SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E AS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS ELEMENTARES

1. A História dos Números

Antes mesmo da criança freqüentar a escola , ela já traz consigo o conhecimento intuitivo de adicionar e em conseqüência multiplicar, pois através de brincadeiras ela costuma "juntar" bonecas, carrinhos e outros e até uma pequena quantidade ela consegue relacionar a quantidade com o numeral, este conhecimento segundo Vygotsky (2007) é o conhecimento empírico. É na escola que a criança vai sistematizar o seu conhecimento, associando regras, símbolos e através da escrita ela começa a codificar suas idéias que até então só existia no âmbito da linguagem. A idéia de subtrair não é tão comum na criança pois ela não tem grande tolerância a perder ou dar, prejudicando o conhecimento empírico da subtração e da divisão. Já na escola quando começa a sistematizar este conhecimento a criança ultrapassa a barreira do conhecimento empírico atingindo o conhecimento teórico ou científico. O que atualmente para nós parece ser muito natural e familiar, pois a criança convive em ambientes onde usa-se as operações fundamentais diariamente, não era tão familiar e obvio no passado. O processo de construção dos números e da matemática tem sido transmitido de geração para geração e segundo Gundlach(1992) a espécie humana é a única a ter desenvolvido um procedimento sistemático para armazenar informações, sendo que uma parte considerável dessas informações relaciona-se com forma e quantidade.

A necessidade de representar quantidades fez com que o homem busca-se formas de registros, Imenes (1989) coloca que uma das primeiras formas de contagem foram através de pedras e do pastoreio, isto é, para controlar o seu rebanho o pastor usava pedrinhas, onde cada pedra equivalia a um animal, se no final do dia de pastoreio, faltasse pedras, é por que teria animais a mais em seu rebanho e se sobrasse pedras, estavam faltando animais, era uma forma de controle primitiva. Daí se origina a palavra Cálculo, que significa contar as pedrinhas. Além das pedrinhas o homem usou outros recursos para auxiliá-lo na contagem como: marcas em pedra, osso de madeira, nós em corda e até mesmo parte do nosso corpo como os dedos das mãos e também dos pés, de onde se originou o sistema decimal. A associação entre dedos e números até hoje está presente na palavra dígito, como sinônimo de algarismo que em latim significa dedo.

Muitas foram as civilizações que contribuíram e criaram o seu próprio sistema de cálculo. Os egípcios estão entre os primeiros povos a desenvolver um sistema numérico. A numeração egípcia data de cerca de 5 mil anos e baseava-se na idéia de agrupamentos de

10 em 10. Cada símbolo que representava uma potência de 10 podia ser repetido até 10 vezes.

Símbolos numéricos egípcios e seus respectivos valores.

	(um graveto)	1 (ou 10^0)
	(um osso de calcanhar)	10 (ou 10^1)
	(um laço)	100 (ou 10^2)
	(uma flor de lótus)	1 000 (ou 10^3)
	(um dedo dobrado)	10 000 (ou 10^4)
	(um peixe)	100 000 (ou 10^5)
	(um homem ajoelhado)	1 000 000 (ou 10^6)

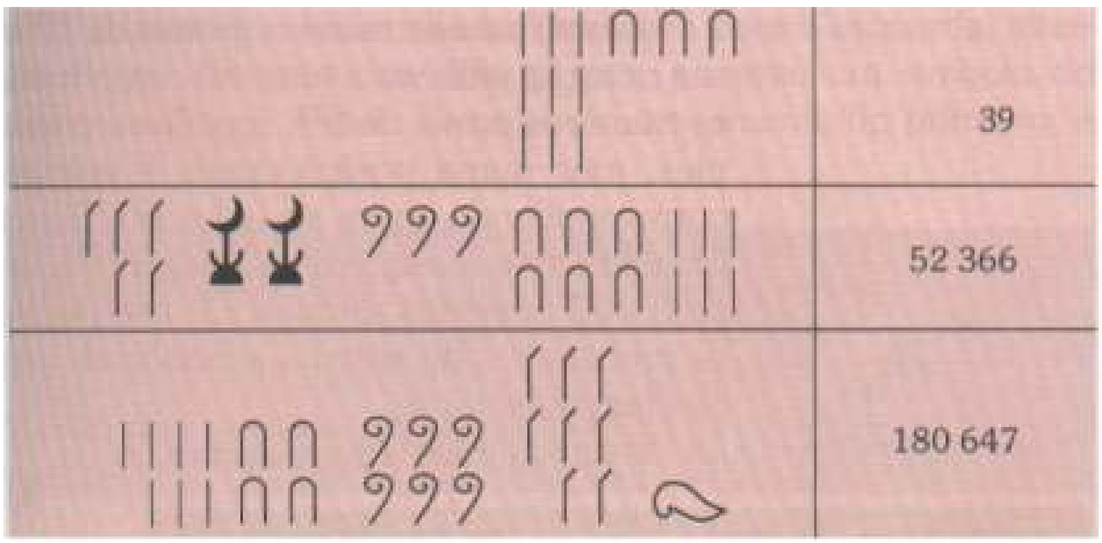
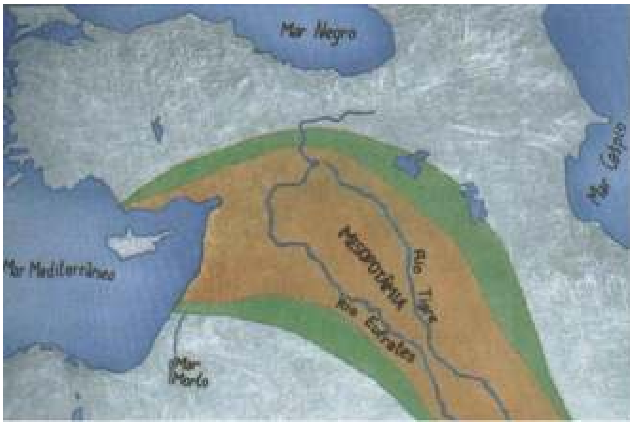


Figura 1.

Como pode-se observar , não havia uma posição obrigatória para os símbolos, então os cálculos eram realizados com instrumentos como o ábaco e os resultados eram registrados com os símbolos. Segundo Dantzif (apud Toledo, 1997) a numeração egípcia era um tanto grosseira, necessitando de peritos para realização de cálculos elementares. Os Mesopotâmios também criaram uma sistema de numeração próprio, também inflexível e grosseiro como podemos observar:



Numeração babilônia	Numeração atual
𒁹	1
𒁹𒁹	2
𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	6
𒌋	10
𒌋𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	35
𒁹𒁹𒁹	

Figura 2.

Empregavam apenas dois símbolos. Um mais largo e em posição horizontal, que representava um grupo de 10 unidades e que podia ser repetido até 5 vezes; e outro mais fino, em posição vertical, que representava 1 unidade e podia se repetido até 9 vezes.

Eles usavam grupos de 10 unidades simples, mas sua notação utilizava a base 60 como fundamental. Assim para os números acima de 59, repetia-se o símbolo da unidade simples, mas numa posição mais a esquerda do grupo inicial correspondendo agora ao valor 60. Esse mesmo símbolo usado mais a esquerda representava um grupo de 60 x 60, ou 3600 unidades simples. Os Mesopotâmicos foram os precursores do sistema posicional que os indianos aperfeiçoaram mais tarde. Eles não tinham símbolo para indicar o zero . Somente cerca de 300 a.c é que surgiu um símbolo para marcar o lugar vazio, duas cunhas em posição oblíqua.

Numeração babilônia	Numeração atual
𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	85 (60 + 20 + 5)
𒁹 𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒌋	3 850 (3 600 + 240 + 10)
𒁹𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	506 (480 + 20 + 6)

Figura 3.

Na China foram adotados os “numerais em barras”, criados em aproximadamente 300 a.c . Esses numerais eram representados de barras verdadeiras de bambu, marfim ou ferro, que os administradores do império carregavam em sua sacolinha para fazerem seus cálculos O sistema de numeração Chinês trabalhava com 18 símbolos, dos quais 9 representavam as unidades simples, as centenas e as dezenas de milhar, e os outro nove, as dezenas e os milhares.

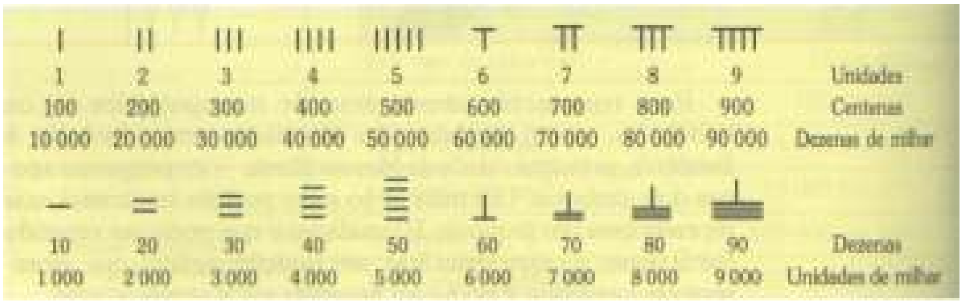


Figura 4.

As “casas” eram ocupadas da direita para a esquerda, alternando os símbolos dos dois grupos. De inicio não havia nenhum símbolo para representar a casa vazia .

