

GEOMETRIA PROJETIVA NO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Ivone Watermann¹
Valdeni Soliani Franco²

RESUMO

O presente artigo é o resultado final do estudo sobre uma das Geometrias não Euclidianas – a Geometria Projetiva – realizado durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná – PDE 2008/2009 – na Universidade de Maringá. Nesta produção consta a descrição dos resultados da implementação de estudos desenvolvida com alunos da oitava série do ensino fundamental no período vespertino do Colégio Estadual de Cruzeiro do Oeste – PR, que foram apresentados aos professores do município e da Rede Pública Estadual através do GTR (grupo de trabalho em rede). Trata-se de um assunto novo, constante nas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná, para trabalhar noções básicas de geometria projetiva, e, por ser um tema recente o conteúdo é pouco divulgado em sala de aula. Nesse intuito o foco é divulgar a professores e alunos a beleza dessa geometria por meio de atividades simples e dinâmicas, respeitando uma sequência lógica da abordagem das técnicas de perspectiva (sobreposição, mudança de dimensão e de espaço e linhas de fuga), que visam representar o espaço tridimensional sobre uma superfície plana. Para compreender as características e representar objetos os alunos a princípio devem conhecer a história da Geometria Projetiva, observam e fazem comparações de desenhos e fotos, exploram as formas dimensionais e tridimensionais num laboratório de ensino de matemática.

Palavras-chave: Geometria projetiva; Perspectiva; Ponto de fuga; Laboratório de matemática.

ABSTRACT

The present article is the final result of a study on one of non-Euclidian Geometries – the Projective Geometry – carried on during the Educational Development Program of Paraná State – PDE 2008/2009 in Maringá University. In this production there is the description of results of studies implementation developed with elementary students of the 8th year of the afternoon period of State Elementary School of Cruzeiro do Oeste – PR, which was presented to town and state teachers through GTR (network group). It is a new issue presented in Curricular Guidelines for Basic Education of Paraná State, aimed to work on basic notions of Projective Geometry, and, being a recent theme, the

¹ Professora da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná
e-mail: ivonewatermann@seed.pr.gov.br

² Professor Drº do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá
e-mail: vsfranco@uem.br

contents are barely divulged in classroom. The focus is to divulge to teachers and students the beauty of this geometry using simple and dynamic activities respecting a logical sequence of approaching perspective techniques (over-positioning, dimension and space alterations and fugue lines) which aim to represent tridimensional space on a plain surface. To comprehend the characteristics and represent objects the students initially must know Projective Geometry history, then observe and make comparisons of photos and drawings, and explore dimensional and tridimensional shapes in a mathematics laboratory.

Key-words: Projective Geometry, perspective, fugue point, mathematics laboratory.

INTRODUÇÃO

A ideia de pesquisar sobre Geometria Projetiva surgiu da necessidade de trabalhar o tema em sala de aula, pois a partir de 2008 consta como componente específico dos conteúdos estruturantes das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, assim como fractais e topologia. Temas da Geometria não Euclidiana desconhecidos por mim até então, uma vez que não foram vistos nos bancos acadêmicos e pouco encontrado nos livros didáticos e fontes bibliográficas.

O primeiro contato com a Geometria Projetiva se deu nos encontros com o professor orientador na Universidade Estadual de Maringá, a beleza da Geometria Projetiva demonstrada por ele nos cursos específicos de matemática durante o PDE foi o ponto chave para a escolha do tema. Com a informação sobre o assunto e indicações de algumas fontes de pesquisas bibliográficas deu-se início a pesquisa.

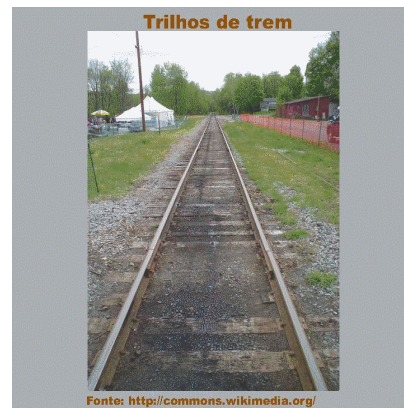
A história da geometria projetiva começa na Itália no século XV, nasceu do esforço de criar uma teoria racional onde as regras práticas que os artistas e os pintores da Renascença (Leon Battista Alberti, Paolo Uccello, Leonardo da Vinci, Piero della Francesca, Dürer etc.) tinham descoberto, para representar na teoria, de modo correto, a imagem suscitada em nossos olhos pelos objetos do mundo exterior.

Os artistas, buscando mais realismo para suas obras, introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectividade. Porém, demorou cerca de dois

séculos para que essas ideias pudessem ser formuladas matematicamente. Essa construção foi feita por um pequeno grupo de matemáticos franceses motivado por Gerard Desargues (1591 – 1661), contudo, talvez pela própria maneira como tivesse sido escritos, em uma linguagem um tanto peculiar, o trabalho e as ideias de Desargues não foram bem aceitas na época. Somente no início do século XIX, Jean Victor Poncelet (1788-1867) pôde resgatá-los. Poncelet prisioneiro de guerra russo, sem livros nas mãos criou sua grande obra sobre a Geometria Projetiva publicada em 1822 com o título de “Tratado das propriedades projetivas das figuras”.

A Geometria Projetiva fornece a indispensável base teórica para o entendimento da perspectiva utilizada pelos renascentistas. Para tal teoria as dimensões reais e as propriedades métricas dos objetos em questão têm escasso valor, porque não se transmitem às suas imagens ou projeções, o que é importante conhecer são as propriedades visuais das figuras consideradas. A nova Geometria, visando criar tais regras empíricas, negligenciou, então, as velhas propriedades dos “Elementos” de Euclides e concentrou o interesse sobre as propriedades visuais da figura. Dessa forma pode-se afirmar que enquanto a geometria euclidiana se preocupa com o mundo em que vivemos a geometria projetiva lida com o mundo que vemos.

Um exemplo que evidencia as diferenças entre a Geometria Projetiva e a Geometria Euclidiana, é o que ocorre com a interseção de retas. Enquanto na Geometria Euclidiana pode haver retas que não se interceptam, na Geometria Projetiva isto nunca ocorre. Imagine uma estrada de ferro retilínea, os trilhos nunca se cruzam. Na prática, os trilhos de trem são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito. “Essa é uma das características marcantes da geometria projetiva, duas retas quaisquer sempre se interceptam” (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p.2).



