Após esse comentário, eles facilmente chegaram à fórmula: $\mathbf{P_n = n!}$

5.4 Permutação com Repetição

Depois de trabalharmos rapidamente com permutações simples apresentamos um problema com elementos repetidos:

A professora de Química pretende fazer uma senha para usar em seu computador usando as letras de seu nome em uma ordem qualquer. A senha deve ter cinco caracteres em letras minúsculas (a, l, a, n, a), pois são as letras que formam o nome da professora: *Alana*. Quantas possibilidades diferentes terá a professora para fazer sua senha nestas condições?

Os alunos, particularmente, aqueles que não têm paciência para pensar, já foram respondendo que tem 120 possibilidades. Outros argumentaram que se trocar de ordem o **a** com outro **a** não forma uma senha diferente. Começaram a discutir, como seria feito o cálculo, alguns montando todas as possibilidades de sequências, outros fazendo divisões, até que um aluno fez comparação com o problema trabalhado no principio aditivo.

"Se quando foram somadas duas vezes a gente diminuía uma, agora que foi contada a permutação de três letras iguais e não formam uma senha diferente tem que dividir".

Nesse momento, elogiamos a resposta do aluno, complementando:

*Se calcularmos através do fatorial de cinco o número de permutações possíveis, estaremos considerando indevidamente as permutações com as letras **a**. Se considerarmos indevidamente, podemos corrigir o nosso "erro" desfazendo através da operação inversa, ou seja dividindo pelo fatorial de três.*

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

Podemos generalizar esse raciocínio, para n elementos, supondo:

α *elementos iguais a A*

β *elementos iguais a B*

. . .

. . .

. . .

χ elementos iguais a M

Num total de $\alpha + \beta + ... + \chi = n$ elementos.

O número de permutações distintas que podemos obter com esses elementos é:

$$P_n^{\alpha, \beta, ..., \chi} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!...\chi!}$$

Apresentamos aos alunos uma relação de problemas, deixamos que discutissem durante a aula. Explicamos que quando um deles tivesse dificuldade, poderia pedir ajuda ao colega e, assim a maioria dos problemas iriam ser resolvidos, alguns durante a aula e outros como atividades extra-classe.

Um item de um problema que parece muito simples é que causou maior discussão e não foi resolvido antes que apontássemos o caminho ou déssemos alguma pista.

No problema abaixo, o item **b**, é que gerou mais discussão, e os alunos não encontraram a saída:

Com os algarismos: 1, 2, 3, 4 e 5:

a) Quantos números de cinco algarismos distintos podemos escrever?

b) Quantos números de cinco algarismos distintos e divisíveis por três, podemos escrever?

c) Quantos números pares de cinco algarismos distintos podemos escrever?

d) Quantos números maiores que 40000 podemos escrever, sem repetir algarismo?

A maioria dos alunos calculou o número de permutações possíveis e dividiu o resultado por três. Somente depois de bastante discussão, um aluno começou a formar números com várias sequências diferentes desses algarismos e com o uso da calculadora efetuou a divisão por três e concluiu que todos os números formados por esses cinco algarismos são divisíveis por três, retomando, assim, o critério de divisibilidade por três.

5.5 - Arranjos Simples

O problema apresentado para introduzir o conteúdo é um problema bem familiar para quem gosta de futebol:

Quantas partidas terão o Campeonato Brasileiro de Futebol da primeira divisão deste ano (2009), em que vinte equipes participam dessa competição, sendo que o regulamento atual estabelece a forma de disputa por pontos corridos, em que cada time joga contra todos os demais participantes em dois turnos, com jogos de ida e volta, ou seja, uma partida como mandante, na própria "casa" e outra como visitante, na "casa" do adversário?

Rapidamente surgiram as primeiras respostas: 760. Perguntamos como chegaram ao resultado.

"São 20 times, cada um joga 19 partidas em casa e 19 fora, que dá 38 e 20x38 dá 760".

Solicitamos aos alunos que fizessem uma nova leitura do problema e procurassem ver se não esqueceram nenhum detalhe. Enquanto discutíamos com um grupo de alunos, outros em silêncio procuravam resolver.

Logo em seguida veio outra resposta: 380

"Como são 20 equipes que participam do campeonato, e cada equipe joga 38 vezes, eu posso multiplicar o 20 por 38 e dividir o resultado por 2 (porque cada jogo envolve duas equipes) e obter o número total de jogos.

(20 X 38): 2 = 380".

