ESTUDO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E A INDUÇÃO MATEMÁTICA COM APLICAÇÃO DA TORRE DE HANÓI

Evaldo José Drabeski[1]

Reinaldo Francisco[2]

RESUMO

O presente estudo procura investigar o papel metodológico do uso de jogos no processo ensino-aprendizagem da matemática, destacando o uso do jogo da Torre de Hanói no ensino de funções. Inicialmente é feita uma análise bibliográfica sobre o tema, destacando as opiniões de vários autores, bem como um estudo sobre o tema funções. Em seguida, a partir de uma análise qualitativa dos dados, são apresentados os resultados sobre a implementação de uma proposta pedagógica, em duas escolas públicas, com base no jogo da Torre de Hanói, na aprendizagem da função exponencial. Esta metodologia utiliza-se dos fundamentos do jogo da Torre de Hanói para introduzir os princípios das funções, explorando a lenda que envolve o jogo. A partir da definição de uma lei de associação da função, o aluno irá deduzir que existe uma relação entre o número de movimentos e o número de discos. Através da indução matemática o aluno poderá comprovar que esta relação dar-se-á em qualquer situação, independente do número de discos utilizados.

Palavras-chave: Função Exponencial. Jogo Torre de Hanói. Proposta Pedagógica. Indução Matemática.

This study aims to investigate the methodological role of games in the Mathematics' teaching-learning process, mostly the use of the Hanoi Tower in the functions teaching. At first it is done a bibliographical analysis about the matter, including some author's opinions and a study about functions. After the data analysis, the results about a new pedagogical purpose are presented in two public schools, based on Hanoi Tower at the exponential function learning. This method uses the Hanoi Tower fundaments to introduce the functions, exploring the legend in the game. With the definition of an association law of the function, the student will deduce that there is a relation between the number of movements and the number of discs. The mathematic induction he will be

1 Professor de Matemática no Colégio Estadual São Mateus - São Mateus do Sul – PR
Núcleo Regional de União da Vitória.
e-mail: evaldodrabeski@seed.pr.gov.br

2 Professor Mestre do Departamento de Matemática, UNICENTRO, Guarapuava - PR
E-mail: Reinaldo@unicentro.br

able to see the relation in any situation, independent of he number of discs.

Keywords: Exponential Function, Game Hanoi Tower, Pedagogical Purpose, Mathematic Induction.

1. INTRODUÇÃO

A presente pesquisa, de caráter qualitativo, procura, inicialmente, apresentar um estudo sobre alguns aspectos que envolvem a problemática do ensino da matemática no Brasil, analisando algumas possíveis causas e as conseqüências na aprendizagem do aluno.

Na seqüência é feita uma análise bibliografia sobre o papel metodológico do jogo no processo ensino-aprendizagem da matemática, sob a ótica de vários autores, procurando destacar a importância do uso deste método no ensino da matemática, bem como um estudo sobre o tema “funções”, destacando a função exponencial.

Em seguida é feita uma análise dos resultados obtidos com a implementação da proposta de intervenção na escola, a partir da utilização do jogo da Torre de Hanói no ensino da função exponencial. A viabilização da implementação dessa proposta metodológica alternativa é exemplificada pela descrição e análise de situações de ensino da matemática em que o jogo se faz presente, evidenciando a parte prática da pesquisa.

A proposta de intervenção, que trata do estudo da função exponencial, a partir do jogo Torre de Hanói, foi implementada em duas escolas, sendo uma no interior e a outra na cidade. O objetivo é observar o interesse e a participação dos alunos em cada uma delas, tendo em vista que são escolas com realidades pedagógicas diferentes.

2- DESENVOLVIMENTO

O ensino e a aprendizagem da matemática têm sido, há muito tempo, o grande pesadelo para muitos alunos e professores em nossas escolas. Não raras vezes os alunos reclamam que “não estão entendendo a matéria”, ou que “a matemática é muito complicada”. Questionam o porquê de aprenderem determinados conteúdos e qual a relação de tais conteúdos com suas vidas cotidianas. Os professores, por sua vez, também reclamam de que os alunos “não querem saber de nada”, “não prestam atenção nas aulas” ou “não fazem as atividades propostas”. Acusam a deficiência do ensino da disciplina nos anos anteriores e a “falta de base” dos alunos.

Mas afinal, qual será a causa do constante desinteresse dos alunos pelas
aulas de matemática e das dificuldades dos professores em ensinar os conteúdos dessa disciplina?

Geralmente uma aula mais criativa, com uso de novas práticas pedagógicas, irá despertar mais o interesse do aluno do que aquelas aulas tradicionais, baseadas no livro didático e na resolução de alguns exercícios.

Segundo Fiorentini e Morim (1990), são muitas as dificuldades encontradas por professores e alunos no processo ensino-aprendizagem da matemática. Se, por um lado o aluno não entende a matemática que lhe é ensinada e é reprovado por isso, por outro lado o professor, não conseguindo alcançar resultados satisfatórios em suas aulas procura, muitas vezes, simples receitas de como ensinar determinado conteúdo, acreditando ser esta a melhor solução.