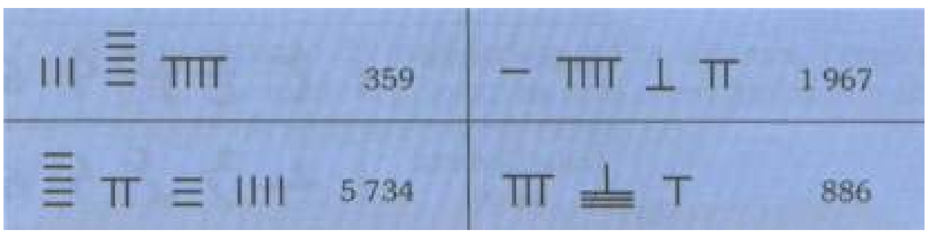


Figura 5.

Foram os indianos que desenvolveram o sistema de numeração que utilizamos até hoje, o sistema Indo-arábico, o qual representa uma síntese das idéias que já existiam esparsamente entre outros povos da Antiguidade: A base decimal, a notação posicional, um signo para cada um dos dez primeiros números . Os árabes no século X adotaram a numeração indiana e introduziram o 0 (zero) que até então não existia, ficando o sistema conhecido como indo-arábico.

As regras do sistema de numeração indo-arábica permaneceram as mesmas nos últimos 20 séculos, mas a forma de representar esses algarismos sofreu modificações, ao longo do tempo. A partir da criação da imprensa pelo alemão Gutemberg, os algarismos e letras se estabilizaram.

Figura 4 e 5 – Toledo, 1997 (p.60, 61)

Os Gregos usaram as vinte e quatro letras de seu alfabeto acrescidas de Três outros sinais para representar os números.

letra	nome da letra	valor
α	alfa	1
β	beta	2
γ	gama	3
δ	delta	4
ε	epsílon	5
ϛ	digama	6
ζ	dzeta	7
η	eta	8
θ	teta	9
ι	iota	10
κ	capa	20
λ	lambda	30
μ	mi	40
ν	ni	50
ξ	csi	60
ο	ômicron	70
π	pi	80
ϙ	copa	90
ρ	rô	100
σ	sigma	200
τ	tau	300
υ	ípsilon	400
ϕ	fi	500
χ	qui	600
ψ	psi	700
ω	ômega	800
ϡ	sã	900

Figura 6.

Na numeração Grega, a contagem era feita por grupos de dez: unidades, dezenas, centenas, milhares....

Na antiguidade, os Romanos escreviam os números usando estes sinais: Imenes (1989)

Símbolo	I	V	X	L	C	I⊃	CI⊃
Valor	1	5	10	50	100	500	1000

Na antiguidade, a maneira de escrever os números romanos era essa:

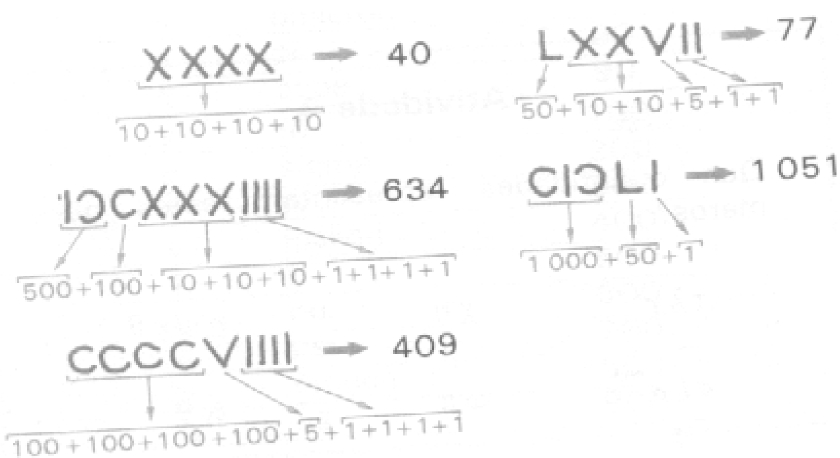


Figura 7.

Com o passar do tempo os números sofreram modificações, passando a ter outra representação, e foi introduzida uma nova regra: o quatro passou a ser escrito assim IV, significando que o um deve ser subtraído de cinco. Imenes (1989)

Símbolo	I	V	X	L	C	D	M
Valor	1	5	10	50	100	500	1000

Outros exemplos:

Nove $\rightarrow$ IX (10 – 1)

Quarenta $\rightarrow$ XL (50-10)

Noventa $\rightarrow$ XC (100-10)

Quatrocentos $\rightarrow$ CD (500-100)

Novecentos $\rightarrow$ CM (1000-100)

Duzentos e quarenta e nove $\rightarrow$ CCXLIX ((100+100) + (50-10) + (10-1))

Segundo Imenes (1989) os caracteres tradicionais do sistema numérico Chinês são:

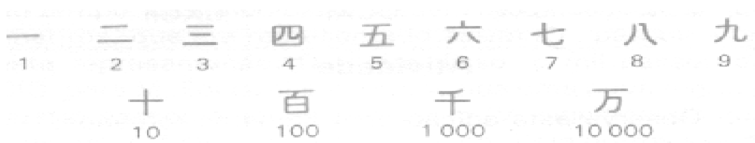


Figura 8.

Estes símbolos ainda são usuais na China e no Japão, mas para cálculos utilizam o sistema indo-arábico. Observe como são suas regras:

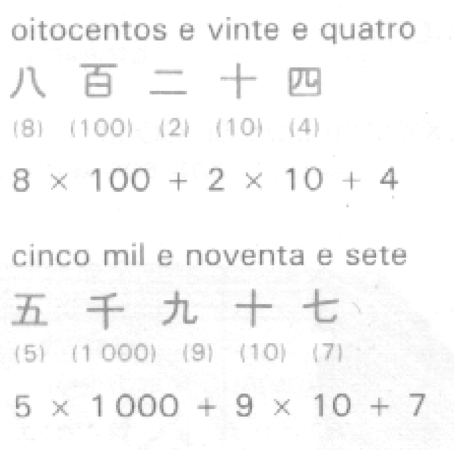


Figura 9.

Os Maias também desenvolveram um sistema de numeração próprio, como veremos:

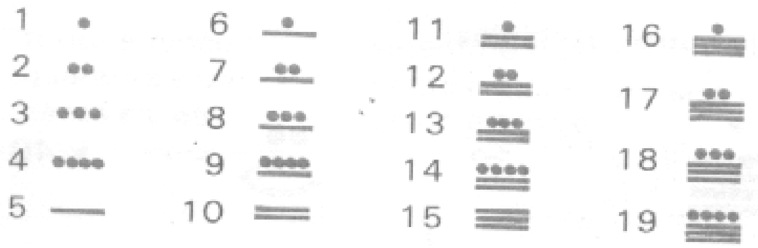


Figura 10.

O vinte e os demais números eles registravam da seguinte maneira:

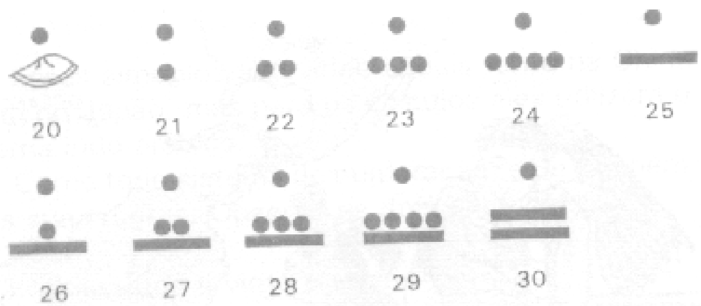


Figura 11.

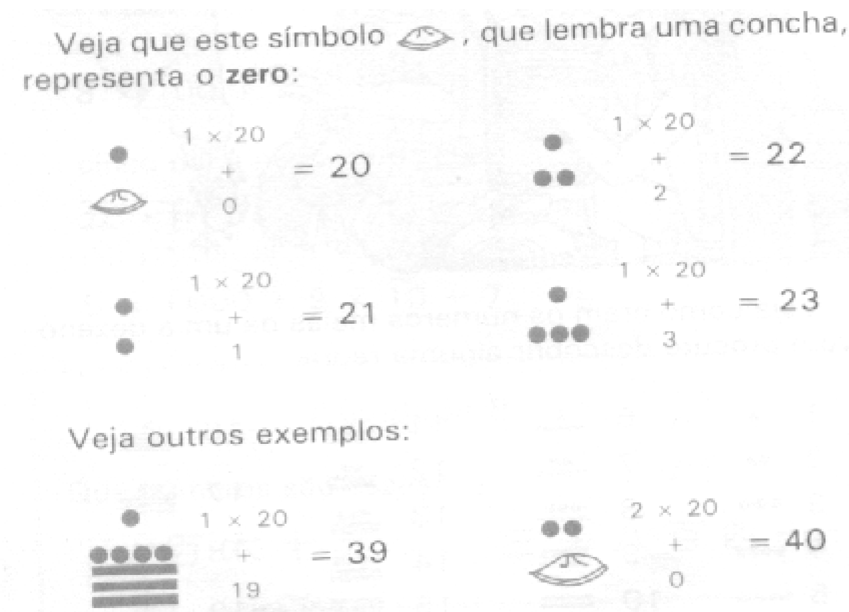


Figura 12.

