



**GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCAÇÃO – SEED
SUPERINTENDÊNCIA DA EDUCAÇÃO – SUED
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ – UEM**

**O ESTUDO DAS FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO COM MATERIAIS
MANIPULÁVEIS**

**Prof. PDE – Carlos Alberto Marques Estima
Orientador – João Cesar Guirado**

Maringá, dezembro de 2009

O ESTUDO DAS FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Carlos Alberto Marques estima¹
João Cesar Guirado²

Resumo

Atualmente, ensinar Matemática no Ensino Médio se tornou um grande desafio para os professores, pois além de muitos conteúdos serem abstratos, existe também o problema da falta de interesse por parte dos alunos.

Este trabalho apresenta diferentes propostas de atividades envolvendo o conceito de função, as quais são desenvolvidas, sempre que possível, utilizando materiais manipuláveis, de modo que o aluno possa, por meio da obtenção de dados, construir as respectivas funções. Desta forma, é possível explorar os diversos tipos de funções: afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica. Acredita-se que, com essa metodologia de trabalho, os alunos estarão mais motivados, aumentando, desta forma, o interesse no aprendizado da matemática, pois pesquisas revelam que a manipulação de materiais torna a Matemática menos fria e abstrata, vestindo com “roupas novas” velhos conteúdos, recursos esses que poderão estimular e motivar os alunos, melhorando o interesse e a aprendizagem.

Palavras-chave: Materiais manipuláveis, funções, ensino médio.

Abstract

Currently, to teach mathematics in average education it became a great challenge for the professors, therefore beyond many contents to be abstract, also exists the problem of the lack of interest on the part of the pupils. This work presents different proposals of activities involving the function concept, which are developed, whenever possible, using material manipulable, in way that the pupil can, by means of the attainment of data, to construct the respective functions. In such a way, it is possible to explore the diverse types of functions: similar, quadratic, exponential, logarithmic

¹ Professor da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná

² Professor orientador - Universidade Estadual de Maringá

and trigonometrical. It is given credit that, with this methodology of work, the pupils more will be motivated, increasing, in such a way, the interest in the learning of the mathematics, therefore research discloses that the manipulation of materials becomes the abstract Mathematics less cold and, dressing with “new clothes” old contents, resources these that will be able to stimulate and to motivate the pupils, improving the interest and the learning.

Key words: Manipulable materials, functions, average education.

INTRODUÇÃO

A escolha deste tema pautou-se pela constatação da falta de interesse dos alunos no ensino de funções e os resultados obtidos são quase sempre inexpressíveis, ao se tratar da apropriação do conhecimento. Uma das razões que pode justificar esse desestímulo é a abordagem metodológica enfatizada nos textos escolares.

É muito comum questionar os alunos sobre um determinado assunto, pré-requisito para se trabalhar um conteúdo, e eles responderem que “o professor não deu essa matéria” ou “não me lembro nada sobre esse assunto”. Além desses fatos, percebe-se que o livro didático já não desperta mais o interesse do aluno diante da gama de novidades tecnológicas que são oferecidas quase que diariamente a esse aluno. Nesse sentido, o desafio é saber de que forma podemos, enquanto educadores, contribuir em sala de aula, para motivar os alunos a se interessarem pelas aulas de Matemática.

É sabido que Função é um dos conceitos mais importantes da Matemática, e também que as suas aplicações abrangem várias áreas do conhecimento humano. Apesar da grande importância desse conteúdo, é enorme a dificuldade que os alunos do Ensino Médio têm na compreensão deste conceito, que pode estar, muitas vezes, relacionada à forma com que o conceito é introduzido pelo professor de Matemática, diante da capacidade de abstração exigida para sua compreensão. Por isso, cabe aos educadores desenvolverem diferentes práticas pedagógicas para encontrar caminhos que solucionem essa deficiência, como por exemplo, a utilização de materiais manipuláveis.

Desta forma, pretende-se apresentar um rol de situações envolvendo o conceito de função, de modo que, sempre que possível, o aluno utilize materiais manipuláveis e possa chegar à abstração de forma mais dinâmica, tornando o ensino da Matemática mais prazeroso.