O ensino de matemática tem se modificado nos últimos tempos, levando professores e alunos a perceberem a existência de outras geometrias, além das euclidianas. Segundo as Diretrizes Curriculares da Rede Pública do Estado

do Paraná (2008), as discussões entre educadores matemáticos do início do século XX procuravam trazer para a educação escolar um ensino da Matemática diferente daquele proveniente das engenharias que prescrevia métodos puramente sintéticos, pautados no rigor das demonstrações. Surgiram, então, proposições para um ensino da Matemática baseado nas explorações indutivas e intuitivas, o que configurou o campo de estudo da Educação Matemática (SCHUBRING, 2003).

No passado, vários autores como Comenius, Locke, Rousseau, Pestalozzi, Froebel, Herbart, Dewey, Poincaré, Montessori e outros, apontam, cada um em sua época, a importância da utilização de materiais manipuláveis. Dentre muitos autores que salientam a importância da implantação de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) no ambiente escolar, destaca-se significativamente Lorenzato (2006, p. 41), onde afirma que:

O Laboratório de Ensino de Matemática em uma escola constitui um importante espaço de experimentação para o aluno e, em especial, para o professor, que tem a oportunidade de avaliar na prática, sem as pressões do espaço formal tradicional da sala de aula, novos materiais e metodologias, resultados de pesquisas disponibilizados na literatura, ampliando sua formação de modo crítico.

No processo ensino-aprendizagem o aluno deve realizar experiências com materiais concretos, usando a intuição que desperta curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, vivenciando de forma dinâmica os conteúdos, descobrindo conceitos e interiorizando-os, que servirão como auxiliares no desenvolvimento de seu raciocínio lógico, a estruturação do pensamento e a melhoria na qualidade de ensino.

Ao desenvolver um estudo detalhado sobre a psicogênese do espaço perceptivo e representativo, Piaget (1993) constatou que a criança, inicialmente, percebe o espaço por meio dos sentidos e dos próprios deslocamentos e, com o aparecimento da linguagem, da função simbólica e da imagem, o espaço perceptivo se tornará representativo e reconstruirá em outro plano, tudo o que o espaço perceptivo conquistou. É por meio de relações estabelecidas pela criança que o espaço é percebido e representado, sendo de natureza topológica, projetiva e euclidiana.

A partir dessa reflexão, pode-se dizer que:

Os movimentos de exploração tátil que determinam a imagem visual. Isto se evidencia quando a criança reconhece nas figuras apresentadas àquela que corresponde à exploração. Além disso, mostram que o sujeito só reconhece e representa formas que tem capacidade de reconstruir devido às suas ações, e que abstrai essas formas partindo da coordenação das ações, e não só do objeto. (PIAGET, 1993, p. 58)

Durante a pesquisa procurou-se integrar a exploração tátil e a percepção do espaço direcionando a visão do estudante para a Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática.

Dessa forma, esse artigo tem a intenção de divulgar a pesquisa e os trabalhos realizados apresentando noções básicas da Geometria Projetiva, utilizando técnicas de perspectiva em um laboratório de ensino de matemática a partir de uma investigação e da formação do olhar. Argumentando também sobre a necessidade de implantação do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) nas escolas.

DESENVOLVIMENTO

O projeto teve início investigando os alunos sobre a geometria que conheciam; falaram em triângulos, quadrados, cubos e pirâmides que são exemplos de alguns polígonos e poliedros, numa linguagem simples utilizada em sala de aula. Quando indagados qual era esse tipo de Geometria notou-se que os alunos no geral não sabiam que era a Geometria Euclidiana, eles somente estudaram como geometria. Não foi apresentado nessa aula o tema da pesquisa, eles perceberam que se tratava de geometria, devido aos comentários iniciais.

A primeira atividade desenvolvida com os alunos foi utilizando a metade de uma folha sulfite, desenharam uma auto estrada, sem ter nenhuma noção de perspectiva. Alguns alunos ficaram tímidos, falaram que eram péssimos desenhistas, mas foram estimulados a desenhar o que tinham capacidade de desenvolver; outros sobressaiam inclusive na pintura do desenho.

Veja no quadro abaixo a folha que foi entregue e um desenho feito por uma das alunas da turma.



De posse de alguns trabalhos da turma, percebe-se que a maioria dos estudantes não consegue colocar no desenho a noção de profundidade.



A partir desse primeiro trabalho ficou evidente a necessidade de estudar a Geometria Projetiva com a turma.

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA E A GEOMETRIA EUCLIDIANA

Para que pudesse dar prosseguimento ao projeto que necessitava de um Laboratório de Matemática, mas não tinha espaço físico no colégio, foi pedido junto à direção da escola para acomodá-lo no mesmo espaço do Laboratório de Ciências, não desfazendo de nenhum material desse ambiente e sem usar os balcões onde estão guardados os objetos e os reagentes químicos devidamente embalados. Lembrando que as aulas do projeto obedeceram a um agendamento prévio para não interferir nas aulas de ciências.

Nesse ambiente foram acrescentados dois armários e algumas estantes fixas ao alto para guardar os materiais manipuláveis e jogos matemáticos já existentes no colégio, e outros que são e serão produzidos pelos professores do colégio no decorrer dos anos.

Estando o Laboratório já equipado, escolheram-se os polígonos em MDF, os poliedros e embalagens vazias como material necessário para desenvolver a aula inicial referente ao projeto. Os alunos em grupo manipularam os objetos identificando quais eram tridimensionais e bidimensionais, perceberam que podiam planificar as embalagens vazias tridimensionais em bidimensionais e identificar a formação dos polígonos quadriláteros nessa planificação e que toda figura geométrica de três dimensões é formada por polígonos.

A partir dos polígonos quadriláteros e o poliedro cubo viram retas paralelas desses objetos, mostrando que ali elas não se encontravam. Um aluno com um cubo comentou que o objeto em sua mão era tridimensional, mas se fosse desenhar o mesmo objeto em uma folha de papel ele seria bidimensional, e que seria muito difícil desenhá-lo.

Aproveitando a ocasião e utilizando a tv pendrive apresentou-se a biografia de Euclides e a localização da região onde nasceu, os alunos perceberam que pouco se sabe sobre a vida de Euclides, apenas que era um matemático grego provavelmente oriundo de Atenas, nascido por volta de 300 a.C. Euclides era professor e foi quem formalizou a famosa Geometria Euclidiana que estuda-se até os dias de hoje.

Os alunos ficaram interessados na vida de Euclides e o objetivo da aula foi alcançado quando os estudantes associaram o material trabalhado na aula à Geometria Euclidiana.

Face a esta exposição da vida de Euclides e a Geometria Euclidiana com material manipulável no laboratório, pode-se mostrar a existência de uma outra Geometria, a Geometria Projetiva.