A pesquisadora D’Ambrósio (1989) já denunciava, há quase vinte anos, que a típica aula de matemática tanto no nível de primeiro, quanto de segundo ou terceiro graus era uma aula expositiva, na qual o professor passava para o quadro negro aquilo que ele julgava importante e quanto mais exercícios de fixação o aluno resolvesse, mais aprenderia.

Atualmente ainda se observa que esta prática é bastante comum nas aulas de matemática. O professor transmite os conteúdos limitando-se, muitas vezes, ao uso do livro didático e ao quadro de giz e o aluno resolve imensas listas de exercícios do tipo “siga o modelo” e estuda a matéria apenas para “se sair bem nas avaliações”.

No entanto, este método de ensinar matemática, ainda aplicado por muitos professores, não tem despertado mais o interesse do aluno. Segundo Lopes (2005, p. 22): “Os métodos tradicionais de ensino estão cada vez menos atraentes para a criança, ela quer participar, questionar, atuar e não consegue ficar horas a fio sentada ouvindo uma aula expositiva**”.**

Outro aspecto que podemos observar em relação ao ensino da matemática é que constantemente a criatividade do aluno não é explorada pelo professor. A prática da repetição prevalece nas aulas e acaba inibindo a capacidade do aluno de pesquisar, de indagar e de ir além. Conforme salienta Medeiros (2005, p. 20):

> “No ensino tradicional da matemática não tem havido, em geral, um respeito pela criatividade do aluno. Na prática de ensino de um grande número de professores, alheios à preocupação com a criatividade matemática, há um desencontro entre esta e a forma metódica como as idéias parecem surgir àqueles em suas exposições de sala de aula”.

A criatividade do aluno, dessa maneira, é “abafada” pelo professor com métodos tradicionais de solução de questões matemáticas. A motivação do aluno acaba sendo reprimida causando o desinteresse pelas aulas e, por conseqüência, o fracasso nas avaliações. Para Lopes (2005, p. 22): “a criança de hoje é extremamente questionadora, não “engole” os conteúdos despejados sobre ela sem saber *por quê*, ou, principalmente *para que*”.

Na busca de soluções para os problemas em relação ao ensino e aprendizagem da matemática, Lins (2005) propõe que é preciso fazer os alunos verem ‘a Matemática na vida real’, isto é, ‘trazer a vida real para as aulas de Matemática’, utilizando exemplos práticos e que estão ao alcance dos alunos.

O autor coloca ainda que certas idéias da Etnomatemática de Ubiratan D’Ambrósio, a Matemática realista da equipe do Instituto Freudenthal[3] (Utrecht, Holanda) e a Modelagem Matemática têm emergido como formas de dar um sentido às aulas de matemática, ligando a matemática que se estuda na escola com a matemática do dia-a-dia do

3 Organização holandesa dedicada à Educação Matemática. Seu objetivo principal é compreender e melhorar o ensino da matemática.

estudante.

Medeiros (2005, p. 30) também aponta algumas propostas para a melhoria do ensino da matemática nas escolas. Segundo o autor, “para que haja uma mudança radical desta situação, é preciso a consciência da necessidade desta mudança e a busca do que fazer para mudar”. É necessária uma maior aproximação entre o professor e o aluno, além de uma prática na qual o aluno possa ser ouvido, tenha oportunidade de expor suas idéias e possa discutir coletivamente os temas abordados.

Nesta perspectiva, consideramos que o trabalho pedagógico, por meio de jogos, é uma alternativa para mudanças no ensino e aprendizagem em nossas escolas.

Na literatura encontramos vários pesquisadores que destacam a importância e a eficácia da utilização de jogos no ensino da matemática. D’Ambrósio (1989, p. 16) cita que: “[...] o uso de jogos matemáticos no ensino são alguns exemplos de propostas de trabalho visando a melhoria do ensino de matemática segundo uma perspectiva construtivista”.

D’Ambrósio (1989) destaca ainda que muitos grupos de trabalho e pesquisa em educação têm dado ênfase ao uso de jogos no ensino da matemática. A autora cita como exemplo o Pentathlon Institute[4] que destaca os jogos como uma forma de se abordar aspectos do pensamento matemático que são ignorados no ensino, como o pensamento lógico-matemático e o pensamento espacial.

Segundo Grando (1995, p. 86) são várias as finalidades que se pode atingir com o uso de jogos no processo ensino aprendizagem. Entre estas finalidades a autora destaca:

> “A fixação de conceitos, a motivação, a construção de conceito, aprender a trabalhar em grupo, propiciando solidariedade entre os alunos, estimular a raciocinar, desenvolver o senso crítico, a disposição para aprender, e descobrir coisas novas, além do desenvolvimento da cidadania.”

A autora esclarece ainda que o ensino por meio de jogos educativos desperta no aluno o interesse pelas aulas de matemática e a motivação para a aprendizagem. Os conteúdos ganham mais significado e são mais bem assimilados pelos alunos que, com um melhor desempenho

4 No Brasil, os trabalhos do Pentathlon Institute podem ser conhecidos através do grupo de estudos do Laboratório de Ensino de Matemática da UNICAMP.

nas aulas, garantem uma melhora em sua autoconfiança. O aluno, com certeza, terá um rendimento melhor e a sua aprendizagem trará resultados mais positivos.