Alguns materiais foram produzidos pelos próprios alunos, que contribuirão para enriquecer o acervo do Laboratório de Matemática, o qual, por sua vez, será incrementado e transformado realmente num local apropriado para leitura, pesquisa e estudo, criando assim um espaço de construção coletiva do conhecimento.

De acordo com as DIRETRIZES CURRICULARES DO PARANÁ (2008),

O professor em sua prática poderá fazer uso de recursos metodológicos variados tais como: modelagem matemática, etnomatemática, resolução de problemas, jogos, recursos tecnológicos, história da matemática e desenvolvimentos de projetos que aproximem a teoria e a prática, para que o aluno possa associar o conhecimento matemático aos diversos contextos sociais históricos e culturais.

Nesse sentido, é interessante apresentar propostas diferentes de se trabalhar com funções, de modo que o aluno saia um pouco da “frieza” do livro didático e conheça formas mais atrativas e instigantes de se aprender este conteúdo, pois tais recursos poderão estimular e motivar este aluno, melhorando assim seu interesse e sua aprendizagem.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Matemática é uma das ciências mais antigas, a sua existência é percebida nas mais remotas civilizações. Desde a antiguidade o homem utiliza a Matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. Os egípcios, por exemplo, usavam a Matemática para diversos fins, como na construção das pirâmides, diques, canais de irrigação e também na astronomia. Os gregos antigos tinham grande domínio da matemática, deixando como legado, vários conceitos matemáticos. Hoje é uma ciência que se integra no patrimônio cultural da humanidade.

Atualmente, a matemática se divide em vários conteúdos estruturantes, e este projeto desenvolvido enfatiza o conteúdo de Funções.

Ao pesquisar a história da Matemática, percebe-se que o conceito de Função, foi se formalizando de acordo com a necessidade do homem em resolver problemas de ordem prática, de forma intuitiva sem uma definição precisa de sua origem, pois segundo Zuffi (apud Chaves, 2004, p. 3)

(...) não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo]. Alguns deles consideram que os Babilônios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a idéia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear.

Na Idade Moderna, os matemáticos foram aos poucos formalizando o conceito de Função, por exemplo, a palavra *função* foi utilizada pela primeira vez por Leibniz em 1694, que servia para expressar quantidade associada a uma curva. A notação $f(x)$ é creditada ao matemático Leonhard Euler (1707-1783), que define função de uma quantidade real como qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes. Muitos outros matemáticos apresentaram definições para o conceito de função e a definição mais próxima daquela usualmente apresentada nos textos escolares deve-se a Riemann-Dirichelet, de acordo com Boyer (1993, p. 405), Dirichelet definiu função assim:

Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x .

Contudo, apenas com a criação da teoria dos conjuntos por Cantor e outros, é que o conceito passou à sua forma eminentemente matemática e hoje possui uma amplitude tal que independe da natureza do campo em que é aplicado. Desta forma, em nível escolar, o conteúdo de Funções representa um papel fundamental dentro da matemática, pois a sua aplicabilidade é muito grande, principalmente em

situações do cotidiano. Portanto de acordo com as Diretrizes Curriculares do Paraná (2008, p.29), “Na Educação Básica o aluno deve compreender que as funções estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e modelam matematicamente situações que, pela resolução de problemas, auxiliam o homem em suas atividades”.

A utilização de materiais manipuláveis no ensino da Matemática (no caso Funções) tem sido objeto de estudo de várias pesquisas realizadas nos últimos séculos. Segundo Nacarato (2005)

O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920. Esse período foi marcado pelo surgimento de uma tendência no ensino de Matemática que ficou conhecida como *empírico-ativista*, decorrente dos ideais escolanovistas que se contrapunham ao modelo tradicional de ensino no qual o professor era tido como elemento central do processo de ensino. Segundo Fiorentini (1995), na concepção empírico-ativista o aluno passa a ser considerado o centro do processo e os métodos de ensino – tendo como pressupostos a descoberta e o princípio de que “aprende-se a fazer fazendo” - se pautava em atividades, valorizando a ação, a manipulação e a experimentação. O ensino seria baseado em atividades desencadeadas pelo uso de jogos, materiais manipuláveis e situações lúdicas e experimentais.