Utilizando slides e um projetor multimídia foi apresentado a história da Geometria Projetiva começando na Itália do século XV, junto com o Renascimento; os alunos compreenderam que espaço euclidiano, simétrico e geométrico se manteve intacto no pensamento matemático medieval e renascentista, pois somente nos tempos modernos puderam ser construídos modelos de Geometrias não Euclidianas. Nessa época a pintura da Idade Média tinha várias funções, inclusive decorar e embelezar mosteiros e igrejas, também ensinar os princípios cristãos revelando episódios do Novo Testamento, e, ao mesmo tempo, educar visualmente o olhar através de imagens e figuras, já que a leitura escrita não era dominada pela maioria esmagadora dos fiéis. Os artistas, buscando mais realismo para suas obras, introduziram os conceitos de ponto de fuga e perspectiva.

Em PowerPoint apresentou-se alguns quadros da Renascença, e os alunos conseguiram perceber que enquanto a Geometria Euclidiana se preocupa com o mundo em que se vive (propriedades visuais e táteis), a Geometria Projetiva lida com o mundo que se vê (propriedades visuais).

Os quadros da Renascença mostraram a profundidade da imagem na tela, o ponto de fuga e linha do horizonte, os quais chamou muita atenção e houve uma maior participação da turma, principalmente quando viram o quadro de Leonardo da Vinci "A Última Ceia" onde as retas convergiam para o rosto de Cristo, comentaram quando observaram o esboço do quadro que realmente Leonardo da Vinci precisa entender de matemática.

Nesse projeto destacou-se entre os artistas da Renascença o trabalho e vida de Leonardo da Vinci, seu olhar de pesquisador incansável, sua vontade de experimentar, criar e inovar sobre a vida o tornou o gênio que a história nos conta. O Leonardo que se conhece é o homem da ciência, que aprendeu observando, não frequentou universidades e deixou algumas pinturas enigmáticas e admiráveis além de centenas de estudos e ideias fantásticas. A

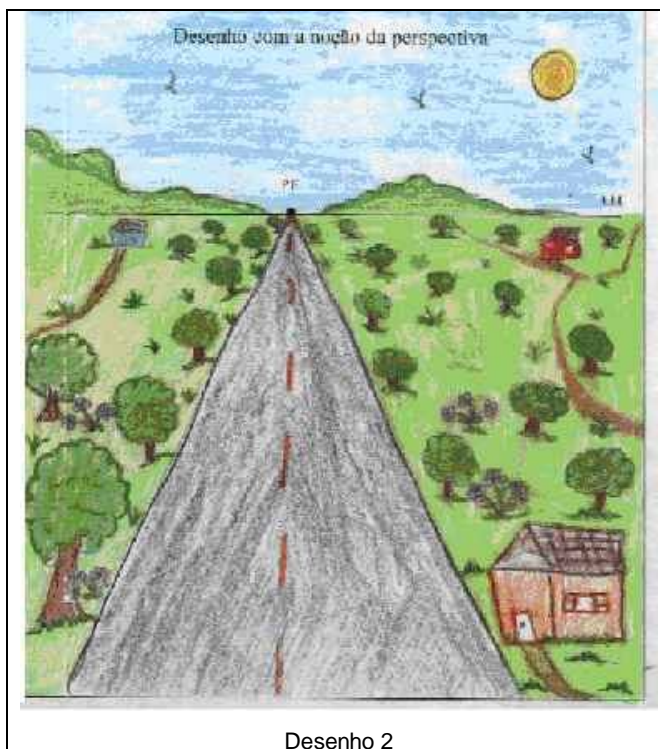
geologia, a botânica, a anatomia, a astronomia, a matemática, a hidráulica, a engenharia, a música, a poesia, a pintura, a arquitetura, parece que absolutamente tudo despertou interesse no jovem Leonardo até o seu último dia de vida deixando mais de seis mil páginas com escritas e desenhos.

Dando prosseguimento devolveu-se o desenho 1 da auto estrada do início da aula, e pediu-se que em outra folha a partir de um ponto de fuga na linha do horizonte como visto nos quadros da renascença fizesse outra estrada utilizando as ideias dos autores.

Veja o exemplo através de um desenho realizado pela mesma aluna do desenho 1.

Analisando os dois desenhos pode-se perceber que no primeiro desenho a aluna não tinha noção da posição, do espaço, da profundidade. Mas, após a visualização dos slides, puderam observar e ter noções de como desenhar.

Isto se nota muito bem no desenho 2, sendo possível observar os detalhes de profundidade como árvores e casas



Desenho 2

maiores à frente e menores no fundo, também a utilização da linha do horizonte e ponto de fuga.

Nos desenhos apresentadas no decorrer do trabalho observa-se que as paralelas do objeto real, ao ser transferido para um projeto (plano), perdem a noção de paralelas, os alunos conseguem entender e mostrar em imagens que na geometria projetiva não existem paralelas.

Compreensão do desenho do natural sem a utilização da perspectiva

Esta é a etapa de forma linear onde predomina a linha como principal meio gráfico. Trata-se de representar um objeto no plano como se apresenta realmente, e, o principal objetivo é aumentar a capacidade de ver os objetos, suas formas e sentir como pintores renascentistas daquela época.

A maneira mais comum e tradicional de representá-lo é vê-lo sempre de um só ponto de vista, os olhos do observador são reduzidos a um ponto geométrico para facilidade de representação gráfica. Assim, colocando-se o modelo a uma distância relacionada com suas dimensões e o afastamento do observador, procura-se reproduzir o objeto o mais fielmente possível, no seu aspecto real, visível.

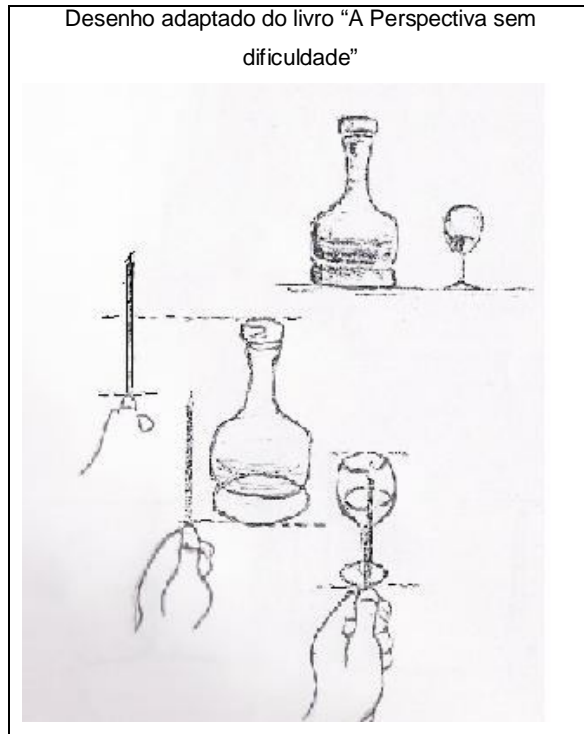
Os estudantes foram levados ao Laboratório de Matemática para desenvolver três atividades. A primeira foi desenhar modelos bidimensionais, como a imagem de uma carta e uma folha de árvore. Todos acharam fáceis e dominaram com certa e relativa facilidade essas duas dimensões espaciais, mas reclamaram quando na segunda atividade, tiveram de representar objetos tridimensionais, que foram o desenho de uma casa, um cubo e uma mesa.