2. Desenvolvimento da Numeração Posicional

O modelo posicional e o modelo de base 10 teve inicio com a utilização dos dedos para o processo de contagem , Gundlach (1997) coloca que , o modelo posicional envolve duas idéias distintas: quando um homem de contar tiver erguido todos os seus dedos, ele terá que voltar a posição original (com as mãos fechadas) antes de poder continuar seu procedimento de contagem. Esta ação não basta para garantir um modelo posicional, pois ele poderá não lembrar quantas vezes foram necessárias fechar a mão, portanto ele precisa de uma memória de registro. É então colocado um segundo homem, que só levanta um dedo quando o primeiro homem fecha a duas mãos, e cada vez que o primeiro homem fecha suas mãos, o segundo levanta um dedo, até levantar todos os dedos onde entra em cena um terceiro homem que levanta um dedo quando o 2º fecha as mãos. A posição de cada homem indica o valor que seus dedos erguidos representam.

O zero tem um papel importante na numeração é considerado como “porta lugar”, pertinente a numeração e “zero como cardinal do conjunto vazio” pertinente a número.

Ao percorrer as civilizações antigas, observamos que houve muitas tentativas até se chegar a um sistema que permitisse representar os números com poucos algarismos e de modo prático, de forma que a posição associada ao valor do algarismos representasse o número.

O trabalho com agrupamentos e trocas é de fundamental importância para compreensão do sistema de numeração posicional. É importante trabalhar com os alunos desde cedo através de jogos de “troca troca”, com bases diferentes. Por exemplo, com

canudinhos coloridos determinar valores: 1 amarelo = 5 azuis, 1 azul = 5 verdes, 1 verde = 5 branco, e depois dar para a criança alguns canudos brancos de modo que ela faça trocas obtendo a menor quantidade de canudos possível, troca-se a regra para qualquer outro número até chegar a dez, e introduzir a idéia do sistema decimal e posicional.

O trabalho com base 2 é muito importante, pois é a base 2 que sustenta a lógica do computador.Os computadores trabalham com um sistema que utiliza apenas dois valores para manipular qualquer informação. Isso quer dizer que todas as operações que o computador faz, desde permitir-nos a escrever um simples texto até jogar jogos 3D são realizados utilizando apenas dois valores, que por convenção são os dígitos “0” (zero) e “1” (um). Daí podemos concluir que para 0 temos desligado, sem sinal, e para 1 temos ligado ou com sinal. Nos computadores esses zeros (“0s”) e uns (“1s”) são chamados de *dígitos binários* ou somente *bit* (conjunção de duas palavras da língua inglesa binary digit), que é a menor unidade de informação dos computadores. Dessa forma, tanto faz dizer dígito “0” e dígito “1”, ou, bit “0” e bit “1”. São esses bits que formam qualquer informação, porém, um bit sozinho não faz nada, é apenas um sinal qualquer. Para que os bits possam realmente formar uma informação, precisam ser agrupados, reunidos. Esses grupos podem ser de 8, 16, 32 ou 64 bits. Assim, 8 bits $\rightarrow$ 10100110

Apesar de parecer ser um sistema limitado, agrupando bits é possível fazer uma infinidade de representações. Vamos pegar como exemplo um grupo de 8 bits (tabela a seguir), onde é possível fazer as seguintes representações para os números decimais:

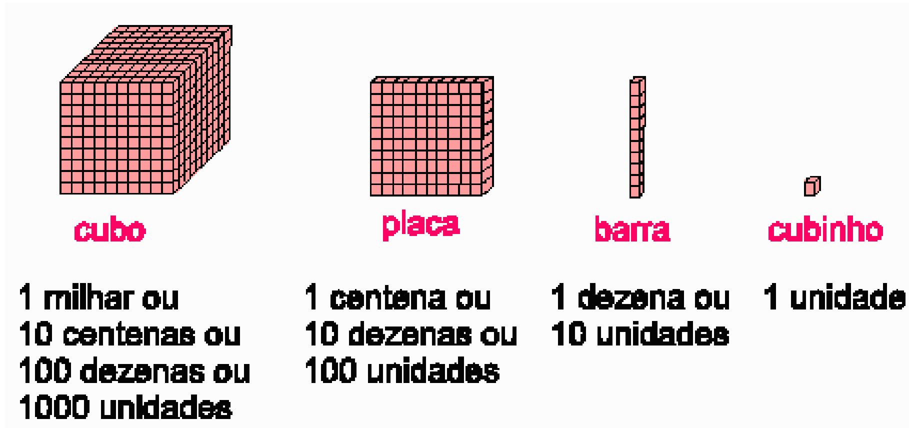
Caracteres alfanuméricos e seus equivalentes em binário

Números Decimais	Código Binário
0	00000000
1	00000001
2	00000010
3	00000011
4	00000100
5	00000101
6	00000110
7	00000111
8	00001000
9	00001001
10	00001010
11	00001011
12	00001100
13	00001101
14	00001110

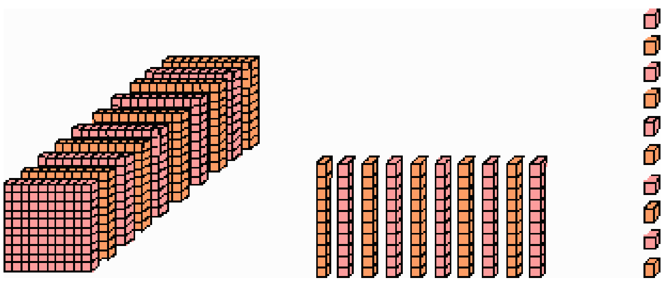
Na tabela acima os números decimais estão representados em grupos de oito bits. Mas, acontece que, como ocorre no sistema decimal, todo zero que estiver a esquerda de dígitos binários não valem nada. Por exemplo: o decimal 14 é 1110 em binário, o mesmo que 00001110 ou 000000001110 ou ainda ...0000000000001110.Como disse, o computador reuni grupos predefinidos de bits (8, 16, 32 ou 64) para formar uma informação, ou seja, um caractere. Um caractere é qualquer letra, número ou símbolo.10100110 □ 8 bits = um caractere qualquer. Informação captada em:http://www.linhadecodigo.com.br/Artigo.aspx?id=1648

Um ótimo recurso para facilitar a compreensão do valor posicional dos algarismos é o material dourado também chamado de material multibase.

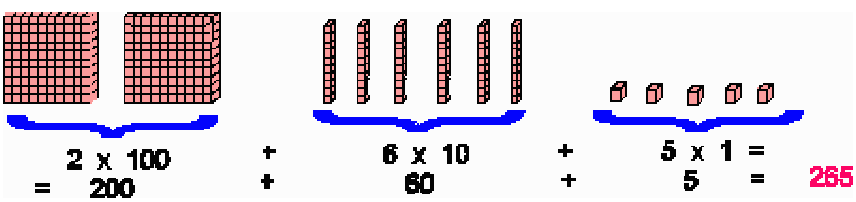
O material Dourado ou Montessori é constituído por cubinhos, barras, placas e cubão, que representam:



Observe que o cubo é formado por 10 placas, que a placa é formada por 10 barras e a barra é formada por 10 cubinhos. Este material baseia-se em regras do nosso sistema de numeração.



Veja como representamos, com ele, o número 265:



Imagens captadas em:http://educar.sc.usp.br/matematica/m2l2.htm

Existem muitas formas de trabalhar com o material dourado, uma delas é o jogo do nunca dez, onde as crianças realizam trocas sempre que obtiverem mais do que 10 itens iguais, sempre são trocados dez por um de equivalência maior. As trocas podem ser representadas assim: Toledo (1997)

12 cubinhos equivale a 1 barra e 2 cubinhos.

32 cubinhos equivale a 3 barras e 2 cubinhos.

210 cubinhos equivale a 2 placas e 1 barra.

Quando a criança se familiariza com a “brincadeira”, manuseando as peças concretamente, ela começa fazer a representação no caderno, através de símbolos: um quadrado para representar a placa (centena) e risco vertical para representar a barra (dezena) e um quadradinho para representar o cubinho (unidade).

Outro material muito interessante para se trabalhar as operações fundamentais é o Material Cuisinaire.

Um pouco de História …

www.littleblueschool.com

O Material Cuisenaire tem mais de 50 anos de utilização em todo o mundo.
Foi criado pelo professor belga Georges Cuisenaire Hottelet (1891-1980) depois de ter observado o desespero de um aluno, numa das suas aulas.

Decidiu criar um material que ajudasse no ensino dos conceitos básicos da Matemática. Então cortou algumas réguas de madeira em 10 tamanhos diferentes e pintou cada peça de uma cor tendo assim surgido a Escala de Cuisenaire.

Durante 23 anos, Cuisenaire estudou e experimentou o material que criara na aldeia belga de Thuin.

Só 23 anos depois da sua criação (a partir de um encontro com outro professor – o egípcio Caleb Gattegno), é que o seu uso se difundiu com enorme êxito. O egípcio, radicado na Inglaterra, passou a divulgar o trabalho de Cuisenaire – a quem chamava de Senhor Barrinhas.

Levou apenas 13 anos para passar a ser conhecido nas escolas de quase todo o mundo.