São vários os tipos de materiais manipuláveis, como por exemplo: geoplanos, geoespaços, sólidos geométricos, tangran, ábaco, material montessoriano (cuisenaire ou dourado), jogos de tabuleiro, esqueletos de poliedros, etc. No caso específico de funções, podemos citar a utilização de recipientes de vários formatos, bolinhas de gude, rampas, mecanismos articuláveis, tubos cilíndricos, trenas, etc.

De acordo com Passos (2006, p. 78)

OS materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa. [...] esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído.

Apesar de o material manipulável ser interessante e importante no processo ensino-aprendizagem, o professor tem que saber utilizá-lo corretamente para que se aproveite toda a potencialidade que ele oferece, pois segundo Lorenzato a compreensão do conceito depende do professor muito mais do que do material didático (MD). Isso é ratificado ao afirmar que “(...)a eficiência do MD depende mais do professor do que do próprio MD, e ainda mostra a importância que a utilização correta do MD tem no desenvolvimento cognitivo e afetivo do aluno.” (LORENZATO, 2006, p. 25). Nesse sentido, é necessário que o material manipulável venha de anseio às relações matemáticas que o professor pretende mostrar ao aluno, de modo que este ao manusear o material perceba as relações matemáticas nele imbricadas. O material por si só não garante uma melhor aprendizagem da matemática, é preciso que o professor reflita sobre a proposta pedagógica que o material possui, e saiba o momento certo de apresentá-lo ao aluno.

Procedimentos metodológicos

Este trabalho teve como ação preliminar a pesquisa de diferentes materiais manipuláveis que envolvem o estudo de funções. Num segundo momento, em sala de aula, os materiais foram apresentados aos alunos, ou por eles confeccionados, para que se familiarizassem com esses objetos com o objetivo de extrair deles as expressões algébricas das funções e estudar os conceitos inerentes a esse assunto.

Foi desenvolvida também uma produção didático-pedagógica na categoria de **unidade didática**, contendo textos, figuras e atividades com materiais manipuláveis, produção esta destinada a professores de matemática do Ensino Médio e escolas públicas do Paraná.

Algumas atividades da **unidade didática** foram aplicadas com os alunos do ensino médio do período diurno do Colégio Estadual Jardim Panorama do município de Sarandi - Pr. A seguir serão descritas quatro dessas atividades, que foram aplicadas, bem como algumas considerações em relação aos resultados obtidos.

Atividade 1:

Esta atividade tinha por objetivo medir os comprimentos de uma trena fixada na parede, comprimentos estes que eram visualizados através de tubos cilíndricos de diversos comprimentos.

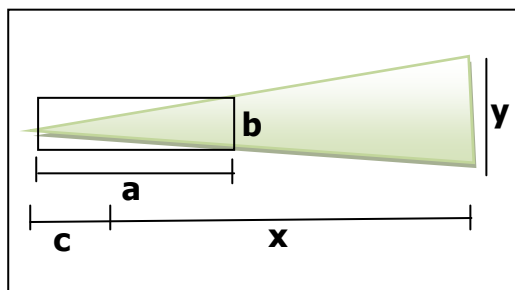


Fonte: autor

Cada aluno se posicionava a uma distância (x) da parede, visualizava o comprimento (y) da trena e anotava os valores x e y numa tabela. Este procedimento era repetido para cinco valores de x , e de posse desses dados, o aluno construía um gráfico do comprimento visualizado em função da distância que o aluno se encontrava da parede. Percebeu-se que quanto mais precisa era a medição, mais o gráfico se aproximava de uma reta, pois a expressão algébrica obtida com as variáveis x e y era a expressão de uma função afim, de acordo com a demonstração a seguir:

Consideremos como variável independente a distância (x) que o observador se encontra da parede e como variável dependente (y) a medida da imagem da trena que o observador enxerga na parede, ou seja:

- **a** é a medida do comprimento do tubo;
- **b** é a medida do diâmetro do tubo;
- **c** é a medida do que falta do tubo, que se encontra antes da ponta dos pés do observador.



Fonte: autor

Notamos que há na figura, dois triângulos semelhantes: um de altura a e base b , e outro de altura $(x + c)$ e base y . Nesse caso, temos a seguinte proporção:

$$\frac{y}{b} = \frac{x+c}{a}$$

$$y = \frac{(x+c)b}{a}$$

$$y = \frac{bx}{a} + \frac{bc}{a}$$

Como sabemos que **a**, **b** e **c** são valores constantes, podemos considerar $\frac{b}{a} = m$ e $\frac{bc}{a} = n$. Daí, temos que: $y = mx + n$.

