A Resolução de Problemas Aplicada no Estudo das Funções

Arieus Gubert[1]
Ms. José Trobia[2]

Uma grande dificuldade no ensino da Matemática é a resolução de problemas. No ensino Fundamental e no Ensino Médio, esta é uma atividade fundamental em todos os momentos. Neste projeto foi utilizada a Metodologia da Resolução de Problemas segundo George Polya (2006) que a divide em quatro etapas bem definidas. Direcionei este trabalho para o ensino de Funções do 1º grau, com os alunos do 1º ano noturno do Colégio Estadual João Negrão Júnior de Teixeira Soares – PR, aplicando em situações problemas do cotidiano do aluno com o objetivo de tornar mais atraente e despertar interesse na sua resolução. Foi utilizado o software GeoGebra, que é livre e de fácil manuseio, utilizado para traçar gráficos e outras construções geométricas. Como resultados significativos pode-se citar o grande interesse e a participação dos alunos para a resolução das atividades propostas, com reflexos na melhoria no estudo do *Movimento Retilíneo Uniforme* da disciplina de Física no momento da construção dos gráficos.

Palavras Chaves: função afim, resolução de problemas, ensino de matemática.

ABSTRACT: Problem Solving Applied to the Function Study

A great difficulty in the teaching of mathematics is to solve problems. In elementary and high school, problem solving is a fundamental activity at all times. In this project it was used the Methodology of Problem Solving according to George Polya (2006) that divides it into four well-defined steps. We have directed this work for the teaching of Functions of the 1st degree, with students from the first year nighttime from João Negrão Júnior High School in Teixeira Soares - Paraná, by applying problem situations from the student daily routine in order to try to make it more attractive and arouse interest in its resolution. We used the software GeoGebra, which is free and easy to handle, that is used to draw graphs and other geometric constructions. As significant results we can mention the great interest and participation of the students in solving the activities proposed, with reflections in the improvement of the study of Uniform Rectilinear Motion in Physics at the time of construction of graphics.

Keywords: affine function, problem solving, teaching of mathematics.

[1] Professor de Matemática do Programa de Desenvolvimento Educacional do Colégio Estadual João Negrão Júnior da Rede Pública do Estado do Paraná.

[2] Professor Orientador, Mestre em Matemática e lotado no Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

INTRODUÇÃO

A partir da experiência profissional, tenho percebido o crescente desinteresse pela matemática, no ensino fundamental e no ensino médio. Estatisticamente percebo também que as maiores evasões e desistências, acontecem nas séries iniciais de cada ciclo, ou seja, nas quintas séries do ensino fundamental e nos primeiros anos do ensino médio. Pesquisas comprovam que a dificuldade com a matemática é um dos motivos que aumentam as estatísticas das evasões.

E por que a matemática é uma disciplina vilã neste contexto? Entre os motivos que afastam alunos das salas de aula, estão os argumentos de ser uma disciplina que requer abstração, pré requisitos, raciocínio lógico e os assuntos estudados distantes do dia-a-dia, entre outros. Na nossa práxis, as atividades propostas em forma de exercícios ou situações problemas descontextualizadas podem contribuir no aumento da evasão e desinteresse pelos estudos. O aluno muitas vezes se questiona, ou questiona o professor: “Onde vou usar isso?” “Por que estou estudando este conteúdo?” “Onde eu aplicarei este conhecimento?” Algumas vezes não temos uma resposta convincente para uma aplicabilidade imediata. Os livros didáticos apresentam atividades muitas vezes distantes da realidade, principalmente as relacionadas aos problemas. Isto faz com que se dificulte a compreensão e provoque desinteresse em sua resolução. Sobre esta questão Werneck (2002) aponta que:

> [...] Ensinamos demais e os alunos aprendem de menos e cada vez menos! Aprendem menos porque os assuntos são cada dia mais desinteressantes, mais desligados da realidade dos fatos e dos objetivos mais distantes da realidade da vida dos adolescentes. (Wernek, 2002,p.13)

Esse desinteresse que Werneck (2002) trata, é também reflexo da defasagem tecnológica e metodológica da escola em relação ao mundo contemporâneo. Enquanto do outro lado do muro da escola, os alunos se encontram pela Internet, pelo celular e compartilham assuntos extremamente atualizados e disponibilizados em tempo real, de maneira clara, atrativa e criativa, veiculados nesta grande diversidade midiática, dentro do espaço escolar na maioria das vezes o professor tem como principal instrumento de trabalho o quadro e giz, a exposição oral e o livro didático e muito timidamente começam aparecer novos recursos tecnológicos. Precisamos urgentemente compensar este atraso tecnológico que vive a escola, porque a sociedade requer cada vez, mais pessoas capacitadas, atualizadas, capazes de pensarem e agirem rapidamente com destreza. Com essa defasagem tecnológica da escola e com a rápida evolução dos meios eletrônicos e tecnológicos, os alunos estão mais adiantados que muitos professores no manuseio desses recursos. E consequentemente o professor não estando preparado para explorar os benefícios da tecnologia como um recurso didático no seu trabalho, não ajuda a atrair o interesse dos adolescentes.

Entendo o interesse como um dos principais aliados do professor para o sucesso da educação. É evidente que muitas outras razões contribuem para o fracasso escolar. Como por exemplo, a indisciplina que vem aumentando dia a dia na sala de aula e cada dia mais os educadores sentem dificuldades de como lidar com estes problemas que sem dúvida contribuem para o desinteresse do aluno. Popularmente se diz que “para aprender, tendo interesse, meio caminho já está andado”. E para aprender resolver problemas, temos que querer resolvê-los. Sendo assim, o aluno irá sentir vontade de resolvê-lo ao sentir-se desafiado e perceber alguma afinidade com sua realidade.

Passamos boa parte das aulas construindo e trabalhando a base matemática que deverá ser aplicada na resolução de problemas. E por uma série de motivos, muitas vezes “pula-se” a resolução de problemas, alegando diversas circunstâncias no decorrer do ano como exemplo: dificuldade para cumprir o calendário e os itens do planejamento e do currículo, surgimento de imprevistos reduzindo a quantidade de aulas previstas no calendário, alunos com grande diversidade de conhecimento, reservar tempo para diversas atividades de recuperação e avaliação do rendimento, são alguns fatos que fazem com que a resolução de problemas seja deixada para segundo plano, quando deveria ser uma das atividades principais. Neste sentido Lester Jr, et au Dante (2008) diz que “A razão principal de se estudar Matemática é aprender como se resolvem problemas”. Aprender a resolver exercícios é apenas um meio e não um fim. Na prática a matemática deve auxiliar na resolução de problemas práticos e encontrar soluções para necessidades bem como contribuir para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Como conquistar o interesse do aluno e procurar melhorar a qualidade do ensino de matemática com os recursos que dispomos, utilizando a resolução de problemas e trabalhando com o conteúdo de função?