Lopes (2005) nos coloca que é mais fácil o aluno aprender através de jogos e isto vale para todas as idades. O jogo traz em suas estratégias aspectos do cotidiano do aluno e isto acaba envolvendo-o e despertando o seu interesse. A atitude de confeccionar seu próprio jogo acaba tornando esta atividade muito mais interessante**.**

Outros aspectos importantes com relação à utilização dos jogos em sala de aula podem ser encontrados em Jesus e Fini (2005, p. 130). Os autores afirmam que: “A experiência docente e a análise da literatura mostram que o uso de jogos na escola pode ser um recurso interessante no sentido de tornar atraentes as atividades escolares, bem como estimular o raciocínio dos alunos.” Também esclarecem que os jogos fazem parte de diversas culturas e são um importante apoio metodológico que estimulam os alunos a criar, pesquisar, “brincar” e “jogar” com a matemática.

Outro motivo para a utilização de jogos em sala de aula é que o jogo exige do aluno um raciocínio global, a abdução, que o prepara para atividades sociais futuras, satisfazendo desta maneira “um dos objetivos do ensino da Matemática que é formar o aluno para a vida a fim de atuar numa sociedade em constante transformação.” (GRANDO, 1995, p. 103).

Este pensamento da autora é corroborado pelas propostas das Orientações Curriculares para o Ensino Médio da Secretaria de Educação Básica Paraná, na qual se afirma que através da matemática o homem tem a oportunidade de ampliar seus conhecimentos e, por conseguinte, contribuir para o desenvolvimento da sociedade. (PARANÁ, 2006).

O uso de jogos na educação, entretanto, nem sempre foi visto com bons olhos pelos educadores, tendo em vista que nem sempre foi considerado como uma atividade séria. Este pensamento foi até o final do século XIX.

Segundo Jesus e Fini (2005, p. 129), somente “a partir do pensamento romântico foi possível associar-se jogo e educação e também descobrir no jogo, valores educativos, que o transforma em atividade séria”. Provavelmente seja através da Educação Matemática que tenha vindo esta idéia clara de aprender matemática com a utilização de jogos.

Porém, esta idéia de utilizar jogos na educação e formação não é tão recente assim. Platão (427-347 a.C.) já falava sobre a importância de se aprender através de brincadeiras, combatendo desta forma a violência e a opressão. Aristóteles também sugeria que se deveriam usar na educação jogos que imitassem atividades sérias, preparando assim as crianças para a vida futura. Entre os romanos, os jogos, destinados ao preparo físico, eram utilizados com a finalidade de formar soldados disciplinados e fiéis às doutrinas da época. (KISHIMOTO, 1995, p. 39).

No Brasil a valorização do jogo como forma de educar é bem mais recente. Segundo Kishimoto (1995), somente a partir da década de oitenta, com a criação das brinquedotecas, a multiplicação dos congressos e o aumento da produção científica sobre o tema é que os jogos passaram a ter importância na educação brasileira.

Apesar de muitos autores apontarem para a relevância da utilização de jogos na educação, são poucos os professores de matemática que utilizam este importante recurso para enriquecer sua prática pedagógica. Isto pode ser comprovado em Jesus e Fini (2005, p. 131), através do questionamento: “Quantos dos professores de matemática conhecem pelo menos um professor que use jogos matemáticos em sala de aula? Muitos conhecem apenas um, ou talvez nenhum”.

Mais adiante Jesus e Fini (2005) comentam que não há necessidade de se preocupar diante do pequeno número de professores que se utilizam de jogos em suas aulas de matemática. O importante é a maneira como eles fazem uso destes jogos. Os autores destacam que os jogos podem ser utilizados com diversas finalidades como, propiciar um momento de diversão, substituir as aulas teóricas e cansativas ou para serem utilizados em salas ambientes. Salientam, entretanto, que seu uso deve ter objetivos claros e bem definidos pelo professor e que seja discutido com seus colegas de trabalho, garantindo assim um trabalho interdisciplinar.

Um fator importante ao se utilizar jogos em sala de aula é a participação efetiva do professor nesta prática pedagógica. Ele é responsável pelo planejamento e aplicação das atividades nas aulas de matemática, nas quais os jogos estão sendo utilizados. Também irá explicar as regras do jogo aos alunos ou propiciará condições para que eles criem jogos envolvendo o conceito trabalhado. Mas a participação do professor deve ser discreta. Para Grando (1995, pág. 123): “O professor deve se limitar a dar as regras do jogo aos alunos e estes é que irão, a partir da regra e da ação do jogo, elaborar suas estratégias”.

A utilização de jogos no ensino da matemática faz parte da teoria construtivista, iniciada por Piaget. Segundo esta teoria, “a aprendizagem ocorre através da coordenação e re-coordenação de ações inicialmente efetuadas sobre objetos concretos aumentando-se, gradativamente, o nível de abstração e de formalização”. (RÊGO, 2000, pág. 17).

Para Fiorentini (1995), essa tendência vê a matemática como uma construção humana formada por estruturas e relações abstratas entre grandezas, tendo como resultado uma interação do homem com o meio em que vive.

O uso de jogos na teoria construtivista também é comprovado e justificado por Kamii (1995 p. 147): “Os jogos são uma parte essencial do ensino construtivista por muitas razões. Do ponto de vista do desenvolvimento da autonomia das crianças, os jogos envolvem regras e são, portanto, especialmente adequadas para o desenvolvimento da habilidade das crianças de governarem a si mesmas”.