Observe que a expressão algébrica obtida é a expressão de uma função afim. Nesse momento, o professor poderá formalizar o conceito desta função como segue:

Toda função do tipo $f(x) = ax + b$, com **a** e **b** reais quaisquer, é denominada **função afim**.

Ressalta-se que essa foi uma experiência interessante, pois foi aplicada em uma turma considerada apática, e a atividade despertou o interesse de todos. A dificuldade encontrada foi em relação às dimensões da sala, pois como ela era pequena para 48 alunos, durante o desenvolvimento da atividade houve certo tumulto.

Atividade 2:

Para a realização desta atividade foi solicitado aos alunos que cada um deles trouxesse um recipiente cilíndrico e bolinhas de gude.

Procedimentos:

- colocar água no copo até atingir uma altura de 6cm;
- colocar as bolinhas de gude no copo (5 de cada vez) e anotar o resultado;
- construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico da relação entre x e y;
- deduzir uma relação entre x e y, a partir da situação geométrica.



Fonte: autor

Vamos considerar o número de bolinhas como a variável independente (x) e o nível de água como a variável dependente (y).

Os pares ordenados obtidos, plotados no plano cartesiano, estão próximos de uma reta. Para a comprovação de que geometricamente se obtém uma expressão algébrica da forma $y=ax+b$, basta verificar que a altura do nível de água é igual à soma da altura do nível inicial e a variação da altura à medida que são colocadas as bolinhas. Esse fato é comprovado utilizando a igualdade

Vol. do copo = vol. inicial de água + vol. das bolinhas colocadas no copo.

A participação dos alunos foi total, todos eles trouxeram os recipientes e as bolinhas de suas casas. Depois de utilizados os materiais foram doados para o Laboratório de Matemática da escola. Estes materiais podem ser utilizados no primeiro ano do ensino médio, e também na oitava série, no momento em que o professor estiver introduzindo o conceito de função para seus alunos.

Atividade 3:

Este trabalho foi realizado com a turma do segundo ano. Foi elaborado um jogo chamado **Baralho da função logarítmica**, onde o objetivo era a familiarização com a função logarítmica e a fixação das propriedades dos logaritmos. A sala foi dividida em grupos de três ou quatro alunos, e cada grupo tinha



Fonte: autor

que construir um jogo com 50 cartas, sendo 25 contendo expressões algébricas de funções logarítmicas e um valor de x e as outras 25 cartas-solução, contendo os respectivos valores dessas funções calculados para o valor de x especificado.

Regras:

- este jogo é para no máximo 5 alunos;
- cada jogador recebe 5 cartas de uma única função;
- as soluções são embaralhadas e postas em um monte com os registros não à vista;
- sorteia-se de alguma maneira quem vai iniciar o jogo, e depois segue no sentido anti-horário;
- o primeiro jogador pega uma carta-solução e confere se ela é solução de alguma de suas cartas; caso isso ocorra, exhibe aos demais jogadores o par

obtido, deixando-o sobre a mesa e repete o procedimento; caso contrário, devolve a carta ao monte, sem que os outros a vejam, e passa a vez para o próximo jogador.

- o jogo prossegue até que um dos jogadores obtenha 5 pares de cartas e esse será o vencedor, desde que os pares estejam corretos. Isso pode ser feito, consultando a folha que contém o registro dos gráficos das funções; caso se verifique a incorreção de algum dos pares apresentados, o jogador é desclassificado e as suas cartas-solução são devolvidas ao monte, o qual será embaralhado novamente para a continuidade do jogo.

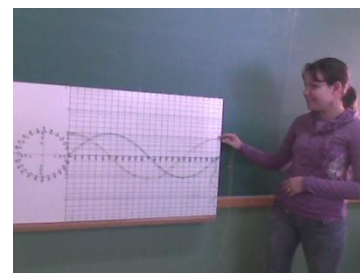
Como esta atividade envolve a função logarítmica, convém que antes da aplicação do jogo o professor recorde o conceito dessa função, explorando seus gráficos.