Sabemos que não existe fórmula ou metodologia pronta. Cada educador, à sua maneira, procura de acordo com suas habilidades, potencialidades e aptidões e aplicando seus conhecimentos didáticos atrair a atenção e despertar o interesse daqueles alunos mais desinteressados. Porém, podemos considerar algumas atitudes que ajudam neste processo, tais como: a valorização do conhecimento dos alunos; a utilização de situações problemas do cotidiano dos alunos; o uso da sala de informática com um software apropriado são alguns elementos que utilizei para desenvolver este projeto.

Busquei preparar os alunos para um mundo em transformações constantes e profundas, um mundo globalizado e capitalista, no qual a exigência da qualidade de produtos e na prestação de serviços, a agilidade profissional, a disputa na crescente concorrência de bens e serviços, é cada vez maior. Portanto, no cuidado com a qualificação profissional devemos aproveitar os recursos da tecnologia para acompanhar a evolução científica.

A preocupação pela qualificação profissional está estabelecida na Lei de *Diretrizes e Bases da Educação Nacional* (Lei nº 9.394/96), a qual prevê no ensino médio que além da consolidação e aprofundamento dos conhecimentos do ensino fundamental e garantir a continuidade dos estudos, tem também a finalidade de preparar para o trabalho, para o exercício da cidadania, da formação étnica e no desenvolvimento da autonomia intelectual.

Com a utilização da Metodologia da Resolução de Problemas dentro do contexto de Funções, procurei proporcionar aos educandos uma condição melhor para enfrentar as diversas situações como cidadãos, além de procurar estimular o gosto e o interesse pela Matemática.

O estudo das Funções pode ser amplamente aplicado em diversas situações dentro dos vários conteúdos da matemática. Partimos de situações concretas do aluno para generalizar conceitos básicos de Função, através da resolução de problemas. Procurei através desse projeto melhorar a capacidade de resolver problemas, ao enfrentar situações novas, sistematizar o estudo das funções e proporcionar a capacidade de análise e a interpretação crítica de gráficos, validar e interpretar as respostas obtidas na solução de problemas de Funções.

As Funções fazem parte do cotidiano e seu conceito é um dos mais importantes na matemática, estando presente sempre é preciso estabelecer relações entre duas grandezas variáveis. As funções também estão presentes em outras áreas do conhecimento como na biologia, economia, física, química, entre outras. como ferramenta capaz de solucionar, representar e modelar questões do dia-a-dia. Uma função pode ser representada graficamente, possibilitando uma melhor compreensão e clareza ao objeto ou conteúdo desenvolvido.

O conteúdo Função faz parte do programa do ensino médio, segundo o *Ministério da Educação*[3] "O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes

[3] Orientações Curriculares para o Ensino Médio" – Ministério da Educação, p.72.

modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial.”.

Também a *Secretaria de Educação do Paraná* assegura em sua política educacional o conteúdo de Funções quando diz:

> As funções devem ser vistas como construção histórica e dinâmica, capazes de provocar mobilidade às explorações matemáticas, por conta da variabilidade e da possibilidade de análise do seu objeto de estudo e por sua atuação em outros conteúdos específicos da Matemática. Tal mobilidade oferece ao aluno a noção analítica de leitura do objeto matemático. (SEED, 2006, p.38).

Presente no dia-a-dia do aluno e em outras áreas do conhecimento, previsto pelo *Ministério da Educação* e também pela *Secretaria de Estado do Paraná*, o conteúdo de Funções deve ter um tratamento relevante e significativo no ensino de matemática.

Em várias situações pode-se associar o conceito de Função e citar uma infinidade de exemplos dentre eles: a relação entre velocidade e o tempo de percurso de um móvel, a relação que se estabelece entre o preço e a quantidade de um produto, entre custo de uma corrida de táxi e a distância percorrida, entre o custo de uma fatura de energia ou água e o seu respectivo consumo. Problemas desta natureza fazem parte do cotidiano dos alunos. Aproveitando a realidade que o aluno vivencia fica mais fácil associar os conceitos e as generalizações dos conceitos matemáticos. Se a matemática exige em muitos casos a abstração, temos que procurar não trazer exemplos ou problemas que exijam em primeiro lugar um esforço para imaginar o contexto e em segundo a tentativa da busca do processo para resolvê-lo. Neste sentido, a resolução de problemas que se identifica com o cotidiano e com a realidade do aluno, despertará mais interesse, porque ele envolve-se com uma situação muitas vezes já vivida, facilitando sua compreensão e tornando a matemática motivadora e desafiadora. A matemática praticada na sala de aula às vezes é distante da realidade e deixa de lado o que na verdade poderia motivá-los.

Essa distância da realidade que é sentida pelos alunos precisa ser reduzida. E sentido essa mesma dificuldade e com o ingresso no Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE)[4], procurando alternativas para melhorar minha prática, apliquei a Metodologia da Resolução de Problemas no conteúdo de Funções

---

[4] É uma política pública que estabelece o diálogo entre os professores da Educação Superior e os da Educação Básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense. O Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, integrado às atividades da formação continuada em Educação, disciplina a promoção do professor para o Nível III da Carreira, conforme previsto no Plano de Carreira do Magistério Estadual, Lei Complementar nº 103, de 15 de março de 2004.

como uma alternativa para resgatar o interesse do aluno nas aulas de matemática. Alunos mais interessados tendem a trabalhar mais nas atividades escolares, melhorando significativamente o ensino e a aprendizagem.

Segundo Dante (2005, p.14) “O real prazer de estudar Matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo.”.

As resoluções de problemas que envolvem a matemática estão presentes em escritórios de engenharia, setores econômicos, financeiros, comerciais, agrícolas, em questões de vestibulares, orçamento e planejamento doméstico, enfim, em vários momentos do cotidiano, portanto sabemos da sua importância em sala de aula, por essa razão deve ocupar um lugar de destaque na disciplina de matemática. Gazire (1988, p.15) afirma que: “as mais antigas matemáticas escritas que vêm à imaginação são coleções de problemas. Os conhecimentos da matemática egípcia e babilônica estão totalmente baseados na análise de problemas ao invés de teorias e provas de teoremas”.

As dificuldades percebidas na resolução de problemas são muitas e aparecem em todos os momentos da aprendizagem, iniciando no momento da leitura, passando pela interpretação, pela escolha da estratégia adequada, pelos cálculos algébricos, chegando à formulação e interpretação da resposta adequada. É evidente que as dificuldades variam de um aluno para outro. Então lembramos o que diz Bransford e Stein (1984) “os seres humanos são ótimos solucionadores de problemas uns mais eficazes, outros menos, porque uns são mais espertos que outros ou porque entenderam mais sobre o processo de resolução, ou simplesmente mais eficazes que outros.”