Nesse momento quem tinha dado a resposta 760, percebeu que tinha esquecido desse detalhe. Em seguida, outra resposta surgiu:

"*Como são 20 equipes, cada rodada terá 10 partidas e como são 38 rodadas, o número de partidas será 10 X 38 = 380".*

Comentamos as respostas dos alunos, acrescentando que podemos calcular aplicando o principio multiplicativo, contando os jogos que os times jogam como mandantes, pois ao contarmos todos os jogos em "casa" de cada time contamos todos, uma vez cada. (20X19= 360)

Com essa oportunidade, introduzimos o conceito de arranjos, falando que são agrupamentos de **p** elementos que podemos formar com **n** elementos distintos, sendo $p \leq n$, em que cada grupo formado vai diferenciar dos outros, pela ordem ou pela natureza de seus elementos.

No problema acima nós temos: n = 20 e p = 2, ou seja, arranjo de vinte elementos tomados dois a dois ($A_{20,\,2}$).

Podemos também, com auxílio dos fatoriais, apresentar uma fórmula para o cálculo de arranjos simples.

$A_{n,\,1} = n$

$A_{n,\,2} = n.\,(n-1)$

$A_{n,\,3} = n.\,(n-1).\,(n-2)$

$A_{n,\,4} = n.\,(n-1).\,(n-2).\,(n-3)$

.   .

.   .

.   .

$A_{n,\,p} = n.\,(n-1).\,(n-2).\,(n-3).\ldots.\,(n-p+1)$

Multiplicando o segundo membro da igualdade por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, encontramos a fórmula do arranjo:

$$A_{n,\,p} = n.\ (n-1).\ (n-2).\ (n-3).\ldots.(\ n-p+1\ )\ .\ \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Retornando ao problema do número total de jogos do campeonato Brasileiro de Futebol:

$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $\qquad$ n = 20 e p = 2

$$A_{20,\,2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20.19.18!}{18!} = 20.19 = 380$$

Após a resolução de alguns problemas, um aluno perguntou se poderia fazer direto a fórmula do arranjo. Acreditamos que é interessante ilustrarmos aqui o momento em que começamos a instigar o aluno a pensar. "*Eu perguntei, como direto?*" Ele falou: *"Quando eu for calcular, por exemplo, $A_{5,\,3}$ eu começo pelo cinco e coloco três números, assim: 5X4X3= 60".*

Com essa colocação do aluno fizemos o seguinte comentário: *"está certo, você pode calcular colocando como primeiro fator o valor de **n** e em seguida tantos fatores quanto for o valor de **p** em ordem decrescente, sendo que para cada fator terá uma unidade a menos que o anterior, aplicando assim o princípio multiplicativo".*

5.6. - Combinação Simples

Fazendo novamente um comentário sobre os jogos de azar que deram início ao estudo da análise combinatória propusemos um problema para que eles resolvessem com o seguinte enunciado:

Com quatro cartas de baralho diferentes, de quantos modos podemos formar pares com essas cartas? Obs.: considerem um rei (K), um valete (J), uma dama (Q) e um ás (A).

Alguns alunos aplicaram a fórmula do arranjo, encontrando 12, como resultado, outros fizeram a permutação de quatro elementos encontrando 24, enquanto os demais procuravam organizar os pares. Solicitamos aos que usaram fórmula para o cálculo, que formassem pares, verificando quantos eram possíveis e se o resultado coincidia com a resposta obtida com o uso da fórmula. Foi nesse momento que eles perceberam que nesse caso a mudança de ordem não gera um novo agrupamento. Os pares que eles conseguiram formar foram apenas 6: (K, J); (K, Q); (K, A); (J, Q); (J, A) e (Q, A).

Os alunos comentaram entre eles:

"Se eu tiver (K, J) ou (J, K) tenho o mesmo par, assim acontecendo também com os outros pares".

Entre os comentários ouvimos a comparação que os alunos fizeram com outro problema resolvido anteriormente, em que, propusemos que calculassem o número total de apertos de mão, ao término de uma reunião com oito pessoas. Nessa reunião, cada pessoa ao se despedir trocou um aperto de mão com as outras sete, Dante (2005).

Após a participação dos alunos, que demonstraram terem entendido o problema, complementamos concordando com eles e apresentamos novas situações:

"Sim, este problema é semelhante ao problema anterior, pois se João cumprimenta Maria, vou contar apenas um cumprimento, não vou contar o cumprimento de João e o de Maria. Assim, também, se na Mega Sena forem sorteadas as dezenas: 12, 25, 39, 40, 51 e 55 todas as permutações possíveis com essas dezenas, constituem o mesmo resultado, pois a ordem como foram sorteadas as dezenas não faz nenhuma diferença".