Como o aluno não poderia aprender facilmente a ver e compreender apenas com o auxílio da visão, como terceira atividade alguns processos clássicos de medida visual foram apresentados. Os estudantes tentaram fazer cópia do natural de um vaso de flor que foi colocado no fundo do laboratório, a princípio procurou compreender a forma do modelo, sua posição, distância e espaço ocupado, utilizando o artifício do lápis.

Esse artifício consiste no emprego do lápis comum para desenhar, ou de uma régua graduada, utilizado para medir e obter proporções. Além disso, serve também para verificar as direções das diferentes partes do objeto.

Toma-se este entre o polegar e os dois primeiros dedos, colocando-os no sentido vertical, isto é, movimentando-o sempre num plano de frente com o braço bem estendido. Nesta posição, deve-se levantar ou abaixar o polegar, fazendo-o escorregar ao longo do lápis ou da régua. Este movimento é que regula a altura relativa de cada uma das partes do modelo que está sendo copiado. O polegar funciona como um cursor.

Obtida a altura, faz-se girar o punho sem dobrar o braço e compara-se a medida obtida com a largura, deduzindo-se as proporções do desenho. Entre a largura e a altura, partir sempre da medida menor. É preciso que fique bem claro que se o lápis ou a régua estiver no sentido vertical, o extremo superior da altura do modelo, a extremidade inferior deverá estar na ponta do polegar que vai deslizando ao longo do lápis ou da régua até a ponta da unha coincidir com o extremo inferior do modelo.



Com o auxílio do lápis ou da régua, analise as aberturas de ângulos e as direções das linhas, faces ou aresta, entrando aos poucos em pormenores até concluir o esboço, que é uma das fases essenciais da cópia. Após o esboço geral, passa-se ao traçado definitivo, à representação da forma mais acabada, definitiva e estética.

Em resumo, o modelo após a determinação do ponto central os estudantes puderam enquadrá-lo em um quadrado ou em um retângulo, percebendo nessas atividades que a vantagem em se saber as proporções exatas é uma ilusão de profundidade convincente que o desenho nos proporciona.

Após a conclusão da atividade proposta os estudantes saíram para o pátio da escola tirando as dimensões relativas das coisas que viram à sua volta, utilizando o artifício do lápis. Observaram no corredor da escola as pessoas que passavam, verificando que as mesmas diminuem, rapidamente, de altura à medida que se afastam. Se as pessoas, ao contrário, voltam a cada passo que dão para se aproximar, aparecem cada vez maiores do que eram vistas antes. Após, olhando para uma paisagem qualquer, verifica-se que os objetos mais próximos são maiores que os que se seguem, e cada um deles se tornam cada vez menor à medida que se afastam. Porém, é claro que não

houve modificação no tamanho real desses objetos. A vista é que, pela sua estrutura interna e por efeito da visão binocular, dá a impressão de coisa deformada aparentemente.

TÉCNICAS DE PERSPECTIVA

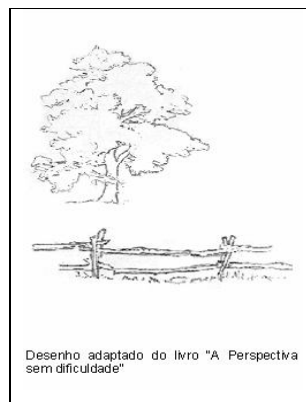
O aluno começa a utilizar as técnicas de perspectiva, já tendo noção de profundidade devido as atividades desenvolvidas anteriormente, nesse momento aprendem a desenhar de forma divertida, empregando técnicas matemáticas.

Das seis técnicas de perspectiva: sobreposição, mudança de dimensão e de espaço, modelado, pormenores e contornos, mudança de cor e de valor e por fim linhas de fuga, será direcionado apenas às três técnicas: de sobreposição, mudança de dimensão e de espaço e linhas de fuga.

Sobreposição

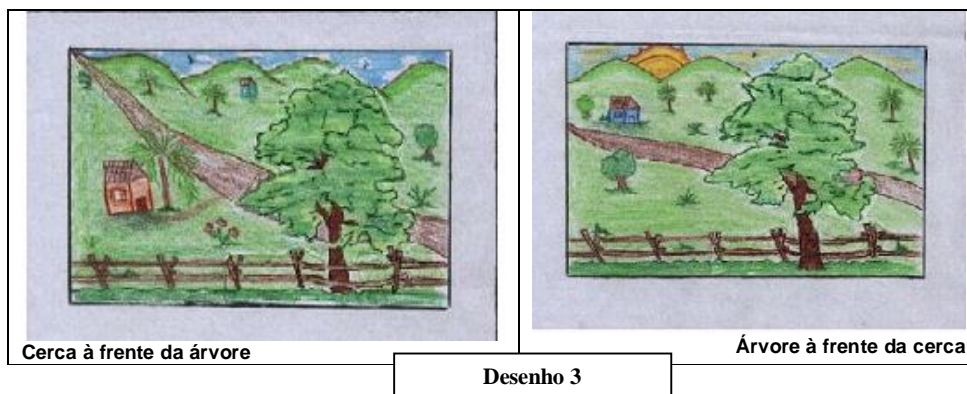
No laboratório de Matemática, em grupo de quatro alunos, os alunos de posse de um cilindro e um cubo fizeram sobreposição desses sólidos geométricos, sendo em primeiro momento o cilindro à frente do cubo e depois cubo à frente do cilindro. Em seguida pediu-se para fazer o desenho dos dois procedimentos, assim os estudantes puderam perceber que o modo como coloca as imagens, umas em relação às outras, dá ao observador imensas informações sobre as dimensões de cada uma delas.

