# A Resolução de Problemas como um caminho para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial

**ANGELA MARIA ALVES ANGELI**[1]
**CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA**[2]

## INTRODUÇÃO

O ensino da Geometria tem sido deixado de lado e isso não é recente. Este problema talvez possa ser atribuído a fatores como a formalização excessiva dos conteúdos, a exclusão da disciplina Desenho Geométrico da grade curricular, a falta de laboratórios de Matemática com materiais manipulativos, a diminuição da carga horária na matriz curricular e até mesmo, a formação inadequada dos professores. As dificuldades enfrentadas pelos professores em relação ao ensino da Geometria, em especial no ensino médio, têm gerado grandes discussões não apenas no que se refere a como desenvolvê-lo, mas, também, quanto à necessidade desse conteúdo nas propostas curriculares.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Educação Matemática proposta nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCEs) explicita que para a formação de um estudante crítico, capaz de agir com autonomia nas suas relações sociais, é preciso que ele se aproprie de conhecimentos matemáticos, entre outros.

O Estado do Paraná reconhece a importância da Geometria no Currículo quando especifica que o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

[1] Professor da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná
e-mail: angelaangeli02@gmail.com
[2] Professora do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática – PCM da UEM.
e-mail: clélia@wnet.com.br

Se o ensino da Geometria como um todo não é privilegiado em nossas escolas, existem conteúdos geométricos que são ainda mais discriminados, em função de sua aparente complexidade. É o caso da Geometria Espacial, pois é mais comum o trabalho pedagógico com as figuras planas.

## Geometria Espacial

Ao iniciar o estudo da Geometria Espacial, uma grande ênfase é dada à visualização de situações geométricas e à sua representação no plano. Sem tais habilidades é praticamente impossível desenvolver qualquer trabalho em Geometria.

A Geometria é considerada como uma ferramenta para descrever e interagir com o espaço no qual vivemos, usada em aplicações, tanto tradicionais como inovadoras e talvez a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade. Ela tem sido estimulada grandemente por novas idéias tanto na própria Matemática, como em outras disciplinas, entre elas, a Ciência da Computação, que tem influência em muitos aspectos da nossa vida por sua educação visual. Talvez, melhor que o estudo do espaço, a Geometria seja a investigação do "espaço intelectual" já que embora comece com a visão e a percepção, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido. Atividades de caráter geométrico mudam as atitudes matemáticas dos alunos e a Geometria é um componente importante inclusive no desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, portanto, deve ser trabalhada ao longo de todo o ano.

A Geometria é um tópico natural para encorajar a resolução de problemas e tem muitas aplicações que aparecem no mundo real. É imprescindível que o aluno tenha oportunidade de fazer explorações, representações, construções, discussões, que possibilitem investigar, descobrir, descrever e perceber propriedades para uma aprendizagem significativa. Sua participação na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais das concepções mais atuais de aprendizagem. Esta participação deve ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que esta construção se efetive. Tratar significativamente um conteúdo é dar ênfase ao processo de construção de um conceito, considerando as etapas pelas quais o aluno deverá passar, a fim de reconstruí-lo. Uma ação pedagógica nesses moldes favorece o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas do aluno, tanto na Matemática quanto em sua vida.

A função do professor deve ser a de orientador da aprendizagem, isto é, a de instigador de idéias, de orientador de rumos, num trabalho com erros e acertos. A linguagem utilizada na introdução dos conceitos deve aproximar-se ao máximo, da linguagem do aluno. Cada conceito precisa ser interiorizado pelos estudantes antes de qualquer tentativa de formalização. Uma linguagem matemática precisa é o fim de um processo de aprendizagem e não o início.

Na caracterização das formas geométricas, não se pretende partir de definições, mas sim de objetos concretos encontrados no dia-a-dia. A preocupação básica nos contatos iniciais deve ser o reconhecimento das formas mais freqüentes, a familiarização com uma nomenclatura sumária (faces, vértices, arestas, diagonais), a aprendizagem de representação gráfica de figuras planas e espaciais, da construção e o estabelecimento de relações simples envolvendo os elementos componentes.

A ênfase no aspecto algébrico do ensino da Matemática, sem o complemento proporcionado pelo enfoque geométrico, priva os indivíduos de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento, necessários à resolução dos problemas matemáticos, pois, como coloca Atiyah, (1982; 183), "geometria é a parte da matemática onde o pensamento visual é dominante, enquanto que na álgebra predomina o pensamento seqüencial. Devemos ter como objetivo o cultivo e o desenvolvimento de ambos os tipos de pensamento".

De acordo com Pavanello (1989; 98), "a questão da geometria deve ser vista como um ato político e não somente pedagógico, pois está relacionada com a possibilidade de proporcionar, ou não, iguais oportunidades e condições de acesso a esse ramo do conhecimento".

**Resolução de problemas**

Conforme as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, na Resolução de Problemas, muitas vezes, é preciso levantar hipóteses e testá-las. Dessa forma, uma mesma situação pode ser um exercício para alguns e um problema para outros, a depender dos seus conhecimentos prévios.

Conforme Dante (1997; 43), "Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. Problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução. É importante que o problema possa gerar muitos processos de pensamento, levantar muitas hipóteses e propiciar várias estratégias de solução. O pensar e o fazer criativo devem ser componentes fundamentais no processo de resolução de problemas".

Ao incentivar os alunos na resolução de um problema, o professor deve apresentar sugestões e insinuações, mas nunca apontar o caminho a ser seguido. É melhor transformar as informações, que porventura forneceríamos, em descobertas do aluno orientadas por nós. Alguns segundos de prazer da descoberta valem mais do que mil informações que possam ser transmitidas ao aluno. Este é um processo vagaroso e contínuo, que exige planejamento.