Feito originalmente de madeira, o Cuisenaire é constituído por modelos de prismas quadrangulares com alturas múltiplas da do cubo – representante do número 1 – em 10 cores diferentes e 10 alturas proporcionais.

www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas/Actividade%20**Cuisenaire**%20-%203%20e%204%

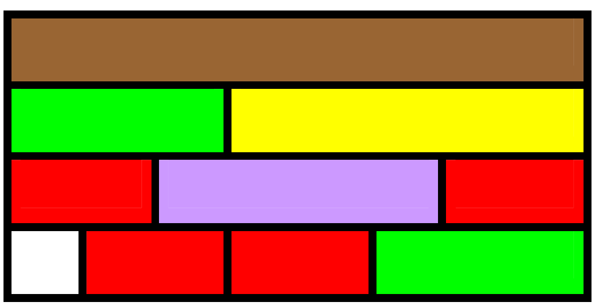
COR	NÚMERO REPRESENTADO
Branco (ou cor de madeira)	1
Vermelho	2
Verde-claro	3
Rosa (ou lilás)	4
Amarelo	5
Verde-escuro	6
Preto	7
Castanho	8
Azul	9
Cor de laranja (ou cor de madeira	10

3. ADIÇÃO

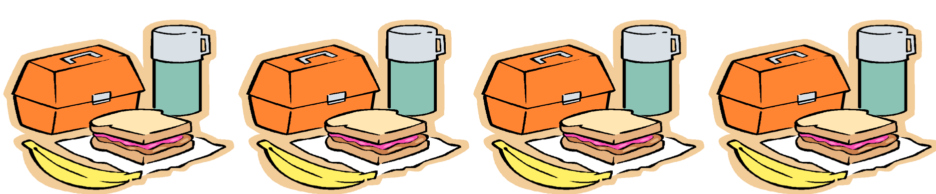
É a operação mais natural na vida da criança. Envolve apenas um tipo de situação "juntar", "reunir", que é prazeroso. Quando a criança inicia a 5ª série do Ensino Fundamental acredita-se que os conceitos básicos da adição já foram incorporados e na maioria das vezes os professores abandonam o material concreto, passando somente a exercícios de arme e efetue. Ocorre aí um rompimento brusco, e muitas crianças que ainda não haviam atingindo um nível de abstração considerável, cometem erros freqüentes, forçando os professores a questionar-se sobre o que a criança aprendeu até então. É importante que não haja uma ruptura radical entre o ensino de 1ª a 4ª série e o ensino da 5ª série, por que além de representar muitas vezes algo totalmente novo para criança, como escola, colegas, vários professores, a criança continua a ser criança, necessitando de atendimento e ensino concreto. A questão da afetividade nesta fase é muito importante, o aluno deve considerar todos os seus professores como amigos e que podem contar com eles na hora das dúvidas. É então importante a utilização de material concreto , para o trabalho das operações fundamentais. Na 5ª série a criança consegue entender as propriedades da adição, por exemplo para calcular 5+3+8+2, a criança usa a propriedade associativa e a comutativa para chegar ao resultado. Que podem ser: (5+3) + (8+2) = 8 + 10 = 18 ou [(5+3)+8] +2 = [8+8]+2 = 16+2=18.

A escrita aditiva só deve ser iniciada após um trabalho com utilização de material concreto, cálculo mental e representação informal, e sempre no contexto de comunicação de resultados.

Através do material de Cuisinaire pode-se questionar as crianças sobre as possibilidades de um resultado na adição. Como abaixo: Quais as parcelas das adições? Quais as possibilidades de obter a barra madeira ou laranja (10)?



Também é importante trabalhar a adição através de ilustrações: Considerando o seguinte cartaz o aluno deve ser capaz de responder - Quantos objetos há em cada coleção? Quantas coleções há? Quantos objetos há no cartaz? E quantos objetos há considerando cada atributo?



Em seguida mostre este:

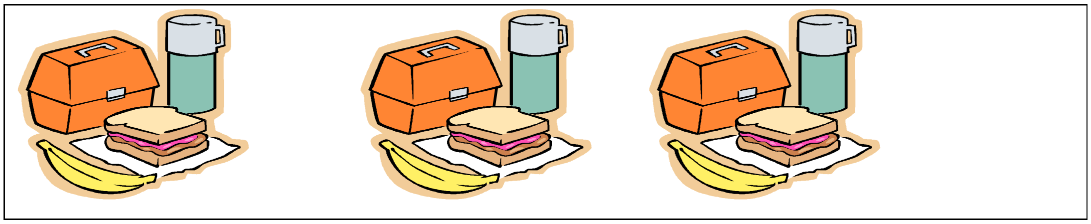


Figura 13

Adaptado Coll & Teberosky (1999)

O professor deve questionar os alunos, e forçar para que eles notem a diferença entre objeto, grupo, conjunto, fazendo as seguintes perguntas:-Quantos grupos há ao todo? - Quantos objetos há ao todo? - Qual o cartaz que apresenta o maior número de grupos? Quantos grupos a mais? - Quantos objetos há a mais no 1º cartaz? E a menos no 2º cartaz?

A criança já aprendeu a juntar e saber o resultado, mas pode apresentar dificuldade de diferenciar dois conjuntos. Por exemplo se apresentarmos um cartaz como a seguir e perguntarmos como ela escreveria o algoritmo indicado e qual o número de maletas que ele representa, é possível que muitas dirão que há 10 maletas, pois terão dificuldades de associar a adição e o resultado .

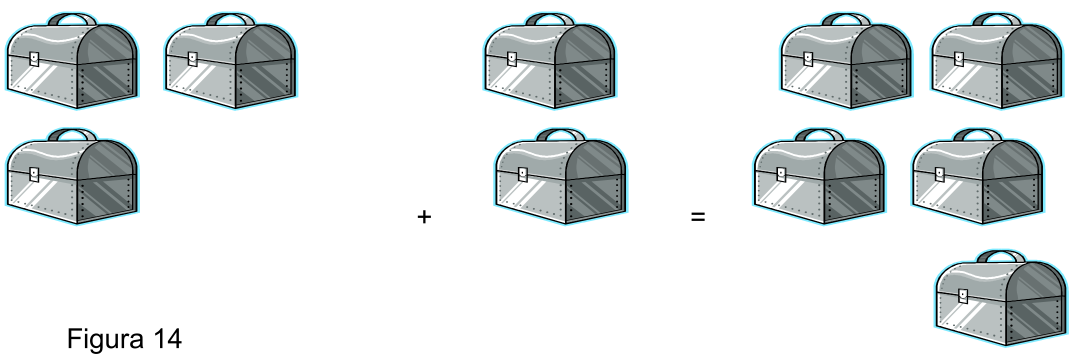


Figura 14

Porém quando apresentamos cartazes distintos e pedimos para a criança representar o algoritmo e o resultado, ela encontra com maior facilidade o resultado, ponderando que ali há 5 maletas.

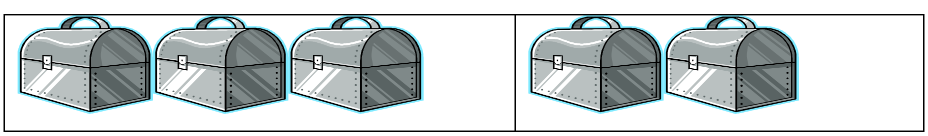
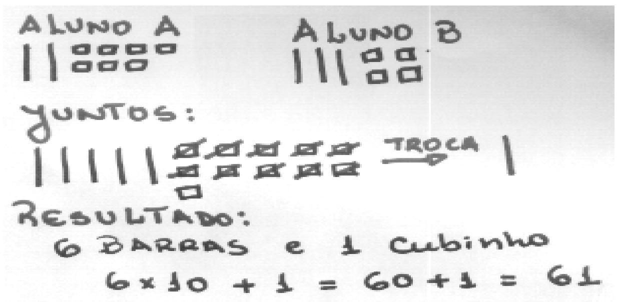


Figura 15

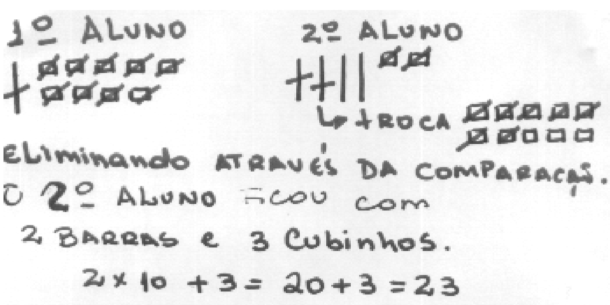
Adaptado de Dantas e outros (2004)

O ALGORITMO DA ADIÇÃO

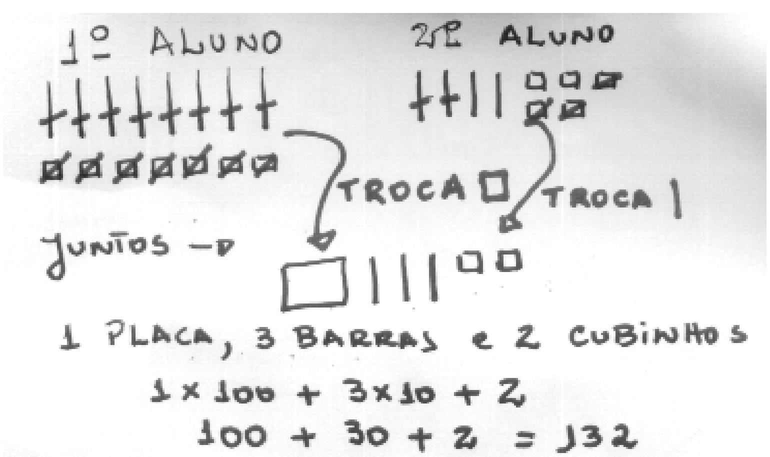
Inicialmente, as adições deverão ser feitas com o auxilio do material dourado e depois registradas no caderno. O registro é muito importante, pois a criança compreende a questão da troca "vai 1" tão comumente usado no algoritmo tradicional, mas que em muitos casos a criança não sabe o que está fazendo e nem o por quê. Observa-se na seguinte situação problema: Dois amigos estão numa competição. Um fez 27 pontos e o outro, 34. Se eles formarem uma dupla, qual será o total de pontos?