Para verificar se houve entendimento sobre o assunto, foi entregue aos estudantes dois desenhos iguais contendo uma árvore e uma cerca, a ideia é sobrepor imagens de modo que deva aparecer o desenho da árvore à frente da cerca, e, com o mesmo procedimento sobrepor cerca à frente da árvore,



completando o cenário do desenho com imagens que lhe aprouver.

Veja o resultado de um desenho realizado por um aluno da turma:



Pode-se observar nas imagens acima que o aluno utilizou o método compreendido nas atividades anteriores.

Comparando com os primeiros desenhos realizados houve um grande avanço, pois já conseguem completar imagens tornando-as agradáveis ao olhar, o expectador vê um cenário com distanciamento de formas maiores para menores.

Os alunos perceberam que a um simples deslocamento dos objetos para sobrepô-los, tiram-se todas as dúvidas quanto à sua situação relativa, e obtém-se um efeito de profundidade.

Mudança de dimensão e de espaço

É o momento psicológico do modo como se vê as coisas: quando se sabe que os objetos geralmente têm a mesma medida, mas que se vê um desenho no quais esses objetos são de tamanhos diferentes, tem-se automaticamente a impressão inconsciente que alguns estão mais longe do que outros. Os estudantes nessa atividade lembraram do artifício do lápis utilizado anteriormente, onde perceberam as dimensões relativas das coisas.

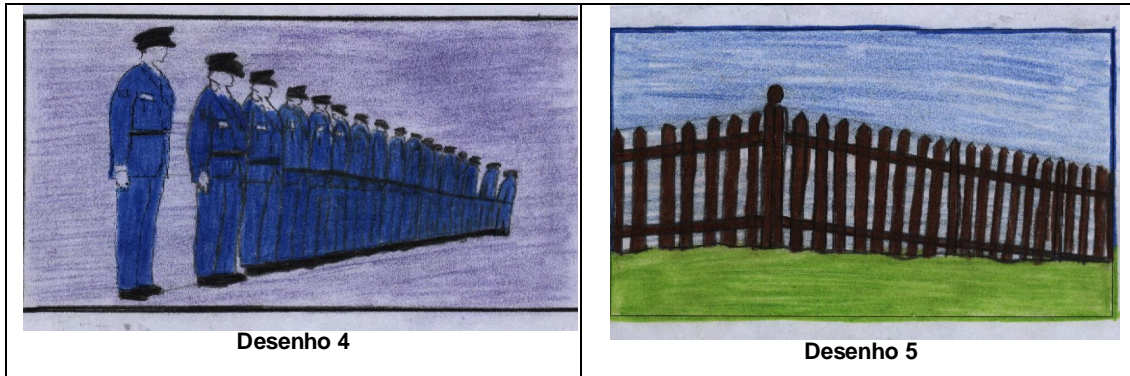
Para entender a mudança de dimensão os alunos observaram várias fotos do ambiente escolar, procurando ter um olhar de distanciamento das imagens. Com uma régua puderam perceber nas fotos as retas que estavam

na horizontal não apresentam profundidade, mas as que estavam na vertical tendiam a se encontrarem.

Os alunos compreenderam que modificando as dimensões relativas, de tal modo que a imagem direcionada mais a esquerda está mais perto do observador e as que estão à direita dela, se afastam cada vez mais. A grandeza de todos os objetos, incluindo os intervalos entre eles, parece diminuir à medida que o seu afastamento do observador aumenta. Vale ressaltar que não houve dificuldade na atividade das fotos, detectaram a convergência das retas em um ponto com tranquilidade.

Para aperfeiçoar o entendimento sobre a mudança de dimensão, os alunos receberam dois desenhos a serem completados, o primeiro de um soldado e o outro uma cerca.

Utilizando uma régua os alunos traçaram várias retas que saíram do soldado maior para o menor percebendo que as retas tendiam a se encontrar em um ponto. Fizeram o mesmo com a cerca, mas nessa imagem compreenderam que as retas convergiam para os dois lados do desenho e que os pontos ficaram fora do quadro desenhado.



As retas facilitaram a reprodução do desenho, principalmente o desenho 5, da cerca, pois incluía poucos detalhes a serem observados, já o desenho 4, dos soldados, foi trabalhoso pelos detalhes presentes na imagem.

Os alunos comentaram que alguns soldados ficaram gordos e outros magros, criaram-se aí alguns comentários sobre as pessoas não serem todas do mesmo tamanho e peso. Mediante a discussão pode se explicar que as breves noções de perspectiva que eles receberam até então não lhes fizeram perito em arte, mas servirão para facilitar a observação de imagens por um

olhar geométrico da realidade do desenho, dando-lhes noções de volume, proporção, distância e profundidade para desenhar.