Pela sua própria natureza o ser humano é um bom solucionador de problemas segundo Bransford (1984), mas percebo meus alunos com dificuldades na sua resolução. Trabalhei com a metodologia da resolução de problemas para o estudo de Função com alunos do 1° ano do ensino médio. No início de realização do projeto muitas dificuldades foram enfrentadas, foi necessária a retomada de alguns conceitos e fundamentos básicos, algum mecanismo algébrico na resolução da equação do 1º grau que os alunos não lembravam ou não tinham assimilado nas séries anteriores. A melhora na capacidade de resolução de problemas não é uma atividade fácil nem acontece de uma hora para outra.

Para tanto, para que a aprendizagem matemática se dê de maneira significativa é importante envolver os alunos, procurando dar oportunidade de lidar com novas situações, porque com o avanço rápido da tecnologia, é difícil prever com exatidão quais seriam as habilidades e conceitos matemáticos úteis para o futuro.

2. DESENVOLVIMENTO:

2.1. Etapa de introdução do conteúdo

Função é um conteúdo que nos possibilita associar a uma ampla diversidade de situações do dia-a-dia. A todo instante estamos estabelecendo relações entre as mais variadas grandezas. Quando a uma quantidade for comparada ao volume, a qualidade comparada à variação de preço, enfim sempre que estabelecemos comparação entre grandezas estaremos intuitivamente trabalhando com Funções. E o seu conteúdo está previsto nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (1972), que ressalta sua relevância na construção histórica e dinâmica por possibilitar a análise do seu objeto de estudo e pela atuação em outros conteúdos específicos da matemática. Também integra o Plano Político Pedagógico (PPP)[5] da Escola em que atuo, que é um dos poucos estabelecimentos de ensino que oferece ensino médio no Município.

Como a clientela da escola é formada por alunos residentes tanto na sede como no interior, passaram por outros professores, existe muita variação entre o nível de conhecimento deles, mas prevalecem sem sombra de dúvida muitas dificuldades com a leitura e interpretação dos problemas, como resolvê-lo e até entender a resposta quando encontrada. Neste contexto deixei de seguir o livro didático e procurei explorar situações práticas que facilitem o entendimento da situação e possibilite despertar o interesse em resolvê-los. Uma situação comum a quase todos os alunos é o consumo de água que, com exceção de poucos que moram no interior, todos consomem água distribuída pela rede pública.

Estratégia de Ação

Na aula de apresentação da implementação deste Projeto, foi explicado detalhadamente como seriam desenvolvidos os trabalhos. Foi apresentado aos alunos o tema do estudo, a metodologia a ser aplicada, os recursos didáticos que seriam utilizados bem como os objetivos. Para isso começaríamos estudar a forma

[5] É um documento que contem as leis da escola. Elaborado pela direção, professores e funcionários onde constam os objetivos, metas e as regras que a escola pretende realizar.

de pagamento da fatura de consumo de água da residência dos alunos. Trabalhando a idéia de Função, estenderíamos o conceito para outras situações problemas.

Iniciamos o trabalho no laboratório de informática da escola, com a finalidade de pesquisar junto ao sítio da concessionária de fornecimento de água da cidade, a SANEPAR, os critérios da cobrança da fatura de água.

Percebi que alguns alunos estavam tendo o primeiro contacto com um computador e outros pela primeira vez o contacto com a Internet. Naquela noite o sistema estava lento para a navegação e os alunos com pouca familiaridade com os computadores, foram colocados com colegas mais experientes. Também notamos o envolvimento da turma em buscar a informação. Estávamos iniciando o estudo de Funções, possibilitando para alguns alunos a inclusão digital, mostrando o acesso à informação através do mundo virtual da Internet. Passo a passo, desde o momento de ligar o computador, os alunos através de um buscador acessaram o sitio da SANEPAR navegaram e consultaram a tabela de cobrança de tarifas de consumo. Cada aluno imprimiu uma tabela para trabalhar em sala de aula.

Tabela de Tarifas da SANEPAR.

TABELA DE TARIFAS DE SANEAMENTO BÁSICO CONTAS VENCÍVEIS A PARTIR DE 01 DE FEVEREIRO DE 2005	
CATEGORIA / FAIXAS DE CONSUMO	TARIFA (Em Reais)

TARIFA SOCIAL		
Todas as Localidades Operadas	ATÉ 10 m3	R$ + R$/m3 Excedente a 10m3
ÁGUA	5,00	5,00 + 0,50/ m3
ÁGUA E ESGOTO	7,50	7,50 + 0,75/ m3

TARIFA NORMAL			
RESIDENCIAL	ATÉ 10 m3	R$ + R$/m3 Excedente a 10m3	R$ + R$/m3 Excedente a 30m3
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	16,35	16,35 + 2,45/m3	65,35 + 4,18/m3
ESGOTO Curitiba e Maringá*	13,90	13,90 + 2,08/m3	55,55 + 3,55/m3
ÁGUA E ESGOTO Curitiba e Maringá*	30,25	30,25 + 4,53/m3	120,90 + 7,73/m3
ESGOTO Demais Localidades	13,08	13,08 + 1,96/m3	52,28 + 3,34/m3
ÁGUA E ESGOTO Demais Localidades	29,43	29,43 + 4,41/m3	117,63 + 7,52/m3

MICRO E PEQUENO COMÉRCIO	ATÉ 10 m3	R$ + R$/m3 Excedente a 10m3
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	16,35	16,35 + 3,31/m3
ESGOTO Curitiba e Maringá*	13,90	13,90 + 2,81/m3
ÁGUA E ESGOTO Curitiba e Maringá*	30,25	30,25 + 6,12/m3
ESGOTO Demais Localidades	13,08	13,08 + 2,65/m3
ÁGUA E ESGOTO Demais Localidades	29,43	29,43 + 5,96/m3

COMERCIAL / INDUSTRIAL / UTILIDADE PÚBLICA	ATÉ 10 m3	R$ + R$/m3 Excedente a 10m3
ÁGUA Todas as Localidades Operadas	29,40	29,40 + 3,31/m3
ESGOTO Curitiba e Maringá*	24,99	24,99 + 2,81/m3
ÁGUA E ESGOTO Curitiba e Maringá*	54,39	54,39 + 6,12/m3
ESGOTO Demais Localidades	23,52	23,52 + 2,65/m3
ÁGUA E ESGOTO Demais Localidades	52,92	52,92 + 5,96/m3

Obs: Para os consumos superiores a 10 m3 por economia, nos municípios abastecidos pelos sistemas dos balneários de Pontal do Paraná, Guaratuba e de Matinhos, a tarifa será majorada em 20% (vinte por cento) nos meses de JANEIRO, FEVEREIRO, MARÇO E DEZEMBRO, e minorada em igual percentual nos meses de ABRIL a NOVEMBRO.