Assim sendo, com o propósito de tornar mais interessante e mais atrativo o estudo de funções, amparamo-nos nos autores citados e desenvolvemos na escola uma proposta de atividade para a construção do conceito de função exponencial com a utilização de jogos. O objetivo é abordar o conteúdo de forma a estimular o raciocínio do aluno e a busca pelo conhecimento e, em decorrência, um maior interesse pelas aulas de matemática.

Para tanto, escolhemos o jogo “Torre de Hanói” para explorar o lúdico e a imaginação dos alunos, tornando as aulas mais agradáveis tanto para o professor como para os próprios alunos.

O uso da Torre de Hanói no ensino da matemática é de grande valia, pois leva a entender a simbolização, o seqüenciamento, a generalização, o raciocínio lógico, a ação exploratória, a contagem e o planejamento da ação.

Mas afinal, como surgiu este interessante jogo? Como funciona?

2.1 O JOGO DA TORRE DE HANOI

O jogo consiste num tabuleiro com 3 a 5 pinos de madeira e um conjunto de 6 discos de diâmetros diferentes, com uma perfuração no centro. O desafio consiste em transferir os discos que devem estar, inicialmente, em um dos pinos para qualquer um dos pinos livres. Vence o jogo quem concluir o trabalho no menor número de movimentos possível, movendo apenas um disco de cada vez e sem colocar um disco maior sobre outro menor. (RÊGO, 2000).

O jogo da Torre de Hanói foi criado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883, e vendido como brinquedo.

Para criar o brinquedo, Lucas tomou como base uma antiga lenda indiana. Segundo esta lenda, o centro do mundo encontra-se sob a cúpula de um templo situado em Benares, na Índia. Sob a cúpula do templo havia uma placa onde estavam fixados três pinos de diamantes. Num destes pinos Brahma, ao criar o mundo, colocou sessenta e quatro discos de tamanhos diferentes, um sobre o outro e em ordem decrescente, isto é, do maior para o menor. Esta era a Torre de Brahma.

Junto a esta torre o criador colocou um grupo de monges cuja função era mover os discos da haste original para as duas outras hastes, trabalhando dia e noite. Mas para realizar esta tarefa eles deveriam respeitar duas regras importantes: mover apenas um disco de cada vez; nunca colocar um disco maior sobre outro menor.

Segundo esta lenda, antes que os monges consigam terminar esta tarefa, o templo transformar-se-á em pó e então o mundo acabará, com o estrondo de um grande trovão. (MACHADO 1992, p. 44).

Mas como poderemos relacionar o jogo da Torre de Hanói com o estudo da função exponencial?

Alguns questionamentos podem ser levantados: Será que existe alguma relação entre o número de discos e o número de jogadas? Será que o número de jogadas está em função do número de discos? Como poderemos concluir quanto tempo os monges levarão para mudar os 64 discos, segundo a lenda?

Antes de respondermos a todas estas questões vamos conhecer um pouco mais sobre o conteúdo funções.

2.2 CONCEITO DE FUNÇÕES

As funções, como conteúdo da Matemática, tiveram vários conceitos no decorrer dos tempos, mas nem sempre ligados à sala de aula. Na Idade Média as noções de funções eram expressas de maneira geométrica e mecânica prevalecendo, em cada caso concreto, as explicações e as representações gráficas.

Na Idade Moderna, o aperfeiçoamento de instrumentos de medida deu condições para que os matemáticos estudassem as funções utilizando a experiência e a observação. Isto ajudou muito na evolução do conceito de função. A partir daí iniciou-se o desenvolvimento do tratamento quantitativo, das equações em **x** e **y** nas relações de dependência, das noções de curva nos movimentos e fenômenos mecânicos, das taxas de mudança de quantidade, das imagens geométricas e da linguagem simbólica.

A partir do momento em que começou a acontecer uma aproximação entre o conceito de função e a álgebra, esta teve uma maior abrangência passando aos campos do cálculo diferencial e da análise matemática, sendo fundamental para o desenvolvimento da teoria das funções complexas.

O conteúdo funções marcou o início da modernização do ensino da matemática. De 1880 a 1959 foi muito debatida a idéia de que o conceito de função deveria fazer parte do currículo de matemática, pois poderia dar mais dinamicidade ao seu ensino. (PARANÁ, 2006, pág. 38).

Atualmente as funções fazem parte de diversas áreas do conhecimento e, através da resolução de problemas, auxiliam as pessoas em suas atividades do cotidiano. Elas fazem parte também de outros conteúdos específicos da Matemática. Segundo Longen (2004, pág. 70): “a idéia de função é uma das mais importantes da Matemática, ocupando lugar de destaque também em outras áreas do conhecimento”. Esta afirmação se justifica pelo fato de que os fenômenos não acontecem de forma isolada, mas estão interligados de modo que a ocorrência de um é conseqüência do outro, isto é, um é função do outro.

Uma função é uma relação entre duas variáveis x e y tal que o conjunto de valores para x é determinado e a cada valor x está associado um e somente um valor y.