Foram manufaturados 10 jogos, que agora fazem parte do acervo do Laboratório de Matemática do referido colégio de intervenção, os quais estão sendo utilizados para trabalhar este conteúdo com as turmas da primeira série do Ensino Médio..

Atividade 4:

O conteúdo explorado nesta atividade foi a função trigonométrica.

A proposta inicial para o desenvolvimento da atividade era com a turma do segundo ano, mas ao conversar com os alunos do terceiro ano sobre conteúdos já vistos , constatou-se que não tinham visto esta parte do conteúdo



Fonte: autor

de trigonometria, então esta atividade foi desenvolvida em uma turma da terceira série do Ensino Médio..

Para introduzir o conteúdo, a sala foi dividida em grupos de três ou quatro alunos, e cada grupo construiu na sala de aula um geoplano chamado de **Ábaco trigonométrico**. Este geoplano foi confeccionado em MDF com dimensões 30cmx30cm. Nesse material, os alunos construíram uma circunferência trigonométrica, onde com o auxílio de elásticos e pregos fixos nos arcos marcados na circunferência, era possível, sem dificuldade, determinar os valores do seno, co-

seno e tangente dos arcos notáveis e seus simétricos. Foram construídos dez geoplanos, que hoje já estão sendo utilizados em outras turmas, com ótimos resultados de aprendizagem.

Para a construção de gráficos das funções seno e co-seno, foi utilizado um geoplano trigonométrico (foto acima). Esta atividade foi muito útil nos estudos das funções trigonométricas, pois até os alunos que tinham dificuldades, conseguiam construir os seus gráficos com a ajuda do geoplano.

Este material foi socializado com os professores de matemática através do curso de Laboratório de Matemática realizado no Colégio Gastão Vidigal, em Maringá.

Considerações Finais

Ao elaborar o projeto deste trabalho, sempre tive como idéia principal a utilização de uma metodologia que fosse diferente da metodologia tradicional, pois é notável a falta de interesse dos alunos em relação ao conteúdo de matemática do ensino médio.

A utilização de materiais manipuláveis no estudo das funções mostrou outro lado da matemática, um lado mais concreto, onde o aluno pôde perceber alguns conceitos que antes só eram mostrados de forma abstrata, e com isso o interesse pelo conteúdo aumentou consideravelmente, principalmente com os materiais que foram construídos pelos próprios alunos.

Chegando ao término deste trabalho, pude concluir que os problemas de aprendizagem existem e são muitos, mas que também existem soluções para esses problemas. É muito gratificante quando percebemos que ouve uma mudança significativa, tanto no comportamento do aluno, quanto em relação à sua aprendizagem.

Referências bibliográficas

BOYER, Carl. ***História da Matemática***, 10^a impressão. São Paulo : Edgar Blücher/Edusp, 1993.

GRAVINA, Maria Alice. ***Funções e gráficos: um curso introdutório***. http://www.mat.ufrgs.br/~licenmat/trabalhos/trab2/fun_graf.htm. Acesso em 26/11/2008.

LEVANDOSKI, Antonio Amílcar. ***Materiais didáticos manipuláveis trigonométricos***. (apostila). Curitiba, 2008.

LORENZATO, Sergio Aparecido. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sergio Aparecido (Org.). ***O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores***. Campinas: Autores Associados, 2006.

NACARATO, A. M. ***Eu trabalho primeiro no concreto***. Revista de Educação Matemática Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, v. 9, n. 9 e 10, p. 1- 6, 2004-2005.

OLIVEIRA, Rosana *et al.* ***Materiais concretos para o ensino das funções exponencial e logarítmica***. www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO75591618715T.doc . Acesso em 08/12/2008.

PARANÁ, Governo do Estado do / Secretaria de Estado da Educação. ***Diretrizes Curriculares de Matemática Para as Séries Finais do Ensino Fundamental e Para o Ensino Médio***. Curitiba, 2008.

PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglioni. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio Aparecido (Org.). ***O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores***. Campinas: Autores Associados, 2006.

WINTER, Mary Jean e CARLSON, Ronald J. ***Algebra Experiments I***. U.S.A: Dale Seymour Publications, 1993.