Através da representação simbólica a partir do material concreto podemos comparar quantidades, observando quem tem mais e o quanto. Considere o problema: Os adversários da dupla anterior fizeram os seguintes pontos, o primeiro, 19 e o segundo 42. Qual das duplas ganhou o torneio?



Quando o problema envolve centenas, o aluno deverá utilizar as placas, barras e cubinhos realizando sempre as trocas, como se fosse o jogo do nunca 10. Supõe-se que dois alunos estão colecionando figurinhas, 1 já tem 87 e o outro tem 45 figurinhas, juntos eles terão quantas? A representação do aluno será:

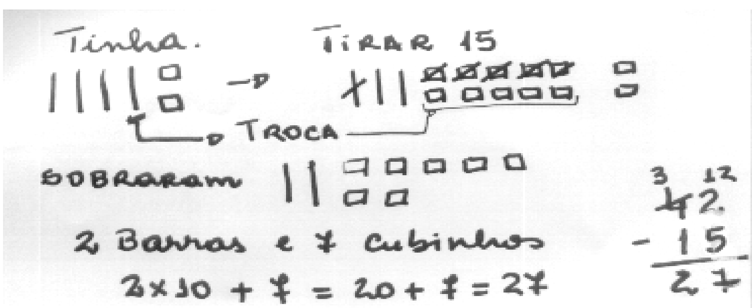


O aluno compreende o algoritmo da soma e também desenvolve a noção de expressões numéricas e qual a operação que deve ser realizada inicialmente.

4. SUBTRAÇÃO:

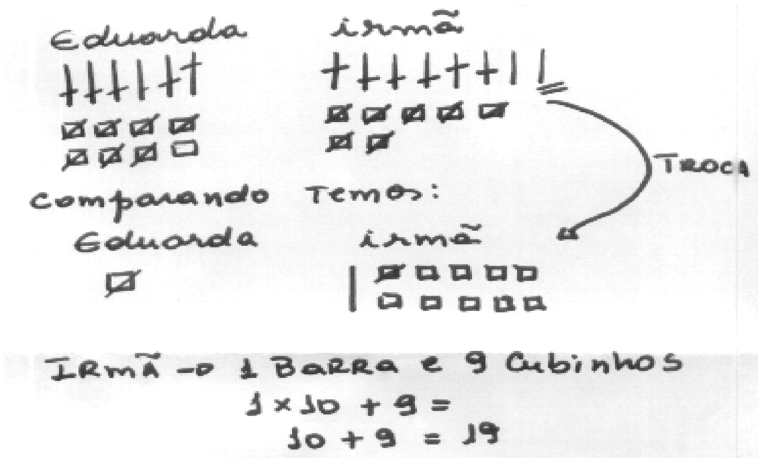
A subtração não é um processo simples de se trabalhar porque o raciocínio das crianças se concentra em ações positivas, percepção e cognição. Os aspectos negativos, como inverso e recíproco, só são construídos mais tarde, idade em que a criança chega a 5ª série. È nesta fase então que o professor deve reforçar o ensino e abordar as diversas formas em que aparece a subtração.A subtração muitas vezes está ligada a situação de perda e por envolver idéias bastante diferentes entre si, como tirar, comparar, completar,o vocabulário muitas vezes não é claro induzindo a um erro. A arte de interpretar um problema resulta na facilidade de resolve-lo com o algoritmo indicado.

A subtração como idéia de tirar é a mais comum e mais fácil de ser entendida e todo o processo deve ser representado através de material concreto e após a representação no caderno. Consideramos o seguinte problema: Em um ônibus havia 42 pessoas. No primeiro ponto desceram 15. Quantas permaneceram no ônibus?



Observe que o aluno tem condições de compreender por que o 4 vira 3 e o 2 passa a ser 12, que ocorre uma troca, ou seja uma dezena (barrinha) é desmembrada em 10 unidades (cubinhos).

A subtração como idéia de comparar, deve ser trabalhada colocando-se os dois conjuntos um ao lado do outro e verificando através da comparação, qual tem um maior número de elementos e quantos são. Consideramos o problema: Eduarda tem uma coleção com 68 selos e sua irmã tem 87. Quem tem mais selos? Qual a diferença?

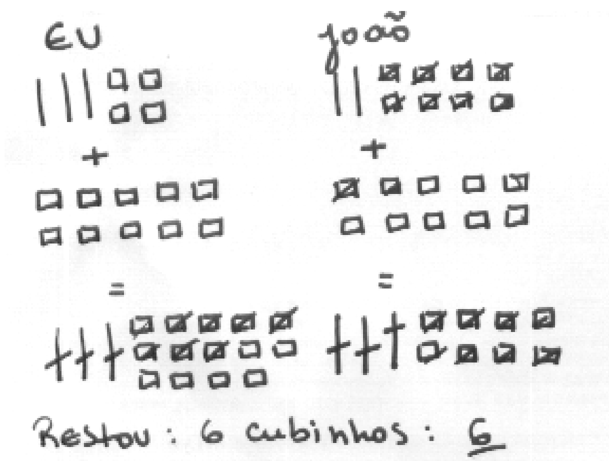


Neste caso colocamos as duas quantidades e vamos anulando uma a uma, até surgir a necessidade de se fazer a troca de 1 barrinha por 10 cubinhos, para continuarmos anulando um a um. Após é só verificar quem ainda tem e quantos tem.

A subtração também traz consigo a idéia de completar, ou seja de quanto falta para...Veja através do exemplo: Quero comprar uma boneca que custa R$ 58,00, mas só tenho R$ 44,00. Quanto falta?

Observe que aqui também a idéia de comparar está bem presente, pois se verificarmos um a um do que temos e do que queremos estamos comparando, mas se colocarmos o que falta de modo a obter o que queremos estamos completando.

O processo da compensação consiste em adicionar um mesmo valor ao minuendo e subtraendo e fazendo a troca de forma a não faltar elementos na comparação. Vejamos: tenho 34 bolitas e João tem 28. Quantas bolitas eu tenho a mais?



Também podemos trabalhar adicionado ou diminuindo um número do minuendo ou do subtraendo, compensando depois. Vejamos 100 – 27, para a criança é difícil trabalhar com zeros, então ela pode tirar uma unidade de 100, ficando assim 99 – 27 = 72 e depois acrescentar a unidade ao resultado obtido 72+1 = 73.

O importante é que a criança crie métodos que possam facilitar o seu entendimento, o maior erro de um professor é ensinar apenas uma maneira mecânica de calcular, desvinculada do raciocínio e não aceitar que a criança pode criar seus próprios métodos, cabe ao professor verificar o raciocínio e incentivá-lo na resolução de problemas.

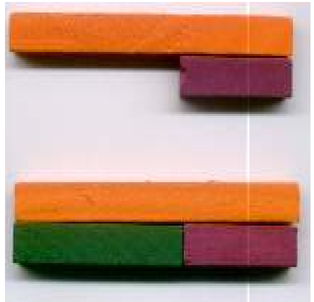
Pode-se trabalhar a idéia de adição e subtração através do material de Cuisinaire: Quais as possíveis formas de conseguir uma barra azul? Através da representação concreta, conclui-se:

Azul=9, roxa(4)+amarela(5) =9, branca (1) + 2.roxa(4)=9, 2.vermelha(2)+amarela(5)=9,Verde clara(3)+verde escura(6) =9, branca (1) + marron(8) = 9, vermelha(2)+preta(7)=9

Que tamanho de barra terei se juntar 1 amarela e 1 verde clara?

Juntando uma amarela e uma verde teremos uma marron, a sentença matemática é: marron=verde clara + amarela ou 8 = 3+5. Se tirarmos da barra marron um pedaço equivalente ao tamanho da barra amarela, restará um pedaço equivalente a barra verde clara. Em sentença matemática temos: 8 -3 =5

Com a idéia de comparar, apresentamos uma barra laranja e uma roxa:



Qual é a maior? Quanto ela é maior? Representando esta diferença através de uma sentença matemática temos: laranja=roxa+verde-escura ou 10 = 4+6, ou seja, 10 é maior que 4 em 6 unidades.

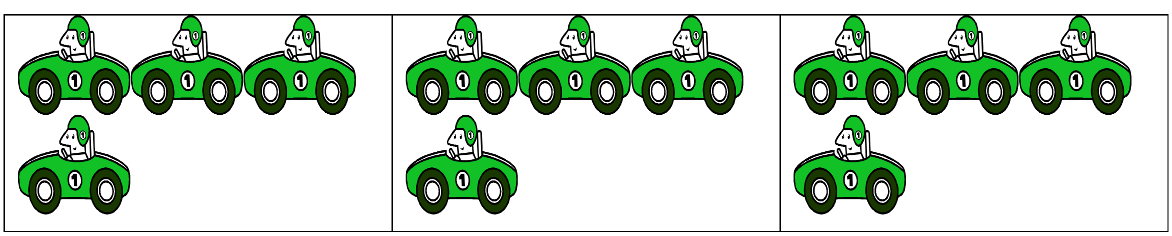
Com a idéia de completar, apresenta-se uma barra vermelha e pergunta-se: que barra deve-se juntar a essa para termos uma do tamanho da azul?