Para definirmos o conceito de função utilizaremos Caraça (2005, pág. 121): “sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x), se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente”.

Uma maneira de explicar melhor e facilitar o entendimento do conceito de função é o uso de uma alegoria matemática, isto é, explicar a função utilizando a metáfora da máquina. Segundo Grando (1995, pág. 126): “Assim, através da compreensão, pelo aluno, do funcionamento da máquina, ele pode compreender o processo de transformação de x em f(x), determinado por uma lei (função)”. A pesquisadora apresenta o seguinte exemplo:

máquina: $y = f(x) = x^2 + 3$

entra x **Processo de Transformação** **sai y = f(x)**

Elevar ao quadrado e somar 3

Outro aspecto importante no estudo das funções são os gráficos. Os meios de comunicação, como jornais e revistas, utilizam – se muito dos gráficos. Eles permitem às pessoas uma melhor visualização das informações divulgadas, facilitando a interpretação dos resultados apresentados. A importância dos gráficos no estudo das funções pode ser justificada nas palavras a seguir: “O estudo das funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que dá significado às variáveis das grandezas envolvidas, e possibilita análise para prever resultados”. (PARANÁ, 2006, pág. 38).

As funções exponenciais são aquelas que crescem ou decrescem muito rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras. Também são utilizadas na Matemática Financeira no estudo de taxas de juros e aplicações financeiras.

O conceito de função exponencial, segundo Longen (2004, pág. 139) é definido como sendo: “toda função f: R R tal que $y = f(x) = a^x$ em que a é uma constante real e diferente de 1” . O que caracteriza uma função exponencial é que a variável **x** está no expoente.

A função exponencial pode ser entendida como o inverso da função logarítmica.

A seguir vamos ver alguns conceitos sobre indução finita que será importante na comprovação de alguns resultados obtidos durante a pesquisa.

2.3 A INDUÇÃO FINITA

Segundo Savioli (apud Gástev, apud Sominski 1996), indução significa o raciocínio que vai do particular ao geral e desempenha papel fundamental nas ciências experimentais. Apesar de o nome lembrar algo empírico, a indução finita é considerada um método dedutivo.

Normalmente a indução finita é aplicada no estudo com números naturais. Outra forma de apresentação da indução finita é através do quinto axioma de Peano[5] , como pode ser encontrado em Savioli (apud Lima, 1999):

5 G. Penedo, Arithimetica Principia Nova Methodo Exposita, 1889.

“Considerando X C N. Se 1 E X e se o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então X = N.”

O Teorema da Indução Finita também pode ser visto em forma de propriedades, considerando os números naturais: N= {0,1,2,3,...}. Pode ser enunciado como:

“Considere P(n) uma afirmação relativa a n ϵ N. Suponha que:

a) P(1) é verdadeira;

b) Para todo n ϵ N, o fato de P(n) ser verdadeira implica que P(n+1) é verdadeira, onde n+1 é o sucessor de n.

Assim, P(n) é verdadeira para todo n ϵ N”.

A seguir serão apresentados e analisados os resultados obtidos com a implementação da proposta de intervenção na escola.

2.4 RELATÓRIO DA IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA NAS ESCOLAS

Esta implementação foi realizada em duas escolas públicas, sendo uma na cidade e a outra no campo. O objetivo é fazer uma comparação entre as duas escolas, analisando o interesse e a participação dos alunos em cada uma delas e o grau de dificuldades encontradas na solução dos problemas apresentados.

Para a implementação desta proposta foram utilizadas como suporte as intervenções realizadas por Grando (1995), Gonçalves (2007) e Watanabe (2004), cujos estudos se aproximam pelo tema e pela natureza dos objetivos.

Inicialmente a experiência foi realizada numa escola do campo, onde a maioria dos alunos são filhos de agricultores e moram nas comunidades próximas à escola.

Após a leitura de um texto que tratava sobre a lenda da Torre de Brahma e de como surgiu o jogo da Torre de Hanói, foi apresentado aos alunos um modelo do jogo e explicado o seu funcionamento. Então foi solicitado a eles que confeccionassem o próprio jogo em casa e trouxessem para a escola na aula seguinte.

No dia seguinte alguns alunos trouxeram o jogo montado. Então a turma foi dividida em vários grupos para que os alunos pudessem ter contato com o jogo. Em seguida foram explicadas as regras do jogo, ou seja, de que forma deveriam ser mudados os discos de um dos pinos para os outros dois pinos livres. Para isto deveriam obedecer as seguintes regras: utilizar somente um disco de cada vez; nunca colocar um disco maior sobre outro menor. Então cada grupo se organizou e iniciou o jogo.

Inicialmente os alunos passaram a mudar os discos aleatoriamente, sem se preocuparem com a quantidade de movimentos.

Situação semelhante ocorreu na experiência realizada por Grando (1995) em uma turma de 2™ série de uma escola pública. A autora comenta que na aplicação do jogo em sua turma, no início os alunos também mudavam os discos aleatoriamente, sem se preocuparem com a quantidade de movimentos realizados.

Esta etapa representa a fase de familiarização, na qual os alunos passam a conhecer o jogo e dominar suas regras. É importante, portanto, que o professor reserve um tempo da aula para que os alunos pratiquem o jogo e despertem o interesse pelo mesmo.