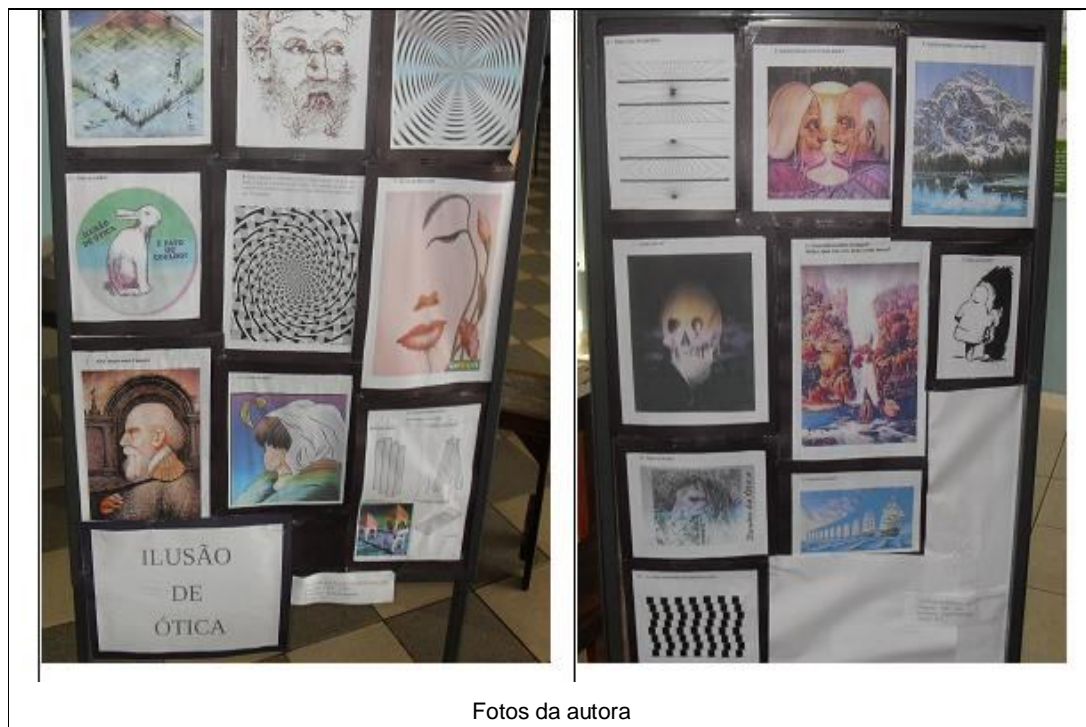
Ilusão de ótica

O termo Ilusão de ótica aplica-se a imagens que "enganam" fazendo ver qualquer coisa que não está presente ou permitindo vê-la de um modo errôneo. As ilusões de ótica podem surgir naturalmente ou serem criadas por astúcias visuais específicas gerando imagens com impressionantes efeitos de ilusões, com notável qualidade técnica e estética, tudo isto, respeitando as regras geométricas do desenho e da perspectiva.

Os alunos divertiram-se com a ilusão de ótica, viram algumas imagens de ilusões nos slides mostrando o que pode acontecer com as mudanças de dimensão no desenho.

Pesquisaram na internet outras imagens, fizeram uma seleção das que mais gostaram, imprimiram e confeccionaram um pôster para exposição do projeto no colégio.

Veja foto retirada nesse dia:



Fotos da autora

Esse foi o pôster que prendeu a atenção dos alunos visitantes, queriam descobrir o que continha em cada imagem em relação a ilusão de ótica.

Até o momento os alunos compreenderam que o distanciamento das imagens faz parecer os objetos diferentes do que eram na realidade, modificando suas dimensões. Este fenômeno é denominado *perspectiva*, no sentido mais elementar.

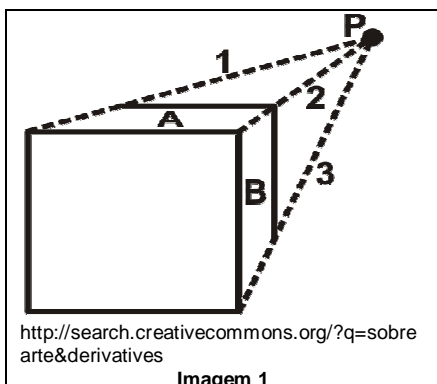
Nas Diretrizes Curriculares, as linhas de fuga é a parte necessária da Geometria Projetiva para o ensino fundamental, contudo o exemplo da sobreposição e mudança de dimensão se faz necessária para que o aluno tenha a compreensão da imagem em profundidade para dar prosseguimento ao estudo da Geometria Projetiva utilizando as linhas de fuga.

GEOMETRIA PROJETIVA

Para desenhar corretamente a aparência de volume dos objetos, profundidade e espaço de ambientes ou paisagens que busquem reproduzir as características tridimensionais da realidade é necessário conhecer sobre perspectiva.

As imagens seguintes, números 1 – 2 – 3 e 4 foram retiradas do site www.sobrearte.com.br, cedidas por Antonio Juvenil, titular dos direitos autorais.

Para que o aluno compreendesse como ocorre a influência das linhas convergentes na representação gráfica em perspectiva, observaram em PowerPoint o exemplo ilustrativo do cubo a direita.



A aplicação das linhas pontilhadas 1, 2 e 3 convergentes para o ponto **P** constroem as arestas de suas faces **A** e **B** causando afunilamento à medida que se distanciam do primeiro plano, gerando um efeito visual de volume. Reproduzindo com isso as características que são próprias da perspectiva.

Elementos da perspectiva:

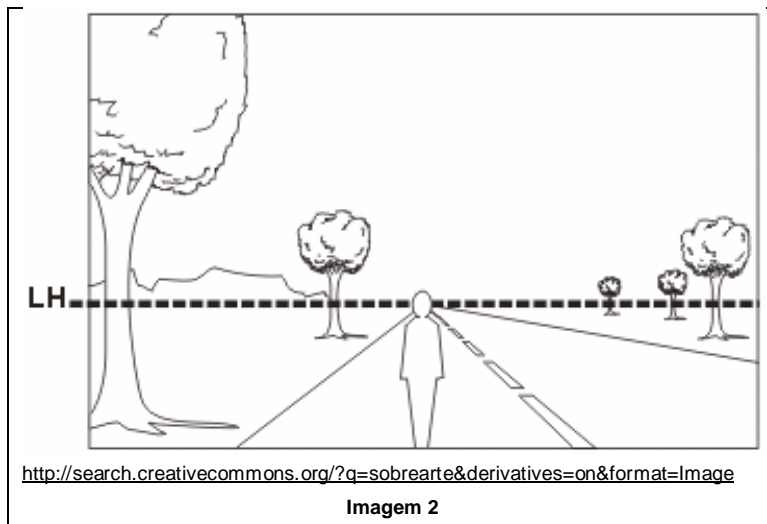
Ainda utilizando o PowerPoint, os alunos conheceram os elementos da perspectiva, que são: linha do horizonte, ponto de vista, ponto de fuga e linhas de fuga. Os elementos determinam o nível e o ângulo visual do espectador no contexto do desenho.

Para um estudo mesmo básico sobre perspectiva é necessário conhecê-los e saber o modo correto de sua aplicação. Por isso, além de identificar visualmente cada um deles, fez-se uma descrição sobre seu significado e função no desenho a partir das imagens ilustrativas a seguir.

Linha do horizonte:

É o elemento da construção em perspectiva que representa o nível dos olhos do observador (linha horizontal pontilhada - **LH**).

Numa paisagem é a linha do horizonte que separa o Céu e a Terra. Vista ao longe, ela está na base das montanhas e risca horizontalmente o nível do mar.