Completando com a barra preta temos um de tamanho equivalente a azul, em sentença matemática tem-se: 2+ 7 = 9

Deve-se ter um cuidado especial com o termo “emprestar” por ser considerado bastante inadequado, pois pede-se emprestado e não se paga o empréstimo feito. Além disso, o aluno que não compreende bem o processo de agrupamento e trocas e só faz contas em lápis e papel, sem agir sobre materiais de contagem, não entende porque pede 1 emprestado e recebe 10. Quando se usa o termo “troca” no entanto, fica claro o valor.

5. MULTIPLICAÇÃO

Muitas vezes ficamos em duvida sobre o modo de representar a multiplicação: “como representar 7+7+7+7 aos alunos? Como 4 x 7 ou 7 x 4? Ou ambos os modos? Se uma criança tiver que escolher entre caixinhas, cada uma com 4 carrinhos e 4 caixinhas cada uma com 3 carrinhos, terá muita dúvida antes de tomar a decisão.



. ou

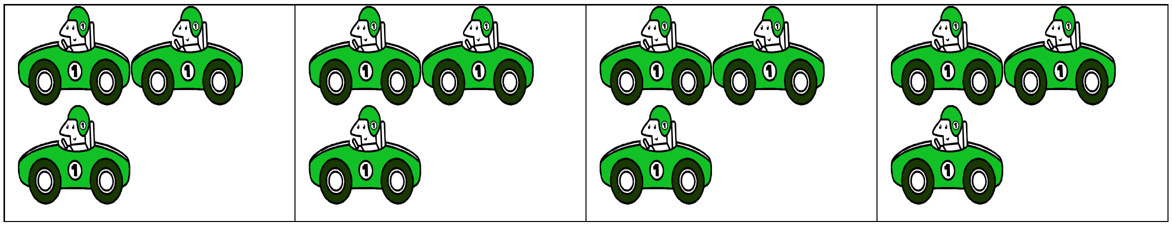
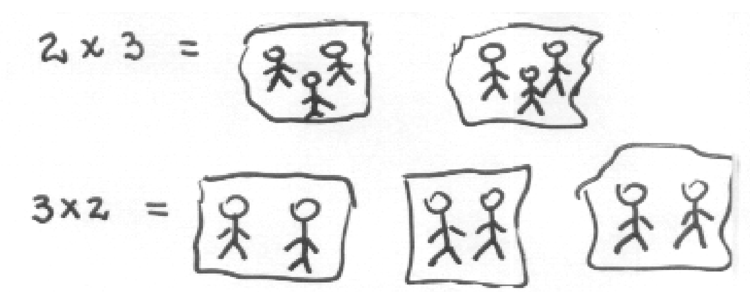


Figura 16

Frequentemente ouve-se dizer não haver diferença entre as duas formas de representar a multiplicação, pois os resultados são iguais. É verdade, os resultados são iguais mas os pressupostos não. Como podemos observar nos desenhos acima a multiplicação carrega consigo a idéia de conjuntos e elementos, quando colocamos 3 x4, estamos representando 3 conjuntos com 4 unidades cada, isto é se retirarmos um conjunto o número total de unidades que era 12 passa a ser 8, enquanto que na representação 4x3 estamos representando 4 conjuntos de 3 unidades cada, quando retirarmos 1 conjunto, restarão ainda 3 conjuntos e com 9 unidades no total. É importante diferenciar a propriedade comutativa da multiplicação que garante resultados iguais, mas também enfatizar a relação de conjuntos e elementos quando tratamos a multiplicação.

É importante que o aluno represente, com figuras, as escritas multiplicativas e escreva os resultados obtidos
através de desenhos:

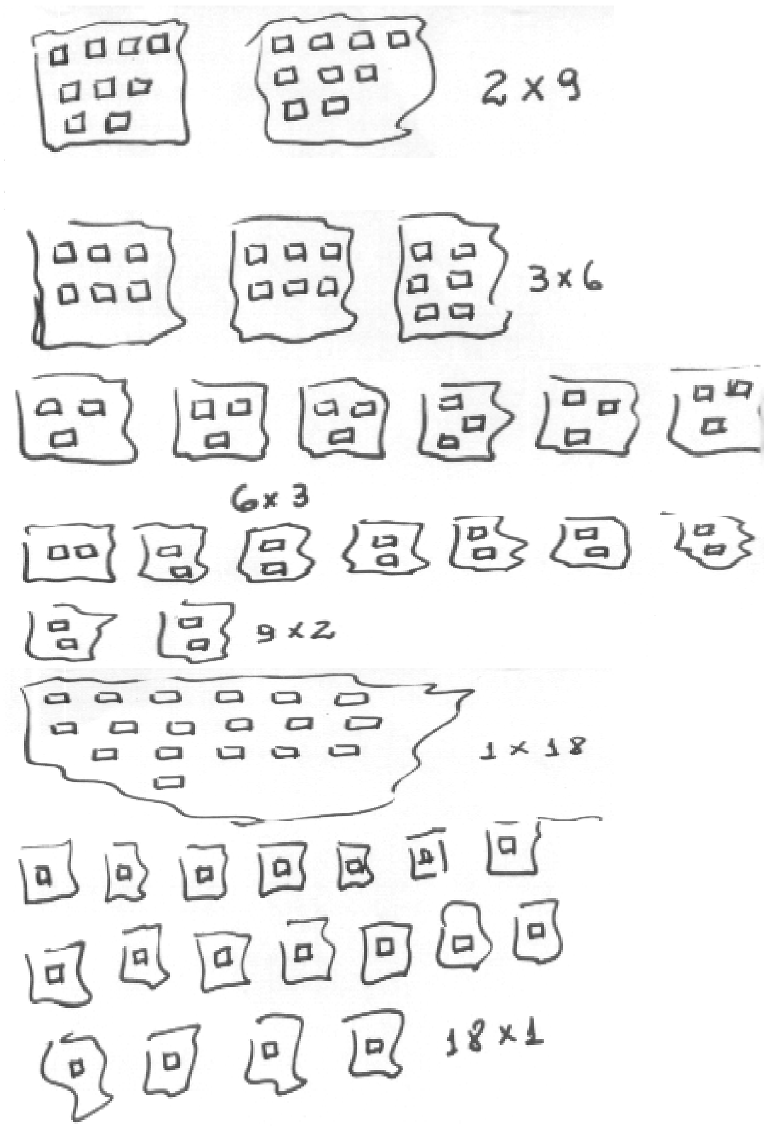


É fácil de observar que o resultado é o mesmo mas a representação não.

Outra questão importante que pode-se trabalhar através da multiplicação são as possibilidades, por exemplo: a partir de 18 fichas,temos os seguintes modos diferentes de formar grupos com quantidades iguais.

As possibilidades que as crianças encontram e representam são:

Figura 16 – Word Clip-art



As barras de Cuisinaire podem ser usadas como recurso para explorar a propriedade comutativa e distributiva.

Construa um muro com 12 barras de valor 1. Depois construa outros muros do mesmo tamanho, formados apenas por barras da mesma cor.

A sentença matemática que representa o número 12,pode ser representada de várias formas:12x1=2x6=3x4=4x3=6x2, a forma de representação vem reforçar a idéia de conjuntos e a quantidade que representa cada conjunto neste caso o tamanho das barras representado por cores diferentes.

A multiplicação está ligada a diversos ramos do conteúdo matemático, além da idéia de soma de parcelas iguais, idéia de conjuntos, também podemos associá-la a idéia de área de figuras planas, com o uso de papel quadriculado e delimitando algumas figuras geométricas, solicitamos que a criança escreva o resultado (área) através de uma multiplicação de todas as formas possíveis. Adaptado de Toledo (1997)

	x	x						z	z	z	z				a	a	a			
	x	x						z	z	z	z				a	a	a			
	x	x													a	a	a			
	x	x																		
	x	x						y	y	y										
	x	x						y	y	y					w		q	q	q	q
								y	y	y					w		q	q	q	q
								y	y	y					w					
r	r	r	r	r	r										w					
r	r	r	r	r	r										w					
								s	s											

Figura x -> 2x6 ou 6x2 = 12
Figura z -> 4x2 ou 2x4 = 8
Figura a -> 3x3 = 9
Figura r -> 6x2 ou 2x6 = 12
Figura y -> 3x4 ou 4x3 = 12
Figura s -> 2x1 ou 1x2 = 2
Figura w -> 1x5 ou 5x1 = 5
Figura q -> 4x2 ou 2x4 = 8

Com esta atividade a criança pode perceber que a área dos quadriláteros está ligada a multiplicação, que mesmo que mudarmos a ordem o resultado não se altera (propriedade comutativa),já que não delimitamos se o conjunto é formado através da linha ou da coluna, é uma questão de ponto de vista e que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Trabalha-se situações em que o cálculo necessita não só da multiplicação mas da adição ou subtração , abordando as expressões numéricas através de cálculo de área em papel quadriculado. A partir do exposto a seguir como representar a área das figuras:

V			V	V	V				G										
V	V		V	V	V				G	G									
V	V		V	V	V				G	G	G		H	H		P			
V	V		V	V	V	V			G	G	G		H	H		P	P		
V	V	V	V	V	V	V			G	G	G		H			P	P	P	
									G	G	G		H			P	P	P	P
																P	P	P	P

V → (1x5) + (1x4) + (1x1) + (3x5) + (1x2)
(5x5) − (2x1) − (2x3)

G → (4x3) + (2x1) + (1x1)
(3x6) − (2x1) − (1x1)

H → (2x2) + (1x2)
(4x2) − (1x2) − (2x2)

P → (4x2) + (3x1) + (2x1) + (1x1)
(4x5) − (1x3) − (1x2) − (1x1)