(*) Conforme acordo firmado entre o Governo do Estado do Paraná – SANEPAR e o município de Maringá, a tarifa de esgoto passa a ser de 80%, a partir de 01/06/05.

TARIFA DE ÁGUA E ESGOTO PARA ENTIDADE FILANTRÓPICA: DESCONTO DE 50% NO EXCEDENTE A 10M3 DA CATEGORIA UTILIDADE PÚBLICA.
TARIFA DE ÁGUA SOCIAL: 30,58% DA TARIFA RESIDENCIAL.
CONTAS VENCÍVEIS A PARTIR DE: 01 DE FEVEREIRO DE 2005
MULTA = 2% + CORREÇÃO MONETÁRIA PARA CONTAS VENCIDAS HÁ MAIS DE 30 DIAS.
REAJUSTE AUTORIZADO PELO DECRETO ESTADUAL N° 4266 de 31 de janeiro de 2005

http://www.sanepar.com.br/sanepar/CalandraKBX/filesmng.nsf/A7A158FE991D79DF832570330048239F/$File/Tarifas.pdf?OpenElement

Para trabalhar o cálculo da tarifa foi solicitado que cada aluno trouxesse uma fatura de casa.

A Metodologia da Resolução de problemas segundo Polya (2006), foi discutida de maneira resumida e sintetizada em 4 etapas: Primeira: Compreender o problema; Segunda: Elaborar um plano; Terceira: Executar um plano e Quarta: Fazer o retrospecto ou verificação. Segundo o autor, estas quatro etapas não são rígidas, fixas ou infalíveis, mas ajudam o solucionador a se orientar passo a passo.

2.1.2 – Etapa de Desenvolvimento e Fixação com Intervenções Docentes

A primeira situação problema foi efetuar o cálculo da tarifa de consumo, trazida pelo aluno, utilizando a tabela de tarifas.

Em grupos de 4 ou 5 alunos eles se dividiram para resolver a atividade. Como na cidade não existe rede de esgoto, o cálculo fica mais simplificado.

A primeira etapa da resolução de um Problema é: Entender o problema.

Eles começaram estudando e entendendo a tabela de tarifas da concessionária. Os alunos tiveram dificuldades na interpretação do seu conteúdo, porque ela enquadra todas as situações de diferentes localidades do Estado e todos os tipos de consumidores. Eles queriam saber o que era tarifa social, expliquei que é destinada à família de baixa renda e pequeno consumo. Comentaram também que não é justo a família que gasta menos de 10 metros cúbicos de água pagar o equivalente a um consumidor que consome essa quantia. Quanto aos dados contidos na fatura, os alunos não tinham observado com atenção todos os dados que a fatura contém. E foi necessário esclarecer qual é a unidade padrão da medida do consumo, o nome do instrumento que mede o gasto.

Percebi que quando trabalhamos com uma situação cotidiana, surgem muitos questionamentos dos alunos demonstrando interesse pelo assunto e abrindo possibilidade de explorar vários assuntos relacionados com o tema.

Após esclarecer as dúvidas referentes a tabela de tarifas, eles não entenderam o escalonamento da cobrança nas três faixas de consumo que são: até 10 m^3, de 10 m^3 à 30 m^3 e acima de 30 m^3. Para cada faixa o cálculo é diferente. Na primeira faixa o valor é fixo, nas duas seguintes o cálculo feito é a somatória de um valor fixo e um adicional que varia em função do consumo.

Passamos para a terceira etapa da resolução do problema: que consiste em elaborar um plano.

Observando cada grupo e respondendo seus questionamentos sem procurar direcionar a qualquer sugestão de resolução, nenhum grupo encontrou uma maneira para a resolução, naquela aula. Numa breve reflexão, do porquê nenhum grupo teve sucesso na elaboração de um plano para resolução naquele momento, percebi que os alunos não estavam acostumados a estas situações de buscar soluções para resolver problemas. Normalmente os problemas propostos são resolvidos de imediato pelo professor e geralmente se limitam a aplicação imediata de uma fórmula ou aplicação de um método resolutivo padrão numa lista de problemas semelhantes. O que não desafia o estudante a pensar e procurar uma solução.

Na aula seguinte direcionamos alguns questionamentos para os grupos:

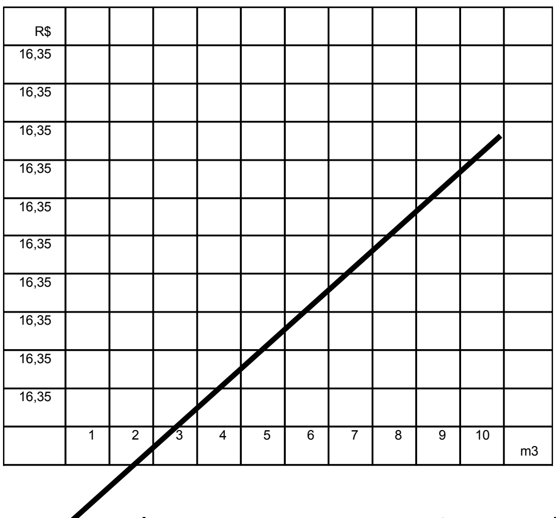
Segunda situação problema: Qual o valor a pagar para as diversas quantidades de consumo: 2, 5, 7, e 10 m^3? Todos entenderam que seria a taxa mínima, no caso R$ 16,35, porque o consumo estava abaixo dos 10 m^3 que a concessionária franqueava.

Indaguei-os sobre qual seria a equação que representaria a situação acima? Como eles não souberam responder, então reformulei o questionamento: “Se representássemos o valor a pagar por y como ficaria a equação?”. Então a resposta veio de imediato: “y = 16,65”.

Para uma melhor compreensão solicitamos que fosse feito um gráfico que representasse o consumo de 0 a 10 m^3 e o preço a pagar.