A partir dessa explicação, demos alguns exemplos dessas dezenas em outra ordem para que eles entendessem que neste caso, a ordem não importa.

Como para este tipo de jogo não importa a ordem, as permutações não são consideradas um possível resultado diferente. Sequências como estas em que a ordem não importa são chamadas de **Combinação**.

Para o cálculo do número de combinações possíveis podemos determinar o número possível de arranjos, desconsiderando as permutações.

Assim, o problema: Qual o número de pares que podemos formar com quatro cartas diferentes, de baralho? Podemos resolver da seguinte maneira:

.

$$C_{4,\,2} = \frac{A_{4,2}}{P_2} = \frac{12}{2} = 6$$

Generalizando, teremos o número de combinações simples de **n** elementos, em grupos de **p** elementos cada, é igual ao número de arranjos de **n** elementos tomados **p** a **p**, dividido por **p**!, Isto é:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Portanto teremos:

$$\boxed{C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Agora vamos voltar ao problema da Mega Sena. Se um apostador quiser ter a certeza absoluta de ganhar na Mega Sena, quantas apostas diferentes com 6 dezenas em cada cartão deverá fazer?

Para determinarmos o número de apostas diferentes escolhendo 6 dezenas dentre as 60 possíveis precisamos calcular, as combinações de 60 elementos tomados 6 a 6.

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{60,\,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60.59.58.57.56.55.54!}{6!.54!} = 50063860$$

Resolvemos alguns problemas em sala de aula, e apresentamos aos alunos, atividades, contendo outros problemas. Estas atividades foram realizadas em grupos, em outros horários. Propomos orientá-los nas horas atividades, principalmente, no período da tarde, ou mesmo no período da manhã se faltasse algum professor.

Poucos alunos nos procuraram. Quase todos os grupos desenvolveram a maioria das atividades a contento. Comentamos os problemas, resolvendo-os, no quadro de uma ou mais maneiras diferentes, com a participação dos alunos, como fizemos nas vezes anteriores.

Após o desenvolvimento das atividades propostas no decorrer desse trabalho, apresentamos aos alunos, uma atividade complementar para avaliarmos formalmente, se os objetivos foram alcançados.

6 - AVALIAÇÃO

A avaliação desse projeto, ocorreu durante todo processo de implementação e foi distribuída em quatro etapas: apresentação do projeto, introdução dos conteúdos a partir de um problema, desenvolvimento das atividades, e avaliação formal.

Na apresentação do projeto, os alunos foram bem curiosos, fazendo perguntas, demonstrando interesse, inclusive querendo que antecipássemos alguns assuntos, que seriam tratados mais tarde.

Durante todo processo percebemos a ansiedade e a precipitação de alguns alunos, para chegar à resposta, mesmo antes de ter entendido completamente o problema. Percebemos que quando retomávamos o problema, questionando-os, ou quando, os mesmos observavam com mais atenção os comentários que seus colegas faziam, iam se convencendo que alguma coisa passou despercebida.

Os problemas que propusemos antes do início da utilização da unidade didática, foram resolvidos de maneira diferente, do modo como geralmente se trabalha com um conteúdo específico. Por exemplo: problemas que se resolvem através de uma equação, quando se trabalha com equações do primeiro grau, no entanto, nenhum aluno resolveu por meio de uma equação, mas chegaram a resposta certa por outro caminho.

Na introdução de um conteúdo, através de um problema, os alunos foram bem participativos, à medida que fomos fazendo perguntas para explorar suas ideias, percebemos que eles tiveram mais facilidade para que chegar à conclusão.

Na avaliação formal, a maioria dos alunos conseguiu desenvolver as atividades a contento, e quando questionados sobre o projeto, fizeram algumas colocações, um pouco contraditórias, como: *"gostamos muito do envolvimento da matemática com o futebol; deveria trabalhar mais com outros esportes e menos com o futebol; os problemas foram muito difíceis, pois não tem um jeito só de resolver; assim ficou muito mais fácil de resolver os problemas, quando a gente estuda o problema antes de resolver".*

Na avaliação sobre o desenvolvimento do projeto, os alunos não fizeram nenhuma crítica, em relação à metodologia utilizada, apenas se referiram as dificuldades que eles possuem para compreender os conteúdos de matemática. Outros disseram que os problemas estavam muito difíceis e ainda, que houve muita conversa durante a resolução das atividades em grupos. Entretanto, a grande maioria falou muito bem e até com alguns elogios exagerados e descabidos.