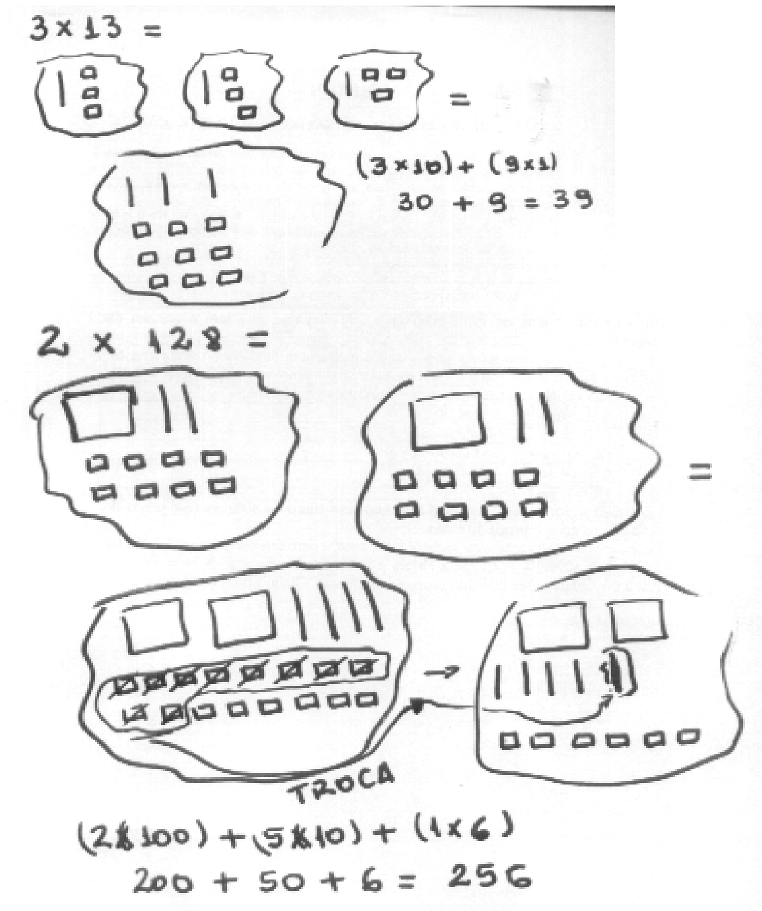
Aqui estão algumas das possibilidades do cálculo das áreas das figuras acima, lembrando que existem muitos outros.

Trabalhar o sentido de uma expressão numérica também é muito importante, normalmente os exercícios são numéricos e sem contexto, o que causa um desestímulo no aluno pela repetição e falta de sentido. É importante que haja uma interpretação e a capacidade de escrever e calcular uma expressão numérica. Analisando o problema: Marcelo comprou 1 caderno e duas canetas, o caderno custou R$12,00 e cada caneta custou R$ 1,50. Marcos comprou o que Marcelo comprou em dobro e ainda 3 borrachas, cada uma no valor de R$ 0,50. Representando a compra de Marcelo e Marcos na forma de expressão numérica temos:

Marcelo
(1x12) + (2x1,50)
Marcos
[(1x12) + (2x1,50)]x2 + (3x0,50)

A partir das representações o conteúdo vai tomando sentido para a criança, facilitando a aprendizagem.

Trabalhar a multiplicação com material dourado é muito importante, pois o aluno percebe facilmente a questão da “troca” e do “vai um”. O registro é fundamental, vejamos os exemplos a seguir:



Um pouco de história: Muitas foram as formas de multiplicar que antecederam o nosso algoritmo tradicional, elas trazem em sí idéias implícitas de expressões numéricas. Vamos olhar um pouquinho como raciocinavam outros povos. Os Egípcio: Há 200 anos os egípcios não sabiam tabuadas, mas tinham grande familiaridade com a duplicação. Seu modo de multiplicar utilizava a adição e os dobros. Toledo (1997)

11 x 43 =

1 x 43 = 43 2 x 43 = 86 4 x 43 = 2 x 86 = 172

8 x 43 = 2 x 172 = 344 16 x 43 = 2 x 344 = 688 ....

Depois procuravam fazer uma decomposição do outro termo, (no caso 11) em parcelas formadas por 2 ou potência de 2, o que para eles eram os dobros. Então 11 = 8+2+1.

Assim 11 x 43 = (8x43)+ (2x43) +(1x43) = 344 + 86 + 43 = 473

Se o cálculo desejado fosse 20 x 43 a decomposição do 20 seria: 20 = 16 + 4

20 x 43 = (16x43) + (4x43) = 688 + 172 = 860

O Método usado na Idade Média; Colocavam dois números lado a lado, procuravam a metade de um deles e por compensação o dobro do outro. Este procedimento era repetido até que a série das metades chegasse a 1. Na série do dobro estaria o valor correspondente, que era o resultado da multiplicação. (Toledo,1997)

16X12 = $\dfrac{16-8-4-2-1}{12-24-48-96-192}$ resultado = 192

Mas quando um dos números não tem metade exata?

12x16= $\dfrac{12-6-3-1}{16-32-64-128}$

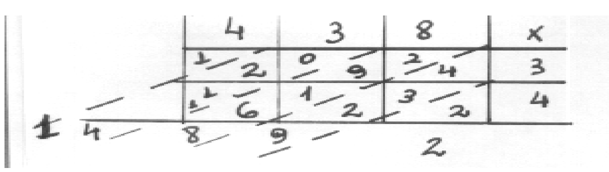
Como o 3 não tem metade exata, calcula-se sua metade aproximada para menos ou seja 1. Seguindo o processo anterior o resultado seria 128. No entanto deve ser somado o valor 64, correspondente ao número que não teve metade exata:3. O resultado é 128 + 64 = 192

Outro exemplo para esclarecer melhor:

25x18 = $\dfrac{25-12-6-3-1}{18-36-72-144-288}$

O resultado é: 288 + 18 + 144 = 450

O Método Reticulado. Na França, algumas escolas ainda hoje utilizam o algoritmo para a a multiplicação conhecido como multiplicação em reticulado, ou em célula, ou, ainda, em gelosia.. O principio do processo é o mesmo que nosso. O procedimento de colocar os algarismos em células evita que se cometam erros, tais como, na soma final, posicionar a dezena em baixo da unidade. 438x34 = 14.892 (Toledo,1997)



Pode-se iniciar a multiplicação por qualquer célula. Preenchida as células, calcula-se a soma dos números colocados em cada diagonal. No caso da soma ser maior ou igual a dez, o algarismo das dezenas é levado a diagonal seguinte.

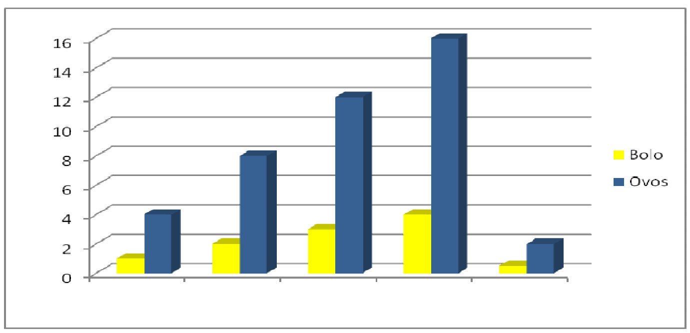
A multiplicação também nos dá a idéia de proporcionalidade que constitui um dos temas mais importantes da matemática, pois é a partir dela que se formam as noções de razão, proporção, número racional, medida, regra de três, porcentagem, probabilidades, semelhança de figuras, escalas, etc...

É importante trabalhar a idéia de dobro, triplo, quádruplo, metade, terça parte...., junto com está idéia pode-se usar tabelas e gráficos para representar tais valores, com a interpretação de tabelas e gráficos estamos iniciando os princípios estatísticos. Por exemplo: Para fazermos um bolo são necessários 4 ovos, a tabela que represente a quantidade de ovos para fazermos, dois, três, quatro bolos é a seguinte:

Número de bolos e número de ovos necessários:

Nº de bolos	Nº de ovos
1	4
2	8
3	12
4	16
Metade (1/2)	2

Número de bolos e número de ovos necessários:



Seguindo com os princípios multiplicativos, a idéia de contagem, possibilidades e representação em tabelas, pode-se sugerir as crianças que coloquem todas as possibilidades possíveis de flores e vasos.