Porém quando os alunos foram informados de que havia uma quantidade mínima de movimentos para cada jogada, começaram a analisar melhorar o jogo, criando estratégias para mudar os discos com menor número de movimentos. Assim eles procuraram compreender o jogo, não apenas pelas suas regras implícitas, mas também pelo seu aspecto operatório, possibilitando uma reflexão sobre os movimentos estabelecidos pelo jogo. Assim os alunos realizaram sem dificuldades a movimentação com um, dois e três discos. Isto despertou o interesse pelo jogo e eles até pediram para acrescentar mais discos.

Mas ao chegarem ao quarto e quinto discos as dificuldades foram maiores, visto que aumentou consideravelmente o número de movimentos. Seguindo uma lógica de movimentação, depois de várias tentativas, conseguiram realizar a tarefa com êxito.

Gonçalves (2007) comenta, em sua experiência com a Torre de Hanói, que seus alunos também tiveram dificuldades em realizar as jogadas, a partir do terceiro disco.

Para realizar a mudança dos cinco discos, os alunos tiveram que fazer os seguintes movimentos: com 1 disco m_1 = 1 movimento; com 2 discos m_2 = 3 movimentos; com 3 discos m_3 = 7 movimentos; com 4 discos m_4 = 15 movimentos; com 5 discos m_5 = 31 movimentos.

Com estes movimentos os alunos puderam ter a idéia de como deslocar n discos, com o menor número de movimentos possíveis. Primeiramente movem-se $n - 1$ discos para o bastão de trás com m_{n-1} movimentos; na seqüência move-se o n-ésimo disco para o bastão da frente, com 1 movimento. E, finalmente, movem-se os $n - 1$ discos do bastão de trás para a frente, com m_{n-1} movimentos. Assim deduz-se que:

$\boldsymbol{M_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 1.}$ (WATANABE 2004, p. 133)

Após esta constatação, os alunos foram convidados a elaborar uma tabela com os resultados, que ficou assim distribuída:

Tabela 1: Dados do Jogo Torre de Hanoi

Número de Discos (n)	Número de Movimentos (m_n)
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Depois da tabela pronta, foi solicitado que os alunos observassem a seqüência formada com o número de movimentos: 1, 3, 7, 15, 31, ... E que analisassem se existia alguma relação entre eles.

Passado algum tempo um dos alunos se manifestou dizendo que havia achado a relação entre os valores. Segundo este aluno, o valor do número seguinte é obtido com o dobro do anterior mais um. A partir desta descoberta os alunos começaram a fazer contas na calculadora, tentando descobrir o número de movimentos para 64 discos. Mas a certa altura as calculadoras não tinham mais capacidade para comportar o número de dígitos que se formavam.

Então foi perguntado aos alunos se não haveria uma outra forma de descobrir a quantidade mínima de movimentos com qualquer número de discos, sem saber o número anterior. Esperava-se que no estágio escolar em que se encontram, eles procurassem estabelecer uma lei de associação entre o número de discos e o número de movimentos.

Em sua intervenção Grando (1995) também solicitou que seus alunos do 2∫ ano tentassem estabelecer uma lei de associação entre o número de discos e o número de movimentos. Mas eles não conseguiram identificar que os números somados representavam potências de base 2.

Os alunos realizaram várias tentativas, porém não conseguiram chegar ao resultado esperado. Então, chamou-se a atenção deles para a potenciação, assunto revisado recentemente, em que o dobro do número anterior que eles haviam observado anteriormente, representava potências de base 2. Utilizando as potências de base 2 ficou assim definido o número de movimentos: $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$.

As potências de base 2 também foram utilizadas por Gonçalves (2007) em sua atividade com os alunos, utilizando a Torre de Hanói.

Então foi pedido para que eles acrescentassem mais uma coluna na tabela anterior e colocassem os valores.

Em seguida foi solicitado para que eles comparassem os números e verificassem o que faltava para que os valores ficassem iguais. Então eles chegaram à conclusão de que teriam que diminuir 1 para chegar ao mesmo valor. Após esta constatação, a tabela ficou assim definida:

Tabela 2: Uso de Potências de Base 2

Número de Discos (n)	N∫ de Movimentos (m_n)	Potências de Base 2
1	1	$2^1 – 1 = 1$
2	3	$2^2 – 1 = 3$
3	7	$2^3 – 1 = 7$
4	15	$2^4 – 1 = 15$
5	31	$2^5 – 1 = 31$

Enfim, após uma discussão entre alunos e professor, definiu-se que a lei de associação será $m_n = 2^n - 1$, para uma quantidade mínima de movimentos com *n* discos. Através desta constatação foram respondidos os questionamentos levantados anteriormente sobre a existência de uma relação entre o número de discos e o número de movimentos, bem como foi determinada a lei de associação (função) existente entre eles.

Mas aí surgiu um novo questionamento: esta solução é válida para *n* = 1, 2, 3, 4, 5. Mas será verdadeira sempre?

Para responder a este questionamento os alunos fizeram uso de um outro instrumento que é o Método da Indução Finita. A utilização deste método é comprovada por Machado (1992, p. 45): "O número mínimo de movimentos necessários para efetuar a transferência de uma pilha de n *discos* é dado pela fórmula $2^n - 1$, o que também pode ser justificado pelo Princípio da Indução Finita".