7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o processo investigativo foi voltado para a resolução de problemas, primeiramente com as estratégias de resolução e posteriormente como metodologia de ensino.

Em se tratando de estratégias de resolução de problemas, constatamos que as mesmas contribuem para aluno se organizar, refletir e entender o sentido dos problemas propostos, favorecendo uma interpretação mais coerente, para que os mesmos não incorram tanto em resultados sem nenhuma lógica. Isso pôde ser evidenciado quando aplicamos os mesmos problemas em turmas diferentes, de mesmo nível.

Em duas turmas, B e C, do segundo ano do Ensino Médio, sem antes ter trabalhado as estratégias de resolução, seguindo as etapas sugeridas por Polya e, em outra turma, o segundo A, após ter resolvido vários problemas trabalhando com essas estratégias. Essa comparação nos possibilitou compreender que o domínio de cálculos, utilizando fórmulas e algoritmos é importante e condição necessária, mas só isso não basta, para que o aluno seja capaz de pensar e compreender a importância da estrutura matemática, e saber utilizá-la em outros contextos com novas situações.

Nessa perspectiva, entendemos que é importante mudar a maneira de realizar a nossa prática educativa. Essa mudança precisa acontecer desde as séries iniciais. Para isso, é necessário propor atividades que desafiem os alunos a participar do processo ensino-aprendizagem. No entanto, quando tentamos implantar algo diferente do que eles estão acostumados a fazer, encontramos resistência por parte de alguns alunos. Essa resistência, possivelmente decorre de um ensino que não instiga os alunos a refletir sobre as atividades propostas para chegar a uma resposta. Isso dificulta um pouco o desenvolvimento de um trabalho diferenciado em sala de aula, e representa um desafio que precisamos enfrentar em nossa prática educativa.

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino, possibilitou a participação do aluno na construção do próprio conhecimento. Nesse processo, mesmo antes de ter o conteúdo sistematizado, ele pode perceber a necessidade do conhecimento matemático em certas situações, bem como avaliar a importância da matemática, como ciência para a análise, interpretação e mensuração dos fatos que ocorrem na sociedade.

Abordar um conteúdo por meio da resolução de problemas como metodologia de ensino, é uma tarefa que exige muito preparo do professor. O assunto que agrada um aluno e desperta seu interesse, pode não surtir o mesmo efeito em outro. O esporte, principalmente o futebol, assunto utilizado neste trabalho, para introduzir os conteúdos de Análise Combinatória, agradou a maioria dos alunos, outros foram indiferentes e alguns não gostaram. Percebemos a necessidade da continuidade investigativa, com novas perspectivas, abordando outros assuntos em conteúdos diferentes, pois através de uma análise teórico-prática pode se evidenciar um avanço, com resultados favoráveis, apesar dos limites impostos pelo tempo.

8. REFERÊNCIAS

BICUDO, M. A. V. (org.) **Educação matemática**. São Paulo: Moraes, 1985.

BURAK, D**.** Modelagem matemática e a sala de aula**.** In: I EPMEM-Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática, 2004, Londrina. **Anais do I EPMEM**, 2004. Disponível em: www.dionisioburak.com.br/. Acesso em: 05/09/09.

DANTE L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

GIOVANI J.R. e BONJORNO J.R. **Matemática completa**. São Paulo: FTD. 2005.

MORAN J.M. **Desafios na Comunicação Pessoal***. 3ª Ed. São Paulo: Paulinas, 2007, p. 162-166.*

OSBORNE A. e KASTEN M.B. Opiniões sobre a resolução de problemas no currículo para os anos 80: um relatório. In: **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1996.

PARANÁ, SEED. **Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica**, Curitiba, 2009.

PARRA, C; SAIZ, I. (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes médicas, 1996.

POLYA, G**. A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SMOLE K.S. E DINIZ M.i. **Aprender matemática resolvendo problemas**/Coordenado por Vânia Marincek-Porto Alegre: Artmed Editora. 2001. Coordenação da série Zélia Cavalcanti. Centro de Estudos Escola da Vila.

Sites consultados:

http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/ acesso em 30/08/09.

http://www.suapesquisa.com/futebol/ acesso em 01/09/08.

http://www.suapesquisa.com/educacaoesportes/ acesso em 07/10/08.

http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=15162 acesso em 20/10/08.

http://www.futebolnarede.com.br/ca. php acesso em 13/11/08.