Tabela de dupla entrada

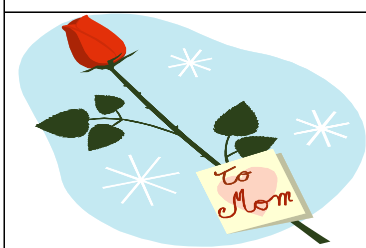
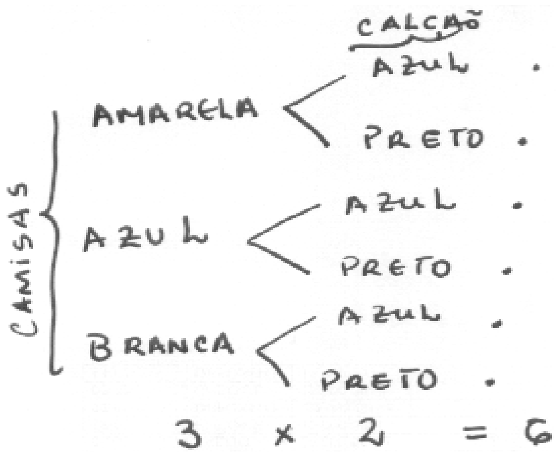
VASOS FLORES		
		
		
		

Figura 17

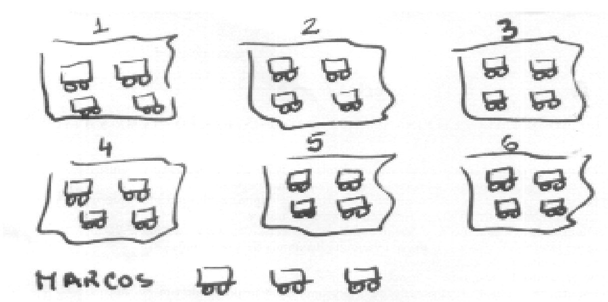
O diagrama de árvores também nos auxilia muito no processo de contagem e no princípio multiplicativo, considere que um time de futebol tem 3 cores de camisas (amarela, azul e branca) e 2 cores de calção (azul e preto). De quantas formas diferentes podemos formar o uniforme do time? Através do diagrama de árvore temos a seguinte representação:



6. DIVISÃO

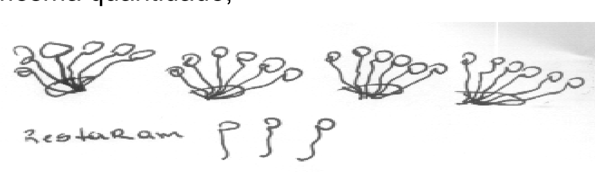
A divisão está relacionada à subtração. Ela é uma subtração reiterada de parcelas iguais, apresentando questões semelhantes. O primeiro ponto que podemos destacar é o fato da divisão estar relacionada a duas diferentes idéias, repartir igualmente e medir, sendo a primeira bem mais enfatizada que a segunda.

A Idéia de Repartir Igualmente: Marcos tem 27 carrinhos e quer reparti-lo igualmente entre seus 6 convidados. Como poderá fazer isto? Marcos irá distribuir os carrinhos um a um, até observar que está sobrando carrinhos , mas está sobra não é suficiente para distribuir mais um carrinho para cada um.



Marcos conclui, que poderá dar 4 carrinhos para cada amigo e ainda lhe restarão 3 carrinhos.

A Idéia de Medir: Uma florista tem 27 rosas para fazer arranjos. Como quer colocar 6 rosas em cada arranjo, quantos ela conseguirá fazer? Neste problema, a florista deverá montar um arranjo de cada vez, cada um com 6 rosas e só no final ela saberá quantos arranjos ela terá e se sobrará rosas, não sendo possível fazer mais um arranjo com a mesma quantidade,



A florista concluiu que é possível fazer 4 arranjos e ainda restam 3 rosas.

No primeiro problema o resultado obtido é carrinho/criança (idéia de repartir), no 2º o resultado rosas /rosas = arranjos (idéia de medir) .

Enquanto forem trabalhados apenas situações que envolvam números naturais, os alunos não terão muita dificuldade para resolve-las. Mas quando surgirem os números decimais as dificuldades aumentam. Ex: 0,2 : 0,05 = 4. A pergunta é : se não havia nenhum inteiro para ser repartido, como ficaram 4 inteiros para cada um?. Mas neste caso não estamos repartindo igualmente, mas medindo quantas vezes 0,05 está contido em 0,2.

O RESTO DA DIVISÃO

Devemos sempre deixar bem claro a relação entre o resto e o divisor. O resto sempre tem que ser menor que o divisor. Para entendermos melhor uma tabela ajuda muito.

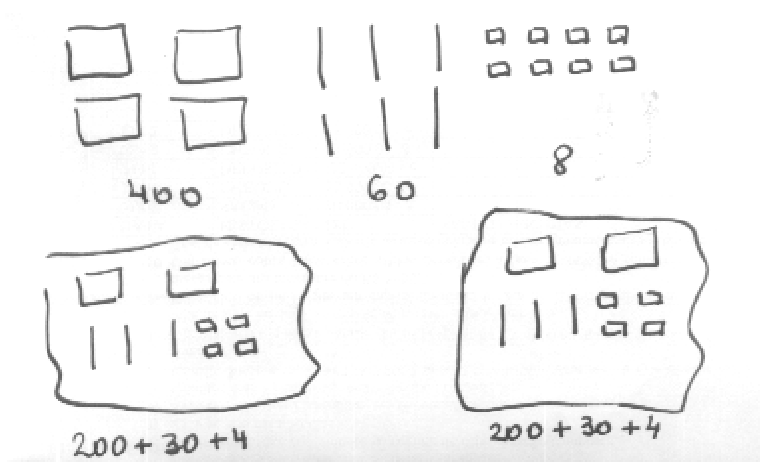
Quantidade de carrinho/menino	Total de carrinhos distribuídos	Total de carrinhos que sobram	Pode-se dar mais um carrinho para cada menino?
1	6	21	sim
2	12	15	sim
3	18	9	sim
4	24	3	não

Adaptado de Toledo (1997)

O ALGORITMO DA DIVISÃO

Inicialmente os alunos realizam a divisão utilizando material concreto e registro no caderno com desenhos.

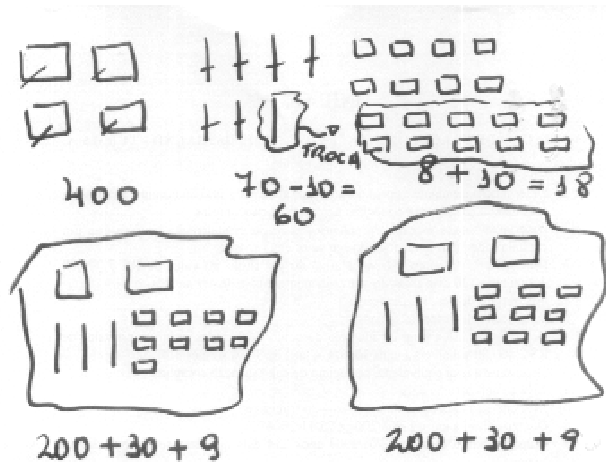
468 :2 =



Para achar o resultado, o aluno intuitivamente usa a propriedade distributiva da divisão em relação a adição.

(4C + 6D + 8U) : 2 = (4C:2) + (6D:2) + (8U:2) = 2C+3D+4U=234

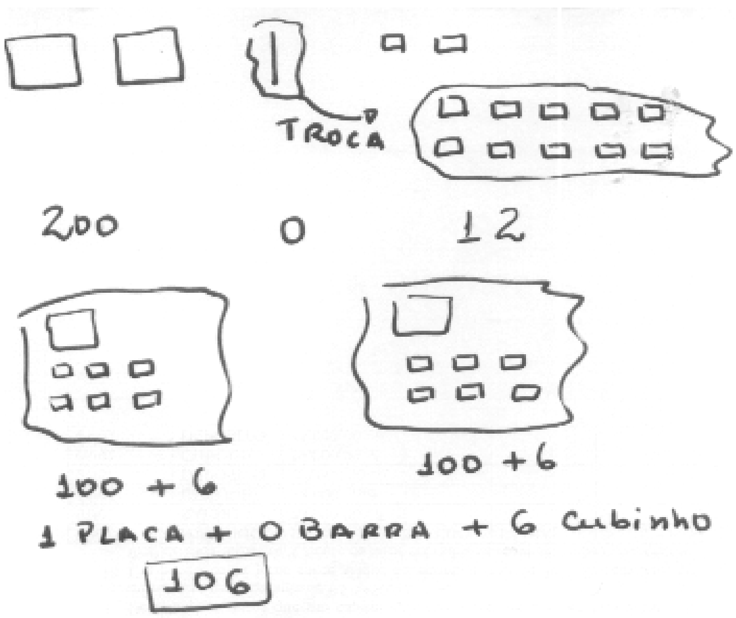
478 : 2 =



(4C+70D+8U):2 = (4C:2) + (7D-1D):2 + (8U+10U):2= 2C + 3D + 9U = 239

O ZERO NO QUOCIENTE.

212 : 2 =



PROCESSO AMERICANO (processo das subtrações sucessivas)

19 : 3 = e 84:24=

$$\begin{array}{r} 19 \\ -3 \\ \hline 16 \\ -3 \\ \hline 13 \\ -3 \\ \hline 10 \\ -3 \\ \hline 7 \\ -3 \\ \hline 4 \\ -3 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 84 \\ -24 \\ \hline 60 \\ -24 \\ \hline 36 \\ -24 \\ \hline 12 \end{array}$$

R: 3 e Resta 12

$(3 \times 24) + 12 = 84$

R: 6 e Resta 1.

$(3 \times 6) + 1 = 19$

REFERÊCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

COLL, César. **Aprendendo Matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

DANTAS, Sérgio...[et AL]. **A Escola é nossa**. São Paulo: Scipione,2003.

GUNDLACH, Bernard H. **Números e Numerais.**São Paulo: Atual,1992.

IMENES, Luis Márcio. **Os números na história da civilizaçã**o. Scipione, 1989.

IMENES, Luis Márcio. **A numeração indo-arábica**. Scipione,1989.

TOLEDO, Marilia. **Didática de matemática: como dois e dois: a construção da matemática.** São Paulo:FTD, 1997.

VYGOTSKY. L.S. **A Formação Social da Mente.** São Paulo: Martins Fontes,2007.

http://www.linhadecodigo.com.br/Artigo.aspx?id=1648

http://educar.sc.usp.br/matematica/m2l2.htm

www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas/Actividade%20**Cuisenaire**%20-%203%20e%204%

www.littleblueschool.com