Os alunos utilizaram o seguinte raciocínio para comprovar que a solução é válida para qualquer número de discos:

Sendo S o conjunto dos números naturais *n* tais que, *n* discos são movidos com $2^n - 1$ movimentos. O número 1 ϵ a S, pois para 1 disco precisamos de $1 = 2^1 - 1$ movimentos. Supondo que K ϵ S, isto é, K discos são removidos com $2^k - 1$ movimentos, vamos provar que k + 1 ϵ S, isto é, que $m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Para remover *k* + 1 discos passamos, inicialmente, *k* discos para o bastão de trás com m_k movimentos; em seguida, com 1 movimento, o (k +1), o *n*-ésimo disco vai para o outro bastão da frente; com m_k movimentos, os *k* discos de trás passam para o bastão da frente. Isto é,

$$m_{k+1} = m_k + 1 + m_k.$$

$$m_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2.2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Isto demonstra que k + 1 ϵ S .

O princípio da indução garante que *n* discos podem sempre ser removido com 2*n* – 1 movimentos e, particularmente, $m_{64} = 2^{64} - 1$. (WATANABE, 2004, p.134).

Voltando a lenda da Torre de Hanói, os alunos concluíram que serão necessários $2^{64} - 1$ movimentos para que os monges possam mudar todos os discos.

Foi, então, proposto a eles o seguinte questionamento: supondo que os monges gastem um segundo para mudar cada disco, quanto tempo eles levarão para concluir a sua missão?

Com bastante entusiasmo os alunos passaram a fazer alguns cálculos. Primeiramente calcularam quantos segundos tem um ano: 60x60x24x365 = 31 536 000 segundos.

Em seguida deduziram que o número 31 536 000 é menor que 2^{25} . Supondo que, exageradamente, os monges façam 2^{25} movimentos por ano, então o mundo deverá acabar em:

$$2^{64} / 2^{25} = 2^{39} \text{ anos.}$$

Segundo os cientistas, já se passaram até hoje 4 bilhões de anos desde a criação do mundo, ou seja, $4.\ 10^{9}$ anos. Portanto, segundo os cálculos dos alunos, ainda faltam mais de 508 bilhões de anos para que os monges terminem a sua tarefa e que o mundo acabe. (WATANABE, 2004, p.135)

Assim, os alunos conseguiram resolver o problema inicialmente proposto sobre quanto tempo os monges levariam para mudar os 64 discos. E ficaram surpresos com o resultado obtido.

Voltando ao estudo das funções, foi explicado aos alunos que este é um tipo de função que é denominado de função exponencial, pois a variável independente *x* encontra-se no expoente. Esta função tem a característica de multiplicar seus valores muito rapidamente. Em seguida elaboraram os gráficos, identificaram se a função era crescente ou decrescente e determinaram o seu conjunto-imagem.

Na seqüência os alunos fizeram algumas atividades resolvendo problemas que envolviam cálculos de juros compostos, depreciação de veículos e crescimento populacional. Nesta atividade eles tiveram a oportunidade de identificar qual era a lei de associação da função e descobrir que se tratava de uma função exponencial, pois a variável *x* encontra-se no expoente.

A implementação da proposta na escola da cidade foi realizada da mesma forma que na escola do campo. Além de apresentar o jogo da Torre de Hanói e solicitar que os alunos confeccionassem o próprio jogo, também foi indicado a eles um endereço eletrônico para que eles pudessem consultar e praticar o jogo: <http://www.matematica.br/programas/hanoi/ihanoi4.html> .

Ao contrário da escola do campo, nesta escola os alunos não tiveram interesse em confeccionar o jogo. Porém alguns comentaram que acessaram o site para praticar o jogo no computador.

Então a partir da demonstração do jogo, os alunos montaram a tabela com o número de discos e o número de movimentos. Em seguida os alunos foram estimulados a descobrir a lei da associação da função para poder determinar o número de movimentos com qualquer número de discos. Assim como na escola do campo, os alunos tiveram dificuldades em determinar qual a lei de associação que determina o número de movimentos, em função do número de discos.

Novamente foram utilizadas as potências de base 2 para definir o número de movimentos em função do número de discos. A partir daí foi definida a lei de associação da função. Na seqüência também foi utilizada a indução finita para justificar os resultados obtidos.

Voltando à lenda, os alunos também calcularam quanto tempo os monges levarão para mudar os 64 discos e ficaram surpresos com o resultado obtido.

Então foi retornado ao estudo das funções, onde foi explicado aos alunos que este é um tipo de função que é denominada de função exponencial, pois a variável independente *x* encontra-se no expoente.

Na seqüência os alunos fizeram algumas atividades resolvendo problemas que envolviam cálculos de juros compostos, depreciação de veículos e crescimento populacional. Aí eles tiveram a oportunidade de identificar qual a lei de associação da função e descobrir que se tratava de função exponencial pois a variável *x* encontra-se no expoente. Em seguida elaboraram os gráficos, identificaram se era função crescente ou decrescente e determinaram o seu conjunto-imagem.