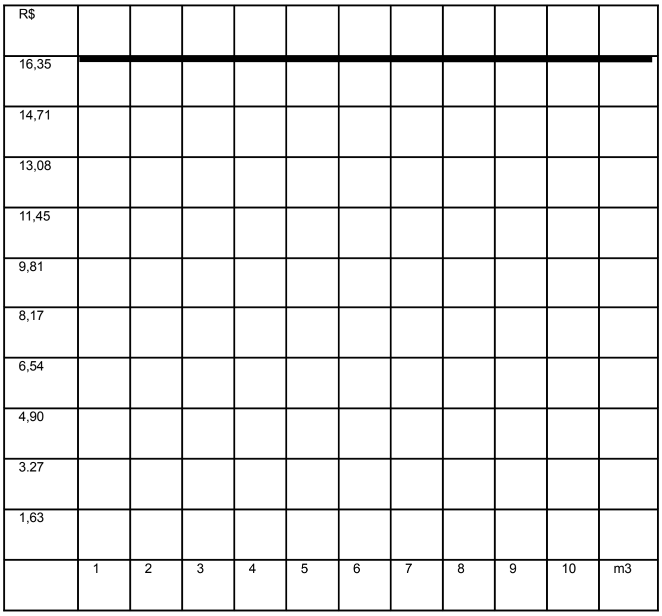
Como o valor de y não depende de ninguém esta é uma função constante. Porém depois de algum tempo verificamos que todos os grupos tinham construído o gráfico como uma função crescente, ou seja, foram repetindo no eixo y o valor de 16,35 conforme esboço abaixo.

Gráfico 1 - Incorreto



Expliquei então que o eixo y, que representa o valor a pagar, deve ser construído com uma sequência de valores crescentes, e não com valores repetidos com fizeram. E a construção correta resulta numa reta paralela ao eixo x.

Gráfico 2 Custo do consumo entre 0 – 10m^3



Esclarecido o raciocínio para a primeira faixa de consumo, pedimos que se ativessem para aquelas faturas que se enquadrassem na segunda faixa, isto é, de 10 m^3 a 30m^3.

Foi distribuída, uma atividade (cópia abaixo) onde eles preencheram uma tabela com diversos consumos.

Com base na tabela de tarifas, complete a tabela 01 abaixo, para um consumo residencial, sem a cobrança do serviço de esgoto:

Tabela 01

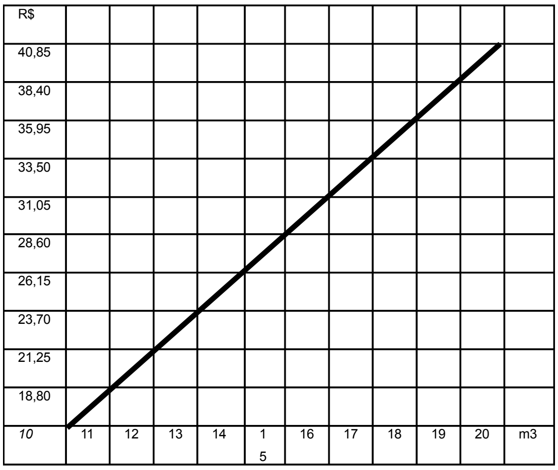
Consumo (m^3)	*Valor a pagar (R$)*
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Os alunos começaram a estabelecer um raciocínio para resolver a questão. E cada um que compreendia foi repassando aos colegas de sua equipe. Alguns não perceberam que o excedente de R$ 2,45 era só para o consumo além dos 10 m^3 iniciais, e calculavam, por exemplo, para 12 m^3, 12 x 2,45 + 16,35 chegando ao total de R$ 45,75. Como sua resposta era diferente de outros colegas foram percebendo que o acréscimo de 2,45 reais deveria ser aplicada somente para a quantidade gasta além dos 10 m^3. Refaziam os cálculos: Dos 12 m^3 apenas 2 m^3 eram de excesso. Corrigindo o erro refizeram os cálculos: 2 x 2,45 + 16,35 = 21,25. Entendido o processo do cálculo, preencheram a tabela acertadamente, sem dificuldade.

Solicitamos que construíssem um gráfico que representasse o custo para um consumo entre 10 m^3 e 20 m^3.

Já neste gráfico a construção foi bem tranquila, todos os grupos acertaram.

Gráfico 3 Consumo 10 - 20m^3



A terceira etapa, a execução, foi calcular a fatura de água que tinham trazido de casa para confirmar o valor a pagar. Alguns tiveram dificuldade de encontrar a quantidade do consumo. Esta foi a etapa mais fácil e rápida da resolução do problema.

Na quarta etapa, a do retrospecto ou verificação, alguns alunos verificaram que os valores não fecharam. Tinham feito o cálculo correto, porém a divergência de valores era porque na fatura estavam incluídos taxa de juros por pagamento em atraso da tarifa anterior, ou cobrança de outros serviços realizados.

Resolvido o problema, passei alguns questionamentos a respeito da atividade desenvolvida, conforme segue abaixo:

> *a) Houve alteração nos valores a pagar para consumidores que gastaram entre 1 e 10 metros cúbicos?______________ Qual foi este valor? ___________*
>
> *b) Houve alteração nos valores a pagar para consumidores que gastaram entre 10 e 30 metros cúbicos? _______________*
>
> *c) Como você calculou o valor de quem consumiu na faixa de 10 a 30 m^3?*
>
> ____
>
> ____
>
> *d) Você percebeu alguma relação entre o valor a pagar e o consumo nesta faixa? ________*
>
> *e) O que é verdadeiro afirmar para consumidores da faixa de 10 à 30 m^3?*
>
> *( ) o valor a pagar não se altera.*
>
> *( ) o valor a pagar diminui a medida que aumenta o consumo.*
>
> *( ) o valor a pagar aumenta a medida que aumenta o consumo.*
>
> *( ) o valor a pagar não tem relação com o consumo.*
>
> *f) Existem duas grandezas envolvidas no cálculo da tarifa, quais são elas? ______________*
>
> ____
>
> *g) Existe alguma relação de dependência entre elas?__________*
>
> *Se você respondeu sim, qual é essa relação de dependência? ________________________*
>
> *h) Se chamarmos de x o consumo e y o valor a pagar, como poderíamos estabelecer uma relação entre consumo e valor a pagar para a faixa de 10 a 30 m^3? _______________________*

Estas questões foram respondidas individualmente pelos 32 alunos da turma.

Analisando as respostas, das questões foi possível observar:

Por questões legais todos os nomes dos alunos a seguir são fictícios.

Na questão a),

Todos os alunos presentes na aula anterior responderam corretamente que não e R$ 16,35, respectivamente.

Na questão b),

90% responderam corretamente que sim

Na questão c),

Tiveram respostas diversificadas: Carlos partiu de R$ 16,35 que corresponde ao gasto de 10 m^3 e foi acrescentando R$ 2,45 para cada metro de consumo adicional.

Tiago fez seu cálculo multiplicando o adicional de R$ 2,45 pela quantidade de metros em excesso, ou seja um número inteiro entre 1 e 20 e do resultado adicionou o valor fixo de R$ 16,35.

Na questão d)

A maioria respondeu assertivamente que sim. E a relação de dependência foi respondida de maneira pessoal, mas a maioria afirmou dizendo que quanto maior o consumo maior seria o valor a pagar.

Na questão e)

Todos os alunos presentes na aula anterior responderam a alternativa III.

Na questão f)

A maioria das respostas foram o custo e o consumo.