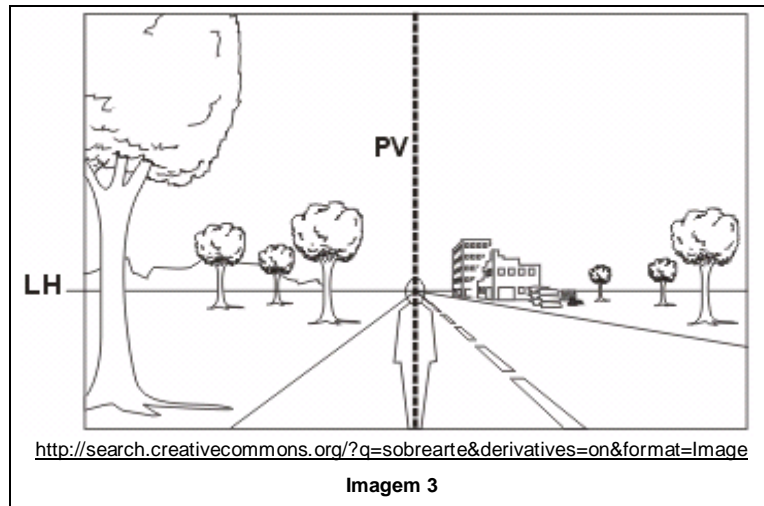


A linha de horizonte está sempre à altura de nossos olhos. Para encontrá-la basta ter a cabeça reta e imóvel olhando o espaço diante de si. Assim, a linha de horizonte muda de posição segundo o lugar que nós ocupamos para observar os objetos.

Todos os objetos que se acham colocados abaixo da linha de horizonte, parecem ter linhas que sobem e todos os objetos que se acham colocados acima, parecem ter linhas que descem.

Ponto de vista:

Na representação gráfica da perspectiva é comum o ponto de vista ser identificado por uma linha vertical perpendicular a linha do horizonte (**PV**). O ponto de vista revela-se exatamente no cruzamento dessas duas linhas. Dependendo do ângulo visual de observação do



motivo, a linha vertical que localiza o ponto de vista pode situar-se centralizada na cena compositiva ou num de seus lados, esquerdo ou direito.

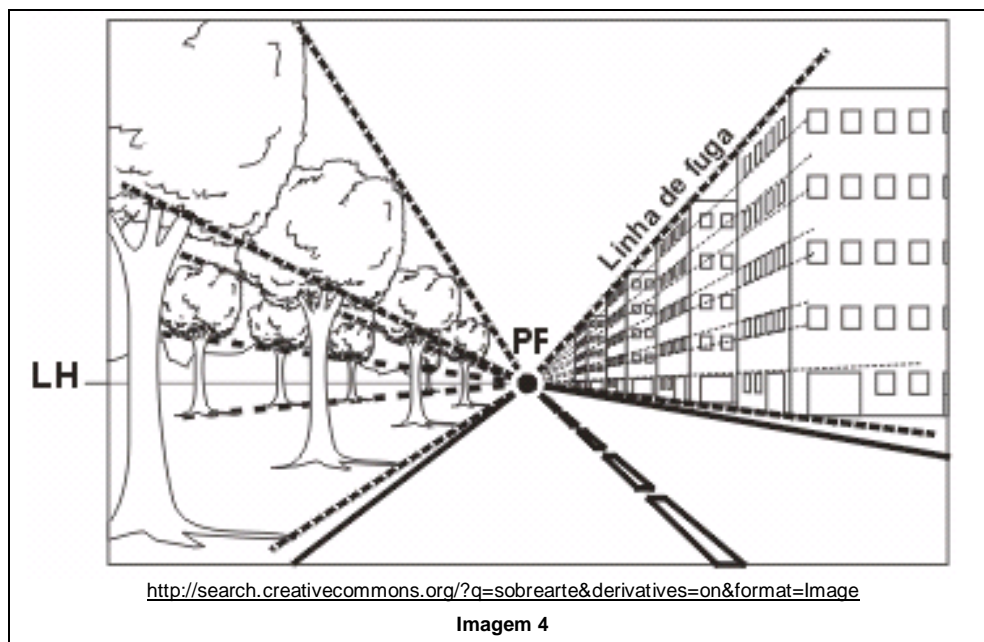
O ponto de vista varia segundo o lugar do desenhista: entretanto, na cópia de um modelo na sala de aula, é quase sempre ao centro que se coloca, e é, também quase sempre no centro do quadro que se encontra o ponto de fuga principal.

Ponto de fuga e Linhas de Fuga

É o ponto localizado na linha do horizonte, pra onde todas as linhas paralelas convergem, quando vistas em perspectiva (**PF**).

Em alguns tipos de perspectiva são necessários dois ou mais pontos de fuga.

O ponto de fuga, de um modo geral, indica e precisa uma direção; pode-se portanto, supor tantas direções, quantas se desejarem, e defini-las por outros tantos pontos; mas, qualquer que seja o seu número e a distância que os separa, deve-se sempre colocá-los sobre a Linha do Horizonte.



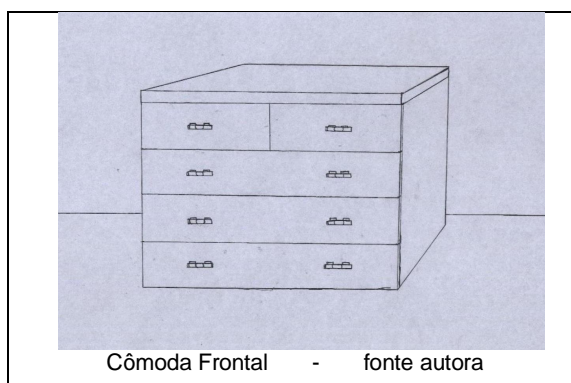
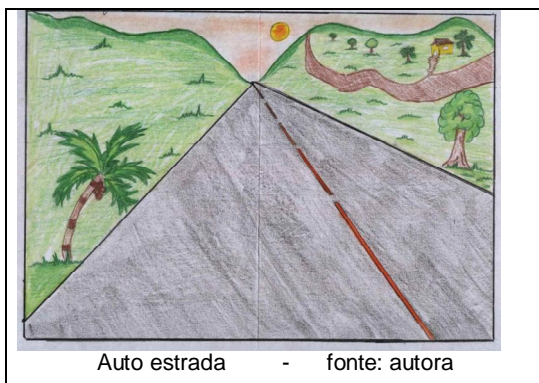
Em alguns casos é possível o ponto ficar fora tanto da linha do horizonte quanto do ponto de vista. São as linhas imaginárias que descrevem o efeito da perspectiva convergindo para o ponto de fuga (linhas convergentes pontilhadas). É o afunilamento dessas linhas em direção ao ponto que geram a sensação visual de profundidade das faces em esboço dos objetos em perspectiva.

Após explanação dos elementos da perspectiva os alunos retomaram as fotos do ambiente escolar vista anteriormente, e, com outro olhar identificaram nas mesmas a linha do horizonte, ponto de fuga e linhas de fuga.

Comentaram que ficou fácil e ao mesmo tempo diferente o olhar para as imagens utilizando as técnicas que aprenderam.