3. CONSIDERAÇÔES FINAIS

Ao concluir esta pesquisa pôde-se observar que os métodos tradicionais no ensino da matemática já não têm despertado mais o interesse dos alunos. É preciso, sem dúvida, buscar alternativas. E uma destas alternativas pode ser o uso de jogos em sala de aula. Esta prática, se bem trabalhada, possibilitará ao professor maior interação com a turma e um ensino mais dinâmico e atraente e ao aluno a possibilidade de discussão e uma aprendizagem significativa.

Quanto à implementação da proposta nas duas escolas, pôde-se perceber que os alunos da escola do campo demonstraram maior interesse pelo jogo da Torre de Hanói, inclusive confeccionando o próprio jogo. Já na escola da cidade o interesse dos alunos pelo jogo foi menor. Eles não construíram o próprio jogo, porém procuraram realizá-lo no computador.

Este fato retrata a realidade das duas escolas. Na escola do interior, os alunos têm pouco acesso ao computador, por isso eles procuraram construir seu próprio jogo para poder utilizá-lo na sala de aula. Já na escola da cidade, os alunos têm maior acesso ao computador e por isso buscaram esta alternativa para praticar o jogo.

Durante a implementação da proposta nas escolas possibilitou-se observar que a inclusão do jogo no processo ensino-aprendizagem da matemática, desde que se respeite a natureza lúdica do jogo, pode ser considerado como uma alternativa de mudança desse processo, mediante a participação efetiva e transformadora do professor-orientador na ação desencadeada pelo jogo.

Quanto à implementação da proposta nas duas escolas, fazendo uso do jogo Torre de Hanói, alguns aspectos podem ser destacados, a saber: a constatação pelos alunos de que o jogo tem normas a serem observadas; a descoberta da lei de associação que determina a relação entre o número de discos e o número de movimentos; que esta lei de associação caracteriza uma função exponencial; a comprovação, através da indução finita, de que esta relação acontece com qualquer número de discos.

No geral, analisando todo o processo originado pela utilização do jogo em sala de aula, pode-se notar que houve uma evolução, por parte dos alunos, de um conceito mais simples para um conceito mais trabalhado, onde eles puderam compreender as relações matemáticas envolvidas no conceito de função exponencial, com toda a sua lógica de movimentação. Neste aspecto, a atividade atingiu o objetivo inicial que era proporcionar aos alunos uma atividade lúdica na determinação de um conceito.

Quanto ao conteúdo funções, os alunos dos dois colégios apresentaram as mesmas dificuldades, principalmente na hora de definir a lei de associação entre o número de discos e o número de movimentos. Eles tiveram alguma dificuldade em aplicar conceitos trabalhados anteriormente, como foi o caso das potências de base 2. Espera-se que esta situação possa ser resolvida com esta prática pedagógica, nos anos seguintes.

Fica então a sugestão de se trabalhar o conceito de função exponencial a partir do jogo Torre de Hanói. Esta estratégia também pode ser aplicada no desenvolvimento de outros conceitos matemáticos como Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

REFERÊNCIAS

D’AMBROSIO, Beatriz. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. Ano II, n∫ 2. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática: 1989, p. 15-19.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. São Paulo: UNICAMP. Revista Zetetiké, ano 3, n. 4, 1995.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria A. **Uma Reflexão Sobre o Uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM – SP, n. 7, julho-agosto 1990.

GON«ALVES, Alex O. A **Torre de Hanói em Sala de Aula**. Revista do Professor de Matemática N∫ 63, p. 16-18. São Paulo: 2007.

GRANDO, Célia R. **O Jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática**. Dissertação de Mestrado. UNICAMP: Campinas, 1995.

JESUS, Marcos Antônio S. de; FINI, Lúcia Diehl T. **Uma proposta de aprendizagem significativa de matemática através de jogos**. In: BRITO, Márcia Regina F. de (Org). Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2005.

KAMII, Constance. **Desvendando a aritmética: Implicações da Teoria de Piaget**; tradução: Marta Rabioglio e Camilo F. Ghorayeb; Revisão Técnica: Marcelo Cestari Lellis- 2. ed. São Paulo: Papirus, 1995.

KISHIMOTO, Tizuko M. O Brinquedo na Educação: Considerações Históricas. In: Série Idéias, n.7. São Paulo: FDE, 1995.

LINS, Rômulo C. **Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática.** In: BICUDO, Maria Aparecida V. ; BORBA, Marcelo de C. Educação matemática: pesquisa em movimento. 2. ed. revisada. São Paulo: Cortez, 2005.

LOPES, Maria da Glória. **Jogos na Educação: Criar, Fazer, Jogar.** 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MEDEIROS, Cleide F. de. **Por uma Educação Matemática como Intersubjetividade.** In: BICUDO, Maria Aparecida V. (Org.) 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba: SEED, 2006.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do. **Matematicativa.** João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, INEP, Compend, 2000.

WATANABE, Renate. **Uma Lenda: Torre de Hanói.** In : HELLMEISTER, Ana Catarina P. (et al). Explorando o Ensino da Matemática: atividades vol. 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

SAVIOLI, ¬ngela M. P. das Dores. Uma **Reflexão sobre a Indução Finita**: relato de uma experiência. Disponível em: <cecemca.rc.unesp.br/ojs/index.php/bolema/articleview/1247/1083-2k- > Acesso em 11/12/2008.