Na questão g)

Todos responderam que existe uma dependência, e que quanto maior o gasto maior o valor a pagar.

Na questão h)

O objetivo da resposta a esta questão seria a preparação para apresentar o conceito de funções. A resposta esperada seria a equação $y = 16{,}35 + 2{,}45x$ que representa a fórmula resultante para o cálculo para um consumo compreendido entre 10 e 30 metros cúbicos e é uma função do primeiro grau, do tipo $f(x) = y = ax + b$. Constatei que todos sabiam fazer os cálculos, para encontrar a tarifa em função do consumo, mas ninguém conseguiu generalizar substituindo os valores do consumo por x e valor a pagar por y.

Então propus fatura da aluna Solange e solicitamos que todos os alunos efetuassem o cálculo. O consumo era de 13 m^3, qual seria o valor a pagar? A maioria dos alunos efetuou corretamente os cálculos: o excesso de 3 metros cúbicos multiplicado por R$ 2,45 reais por metro dá R$ 7,35, somado com o valor fixo R$ 16,35 ficou em R$ 23,70. Em linguagem matemática ficou $3 \times 2{,}45 + 16{,}35 = 23{,}70$. Portanto o valor a pagar para um consumo de 13 metros cúbicos é R$ 23,70. Quando todos terminaram os cálculos indaguei a turma. Qual a letra que estaria representando o consumo? A letra x foi a resposta. Qual seria a letra que estaria representando o valor a pagar? A letra y os alunos responderam. Como ficaria a expressão se substituirmos a quantidade gasta por x e o valor a pagar por y? " $x \cdot 2{,}45 + 16{,}35 = y$", foi a resposta. Comentei que esta equação é equivalente a $y= 2{,}45x + 16{,}35$, e pode ser utilizada para calcular com facilidade qualquer fatura com consumo entre 10 m^3 e 30 m^3.

Expliquei que esta expressão que eles acabaram de encontrar era uma Função do 1º grau e normalmente é representada por $y= ax + b$. Onde "**y**" está representando o valor a pagar da fatura, "**x**" equivale a quantidade em metros do excesso de água consumido, "**a**" é um valor fixo que representa o preço de cada metro cúbico consumido além dos 10 metros cúbicos iniciais e vale 2,45 e **b** representa o adicional fixo de R$16,35.

Como atividade de fixação foi solicitado que cada grupo escolhesse 3 valores quaisquer da tabela 01 acima e calculasse o valor a pagar utilizando a função e confirmasse os valores encontrados.

Percorrendo os grupos verifiquei que eles efetuaram o cálculos sem muita dificuldade.

Na sequencia fiz o seguinte questionamento: “Das variáveis, consumo e preço, existia alguma cujo valor dependência da outra?”. Alguns alunos responderam que não, mas a maioria disse que sim, o valor a pagar dependia do consumo. E aqueles que tinham respondido não acabaram concordando com os demais. E dissemos então que o gasto é uma variável independente (representada na última expressão por “**x**”) e o preço é uma variável dependente da quantidade de consumo de água (representada por “**y**”).

Se considerarmos um conjunto A formado por todas as quantidades possíveis de consumo de água no caso de 10 a 30 m^3 e um conjunto B de todos os valores a pagar em função do gasto que pode variar de 16,35 que corresponde a nenhum gasto em excesso, até 89,85 que representa o consumo máximo de 30 m^3 nesta faixa, podemos compreender que, para determinada quantidade de consumo do conjunto A teremos um único correspondente valor a pagar no conjunto B. A partir daqui podemos enunciar o conceito de Função

Função é uma relação entre dois conjuntos estabelecida por uma regra. Em outras palavras: Uma relação será uma função se dois conjuntos A e B relacionados A em B por uma lei de formação f, onde cada elemento de A esteja relacionado com apenas um elemento de B.

No caso estudado a lei de associação é $y = 2{,}45x + 16{,}35$.

Concluindo esta atividade esclareci que a equação acima representa a Função que nos permite calcular o valor do pagamento do consumo de água entre $10m^3$ e 30 m^3.

A Terceira situação problema proposta foi: *Quanto tempo gastamos para ir de automóvel de Teixeira Soares para Ponta Grossa, com uma velocidade média de 60 Km/h?*

Lembrando as quatro etapas da resolução de um problema segundo Polya (2006):

1º) compreender o problema;

2°) elaborar um plano;

3º) executar o plano;

4º) fazer o retrospecto.

Primeira etapa: Entender o problema.

Para facilitar, eles responderam as questões abaixo:

1- *Para medir distâncias entre cidades qual unidade de comprimento mais adequada?* _________

2- *Qual é a distância aproximadamente entre Teixeira Soares e Ponta Grossa?* __________

3- *Qual a unidade para a medida de velocidade nos automóveis?*________

4- *O que significa a placa de sinalização 60 Km/h, na rodovia Teixeira Soares à Ponta Grossa?*____

5- *O que você entende por velocidade média?*________

6- *Na estrada sempre os veículos se deslocam em velocidade constante? Porque?* ____________

7- *Quais os dados fornecidos pelo problema?* _____________

8- *O que o problema esta pedindo para calcular?* __________

9- *Qual a fórmula para calcular a velocidade média?* ________

Nestas questões houve muita troca de opiniões entre os alunos do grupo e entre os grupos.

Na questão 1:

Uma boa parte dos alunos respondeu o metro e outros responderam o km.

Na questão 2:

Muitos tinham uma boa noção da distância que é de 60 km, mas outros tinham uma idéia diferente.

Na questão 3:

A maioria respondeu corretamente que a velocidade era expressa por km por hora (km/h). Ficaram surpresos quando foi comentado que em outros países existem outras unidade de medida de velocidade.

Na questão 4:

Apesar de terem visto placas de sinalização como esta, alguns não tinham refletido sobre seu significado que representa a velocidade máxima permitida.

Na questão 5:

A resposta desta questão foi uma das que tiveram maior número de acertos, os alunos responderam com suas palavras que era uma velocidade uniforme. Embora alguns tivessem respondido que era a velocidade realizada em linha reta.

Na questão 6:

Esta questão teve 100% de acerto. Surgiu questionamento sobre o porquê isto não ocorria na prática e foram citados com exemplo: defeitos na pista, lombadas, presença de veículos pesados, entre outros.

Na questão 7:

Como o problema só apresentou um dado, não tiveram dificuldade em responder. Porém alguns ficaram em dúvida se 60 km/h era distância ou velocidade.

Na questão 8:

Todos responderam que deveriam calcular o tempo de viagem de Teixeira Soares para Ponta Grossa.