Para encerrar as atividades do projeto os alunos acompanharam passo a passo as aulas criada e desenvolvida por Antonio Juvenil, que se encontra no site www.sobrearte.com.br, desenharam uma auto-estrada, uma cômoda frontal e o desenho de ambiente de uma casa, utilizando todas as técnicas compreendidas da Geometria Projetiva.

Veja alguns desenhos desenvolvidos pelos alunos da turma:



O conhecimento das regras e preceitos práticos da perspectiva permitiu aos alunos representarem formas tridimensionais no plano, não com as suas dimensões e formas reais, mas tais como aparecem à vista, com as deformações aparentes experimentadas por motivo do grau de afastamento e da posição do observador.

A pesquisa sobre Geometria Projetiva e seus resultados foram divulgados através do Grupo de Trabalho em Rede – GTR, a professores de matemática do município e alguns pedagogos do estabelecimento, através dos slides e apreciação dos trabalhos realizados pelos alunos.

Os professores do GTR muito contribuíram com a implantação desse projeto, dando opiniões, incentivando e aproveitando para expor em sala de aula o tema Geometria Projetiva. Comentaram que o projeto estava sendo desenvolvido de forma prazerosa, com contribuições relevantes para ensino e aprendizagem, fazendo contrapontos com espaço / tempo e resgatando a

história e a arte que nem sempre ocorre essa junção e fundamentação histórica pelos matemáticos.

Alguns professores falaram que nunca haviam pensado em trabalhar elementos de perspectiva com meus alunos. Primeiro, porque não tiveram muito contato com geometria projetiva na graduação, segundo, porque sempre procuraram ser coerente com as apresentações de geometria em livros didáticos que, com algumas exceções, ignoram a geometria projetiva. Além disso, não tiveram acesso a uma sequência de atividades que os ajudassem a compreender como o trabalho com perspectiva pudesse ser realizado em sala de aula.

Como última ação dessa pesquisa os trabalhos dos alunos foram expostos e apresentados pela turma da oitava série nas dependências do colégio. Utilizaram Pôsteres de várias imagens e o projetor multimídia para demonstrar a auto estrada de Juvenil assim os visitantes tiveram oportunidade de realizar um desenho usando as técnicas matemáticas.

Foi um sucesso!!

CONCLUSÃO

É interessante perceber o desenvolvimento e a alegria dos alunos quando foram levados ao Laboratório de Matemática e à sala de Informática, sentiram-se curiosos e a vontade para fazer questionamentos e desenvolver suas produções inserindo em seus desenhos os elementos básicos de perspectiva: ponto de fuga, linha do horizonte, ponto de vista e linhas de fuga. Eles entusiasmaram com essas novas formas de construir um desenho e manifestaram esse entusiasmo pelo desejo em aprender mais sobre esse assunto.

Alguns alunos estranharam o fato de estarem desenhando numa aula de matemática. Nesse sentido, a proposta ajudou a desfazer um mito, o que nas aulas de matemáticas "só se faz cálculos".

Uma sugestão de alguns professores do GTR foi que a Geometria Projetiva devesse ser introduzida junto com as noções de Geometria Euclidiana

logo que o aluno começa a estudar ponto e reta, pois ela é mais palpável para o aluno, e já poderia fazer a apresentação da geometria que é de Euclides e a não Euclidiana.

O desenvolvimento desse projeto proporcionará uma mudança no olhar dos alunos participantes e principalmente dos professores que estiveram presentes e contribuíram para a implementação da "Geometria Projetiva no Laboratório de Matemática", quando se depararem com imagens ou fotos lhes chamarão atenção para as técnicas apresentadas.

Seria interessante que as escolas montassem o Laboratório de Matemática em uma sala ambiente, mas pra começar pode ser um armário onde ficarão guardados materiais didáticos pedagógicos que propiciam a aprendizagem. A construção de um LEM merece atenção especial, levará tempo e exigirão dos professores dedicação e comprometimento, pois o mesmo necessita de constantes atualizações e complementações. É, portanto um recurso que estimula a criatividade do aluno e também do professor.

Acredita-se que esse trabalho realizado durante o Programa de Desenvolvimento Educacional possa contribuir para a introdução e desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas nas aulas de Matemática do Estado do Paraná, especialmente da Geometria Projetiva.

REFERÊNCIAS

AUFFINGER, Antonio Carlos T. de C.; VALENTIM, Fábio Júlio da Silva. **Introdução à Geometria Projetiva. 2003.** Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Setembro de 2003. disponível em: <[http://virtual.lncc.br/~rodrigo/cursos/CG/01_Apostilas/outros/geometria_projeti va_ufes.pdf](http://virtual.lncc.br/~rodrigo/cursos/CG/01_Apostilas/outros/geometria_projeti_va_ufes.pdf)> acesso em 07/07/08.

BRASIL, Ministério da Educação e Secretaria de Educação a Distância. **TV Escola - Matemática nº 20 - Nas malhas da geometria.** Brasília: Videolar S/A, 2005. 1 DVD (12'45"), son., color.

EDITORES DO PUBLICATIONS INTERNATIONAL, LTD.. **"HowStuffWorks - Como desenhar prédios"**. Disponível em <http://lazer.hsw.uol.com.br/como-desenhar-edificios7.htm> acesso em 20 de outubro de 2008.

FRANCO, Valdeni Soliani. **Curso de Geometria não-euclidiana**. Maringá, Pr: 2008. 1 CD-ROM.

GEOMETRIA PROJETIVA. Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_projetiva acesso em 13/11/2008.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?**: In Educação Matemática em Revista – SBEM 4, 1995, 3-13

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. Coleção Formação de Professores.

METZGER, Phil. Tradução portuguesa: Alexandre Pais. **A Perspectiva sem dificuldade**. Koln: Alemanha. 1988.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2008. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/out_2009/matematica.pdf - Acesso em 15 nov. 2009.

PIAGET, Jean. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

SCHUBRING, G. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: SBEM, 2003, p.11-45.

SOBREARTE. Estudo de desenho: **Perspectiva**. Disponível em: <http://www.sobrearte.com.br> acesso em 03 de agosto de 2008.

WHITEN GWEN. Tradução de Conceição Jardim e Eduardo Nogueira **Perspectiva para artistas, arquitectos e desenhadores**. Lisboa: Portugal, Editorial Presença / Martins Fontes, 1968.

Secretaria da Educação - TV Multimídia - Sons e Vídeos - **O artista e do matemático** - Tempo: 26'20" Fonte: TV Cultura.
<http://www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive/modules/mylinks/visit.php?cid=45&lid=2289>

AMANCIO, Chateaubriand Nunes. **Uma perspectiva sociológica do conhecimento matemático.** Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2004.