Na questão 9:

Esta questão praticamente ninguém lembrava que a velocidade é igual ao espaço percorrido dividido pelo tempo. ($v = e/t$)

A segunda etapa foi a elaboração do plano. Como sempre é a etapa que exige mais raciocínio e nenhum grupo conseguiu de imediato realizar o cálculo, porque estava faltando um elemento que não estava explícito no problema, que era a distância. Com o fornecimento deste elemento então eles sabiam que era só aplicar na fórmula.

Em seguida iniciamos a terceira etapa, a execução do plano. Nesta etapa muitos alunos substituíram corretamente os valores da fórmula, mas tiveram dificuldade na questão algébrica de como isolar a variável "**t**" da fórmula. Recordamos o princípio multiplicativo e a propriedade fundamental das proporções para facilitar. Encontrado o tempo de 1 hora passamos para a última etapa que consistiu no retrospecto ou verificação (4ª etapa).

Com a resposta de que o tempo para deslocamento é de 1 hora, para percorrer os 60 km que separa T. Soares de P. Grossa, reforçamos o conceito da velocidade média que é de 60 km/h indica um deslocamento de 60 quilômetros em cada hora.

Com os dados do mesmo problema aplicamos o estudo para verificar o tempo gasto com outras velocidades.

Em seguida apresentamos a atividade:

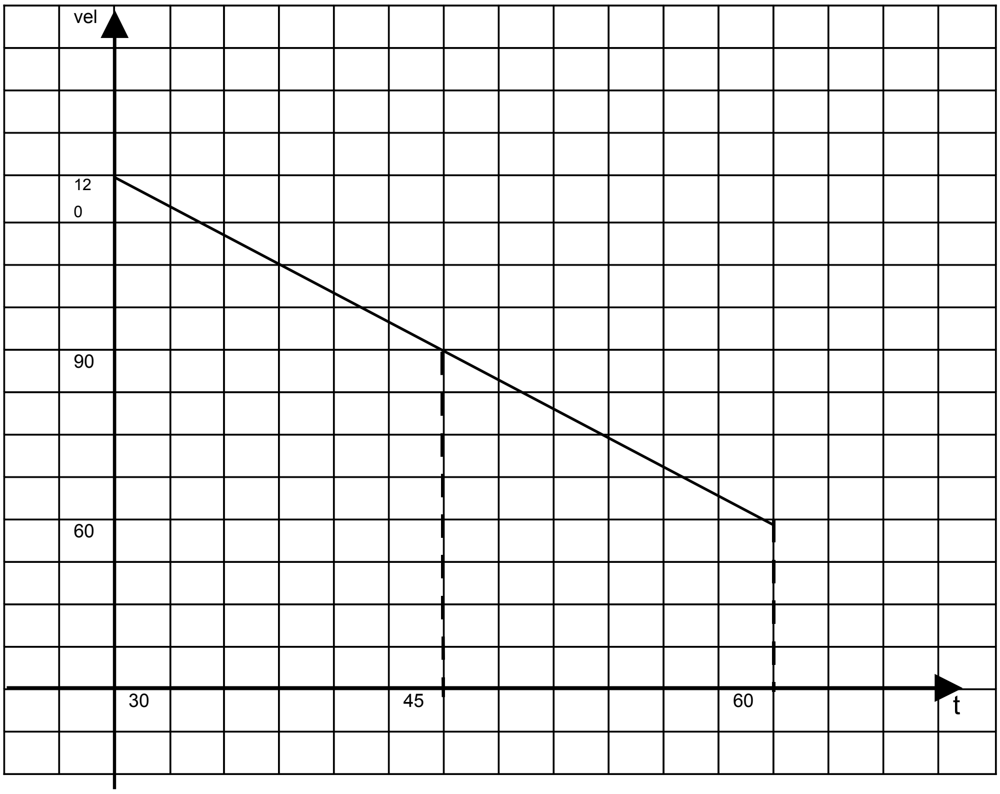
Considerando uma variação na velocidade média do automóvel para fazer o mesmo percurso, complete o quadro abaixo, e construa o gráfico que represente esta situação considerando o eixo x a velocidade e o eixo y a tempo.

Tabela 3

	Velocidade (x)Km/h	Tempo (y)min
A	30	120
B	45	90
C	60	60

No preenchimento desta tabela muitos alunos colocaram para uma velocidade de 30 km/h um tempo de 30 min e para velocidade de 45 km/h um tempo de 45 min, ou seja uma variação diretamente proporcional. Ao discutirmos os valores obtidos e raciocinando de maneira lógica, os alunos perceberam que quando a velocidade é reduzida pela metade, dobra o tempo do deslocamento.

Gráfico 4 Velocidade em função do tempo



Os grupos apresentaram gráficos com pequenas variações na sua construção, alguns iniciando a contagem do tempo em 0 outros partindo de 30 minutos, e houve variação na escala utilizada para representar o eixo do tempo e o eixo da velocidade.

Solicitamos que os alunos comparassem os três gráficos construídos, para analisar as características de cada um. Após alguns instantes começaram a fazer algumas colocações quanto aos números de referência dos eixos x e y, um começava em 0 e outro não, outras colocações quanto a escala dos eixos, alguém falou que em todos os gráficos a resultante era uma linha reta. Foi então que alguém falou sobre a inclinação da reta resultante. Pedi que fale mais especificamente sobre a inclinação. Começaram comparar os três gráficos e perceberam que no gráfico 2 a reta resultante era paralela ao eixo “x”. Em outro, a reta tinha um inclinação ascendente (crescente) ou usando a terminologia usada pelos alunos, “a reta vai subindo”. O outro gráfico a reta resultante tinha uma inclinação descendente (decrescente) ou como disseram os alunos “a reta vai descendo”.

Solicitamos se alguém saberia explicar o motivo e eles afirmaram que no gráfico 2 o valor a pagar não dependia da quantidade consumida, para qualquer consumo de água entre 0 e 10 metros cúbicos, o valor a pagar era um valor constante de R$ 16,35. Concluí dizendo que o gráfico 2 caracteriza uma função constante, no caso $y = 16,35$, e nesse caso a variável y tem sempre o mesmo valor.

Já nos outros dois gráficos não tiveram uma explicação muito convincente.

Então com algumas explicações entenderam que o gráfico 3 caracteriza uma função crescente $y = 2,45x + 16,35$. O valor da variável “y” fica dependendo da quantidade “x” gasta. Observamos que a medida que o consumo “x”, aumenta, o custo “y” também aumenta e o coeficiente 2,45 da variável “x” é positivo.

O gráfico 4 caracteriza uma função decrescente $y = -2x + 180$. O valor da variável “y” também fica dependendo da velocidade “x”. Observamos que a medida que a velocidade “x”, aumenta, o tempo “y” diminui e o coeficiente 2 da variável “x” é negativo.

Nos três casos temos uma equação do 1º grau representando as funções, por isso todos os gráficos resultaram em uma reta.

2.1.3- Etapa de Aprofundamento

Para reforçar o aprendizado, levei a turma ao laboratório de informática, e com auxílio do *Software GeoGebra*, construímos passo a passo os três gráficos estudados em sala de aula.

Na primeira aula houve alguma dificuldade de acesso ao programa e na digitação da equação. Ao digitar a equação da função constante y= 16,35 aparecia a mensagem “entrada inválida”. Então solicitei para digitar o número 16,45 não com vírgula, mas com ponto. Mesmo assim não aparecia nada, eles comentaram. Disse para eles diminuírem o zoom, para que o gráfico ficasse visível na tela.

Quando perceberam o gráfico construído na tela, ficaram surpresos e comentaram que tiveram muita dificuldade em construir no caderno, mas no computador era muito fácil.

Pedi que experimentassem valores diferentes de 16,35 e verificassem o que acontecia. Perceberam que os gráficos eram sempre paralelos ao eixo x, portanto sempre constante.

Na construção do gráfico da equação y= 2,45x + 16,35 tiveram dificuldade na visualização também. Sugerimos que aplicassem um zoom de 25% na janela de visualização e na escala entre os eixos x e y uma proporção de 1 para 5. Sempre orientando passo a passo cada comando e repetindo cada vez que se fazia necessário para aqueles com maior dificuldade. Sugerimos a aplicação da malha quadriculada para facilitar a visualização. Depois pedi para substituir o valor 2,45 por valores diferentes e observar o que acontecia com o gráfico. E concluíram que alterava no gráfico a inclinação da reta. Então expliquei que por isso esse coeficiente é chamado coeficiente angular.

Na construção do gráfico da equação y= - 2x + 180 sugeri para uma boa visualização que a escala entre os eixo x e eixo y estivesse na proporção 1:2 e o zoom numa aproximação capaz de visualizar o gráfico cortando os dois eixos x e y. Após as explicações eles experimentaram outros valores negativos para substituir o coeficiente –2 da variável x, e perceberam a mudança na inclinação da reta.

Então concluímos que quando a função é constante o gráfico resulta em uma reta paralela ao eixo x. Quando a função é crescente a função tem coeficiente de x positivo. Quando a função é decrescente o coeficiente de x tem valor negativo. No final eles pediram para terem mais aulas no laboratório que ficava muito mais fácil e interessante aprender matemática. Os questionamentos que eles faziam entre si no laboratório e o envolvimento dos alunos para construir os gráficos demonstraram o interesse e a participação da turma.

3.RESULTADOS

Antes de fazer uma análise dos resultados obtidos se faz necessário observar que o rendimento varia muito de turma para turma. E o que eu passo a relatar a seguir é baseado em observações dos exercícios realizados, nas atividades da turma, no comportamento e na aceitação de se submeterem a participar deste trabalho, sem um aprofundamento técnico ou rigoroso no sentido avaliativo. Cada grupo realizava sua atividade e a equipe entregava uma folha em nome do grupo. No laboratório cada gráfico ficava gravado em sua pasta individual onde nós podíamos acessar posteriormente.

Pela nossa experiência com turmas anteriores a aplicação da Metodologia da

Resolução de Problemas no conteúdo de Funções nesta turma teve um rendimento melhor tendo em vista vários fatores: o envolvimento dos alunos na resolução das questões; a participação ativa no trabalho em grupo; o empenho no laboratório na pesquisa realizada na Internet e na construção dos gráficos com auxílio do *software GeoGebra*; a preocupação dos alunos que faltavam em alguma atividade em recuperar o conteúdo e não deixar de concluir as atividades propostas; o depoimento da professora da disciplina de Física que percebeu que esta turma embora fosse o período da noite teve mais facilidade em construir os gráficos do Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) no seu conteúdo de Mecânica, comparativamente com a outra turma dela do período da manhã.

Minha sugestão para aprofundamento deste trabalho seria preparar uma avaliação para quantificar o rendimento do ensino de Funções em turmas com a aplicação desta Metodologia e em outras que não foram aplicados. Pode-se fazer uma análise mais criteriosa dos resultados e quantificados em termos percentuais.

5. CONCLUSÃO

Pelos fatos expostos nos resultados obtidos com a turma, concluo ter sido este projeto de Resolução de Problemas Aplicado no Estudo das Funções, uma alternativa viável e possível no ensino médio. Pode ser utilizada por professores de Matemática em vários conteúdos e é uma opção para buscar a motivação o interesse e o gosto pela Matemática.

Com a realização deste trabalho pude perceber que a turma aprendeu a calcular a sua tarifa de água, aprendeu o conceito de Funções, utilizou os computadores da escola e trabalhou com um software de Matemática.

Ao realizar este projeto do PDE tive a oportunidade de aprofundar meus conhecimentos na minha disciplina de trabalho, como também a implementação de um tema de estudo que eu escolhi e pude implementá-lo na escola em que trabalho.

Por fim, acredito nesta metodologia como uma aproximação entre a teoria e a prática, uma alternativa prazerosa de tornar a matemática mais atrativa e interessante, e possibilitar aos educandos um acesso ao mundo virtual. Pois como já relatado, a realização deste projeto propiciou para muitos o primeiro contacto com o computador / Internet.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; DIAS, Michele Regiane. **Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino aprendizagem**. Bolema, 2004.

BRANSFORD, J. D; STEIN, **B. S. *The ideal problem solver*.** W.H. Freeman and Company, cap. 1,2,3,4,8, 1984. citado em http://www.alb.com.br/anais16/ sem15dpf /sm15 ss12_06.pdf acessado em 25/05/2008.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12ª edição. Editora Ática, 2005.

____________ **Matemática. V**olume único. 1º edição. Editora Ática, 2008.

FIGUEIREDO, R. M. E. & GALVÃO, O. de F. **Estratégias de resolução de problemas matemáticos em crianças do ensino fundamental: um estudo descritivo**. In: CARMO, J. do S. *Dificuldades da aprendizagem: o instrumento da análise do comportamento no ensino da leitura, escrita e conceitos matemáticos.* Belém: UNAMA, 1999.

GAZIRE, E. S. **Perspectivas da resolução de problemas em educação matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) UNESP / Rio Claro, São Paulo, 1988.

HELENA, C. C.; VICENTE, C. C. **Funções.** Editora UEPG, 2006.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, volume 2, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação, **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2006.

POLYA, G. F. **A arte de resolver problemas.** 7º edição. Editora Interciência, 2006.

SEED, **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná**. Editora Memvavmem, 2006.

STEPHEN, K.; ROBERT, E. R. **A resolução de Problemas na Matemática Escolar**. 5º edição. Editora Atual, 1997.

WERNEK, H. **Ensinamos demais aprendemos de menos.** 20ª edição**,** São Paulo Editora Vozes, 2002.