Como abordagem metodológica, optamos pela resolução de problemas por ser esta, dentre as tendências atuais em Educação Matemática, a que mais se aproxima do professor em virtude da clareza de seus objetivos e métodos.

> *[...] ensinar com problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo. Entretanto, há boas razões para se fazer esse esforço: Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre idéias e sobre o dar sentido; desenvolve o poder matemático; permite ir além da compreensão do conteúdo que está sendo construído; desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que matemática faz sentido; provê dados de avaliação contínua que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajudar os alunos a ter sucesso e informar os pais (ONUCHIC & ALLEVATO, 2004; 223).*

Na abordagem de Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas. A Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem.

Para George Polya (1965) "resolver problemas" era o tema mais importante para se fazer matemática, e "ensinar o aluno a pensar" era sua importância primeira. Polya insistia que se tomasse muito cuidado nos esforços feitos para se ensinar a "como pensar" e que, na resolução de problemas, não se transformasse em ensinar "o que pensar" ou "o que fazer", conforme afirma o próprio pesquisador em palestra realizada na Universidade Stanford, nos Estados Unidos, em 1º de agosto de 1944:

> *Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade*

> *e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.*

Adotamos esta tendência metodológica em nosso trabalho por acreditarmos que esta metodologia de ensino contribui de forma especial para uma aprendizagem mais efetiva.

## Contextualização e Descontextualização do Saber

Segundo Guy Brousseau (1996) o matemático não comunica seus resultados tal como os obteve, mas os reorganiza, lhes dá a forma mais geral possível; realiza uma didática prática que consiste em dar ao saber uma forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada, fora de um contexto temporal.

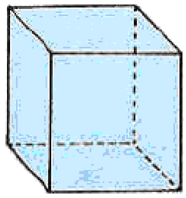
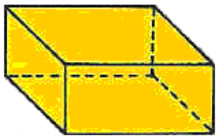
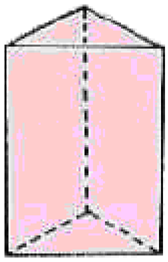
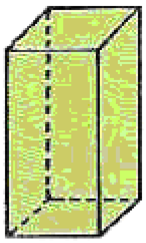
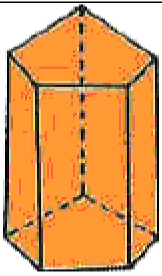
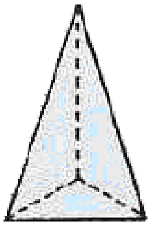
O professor realiza primeiro o trabalho inverso ao do cientista, uma recontextualização do saber: procura situações que dêem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados. Porém, ainda segundo Brosseau (1996), se a fase de personalização funcionou bem, quando o aluno respondeu às situações propostas "não sabia que o que produziu é um conhecimento que poderá utilizar em outras ocasiões". Para transformar suas respostas e seus conhecimentos em saber deverá, com a ajuda do professor, "re-despersonalizar e re-descontextualizar o saber que produziu, para poder reconhecer no que fez algo que tenha caráter universal, um conhecimento cultural reutilizável" (BROSSEAU, 1996; 48).

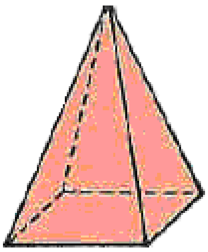
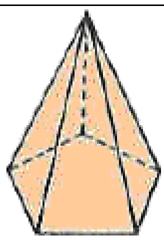
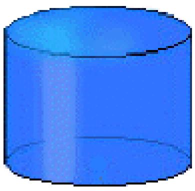
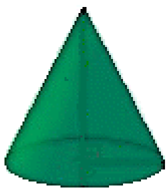
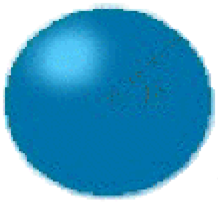
## Sólidos Geométricos

De acordo com os autores Tinoco, Giraldo e Belfort (1999), investigações realizadas com alunos recém-ingressos na universidade mostram que a sua experiência com sólidos geométricos, e, em particular com os poliedros é, geralmente, muito pequena. Alguns identificam os sólidos mais conhecidos, porém não reconhecem suas propriedades.

O trabalho a ser aqui desenvolvido tem como objetivo principal familiarizar os alunos com os poliedros em geral, levando-os a reconhecer as características mais importantes de cada tipo e estabelecer relações entre seus elementos. Ao longo do trabalho, a manipulação dos sólidos, a planificação, a comparação entre eles e as tentativas de representação de cada um são fundamentais.

Dentre os sólidos geométricos mais conhecidos podemos destacar:

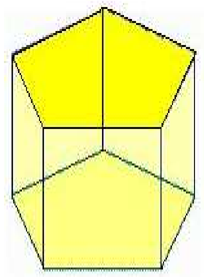
| | |
|---|---|
|  | O **cubo** é um prisma em que todas as faces têm a forma de quadrados. Este sólido geométrico tem: 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. |
|  | O **paralelepípedo** é um prisma em que todas as faces têm a forma de retângulos. Tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. |
|  | O **prisma triangular** tem como bases dois triângulos. Tem 6 vértices, 9 arestas e 5 faces, destas, duas são as bases e as demais são retangulares. |
|  | O **prisma quadrangular** tem bases quadradas. e as demais faces são retângulos. Tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces, destas, duas são as bases e as demais são retangulares. |
|  | O **prisma pentagonal** tem como bases pentágonos. Tem 10 vértices, 15 arestas e 7 faces, destas, duas são as bases e as demais são retangulares |
|  | A **pirâmide triangular** tem como base um triângulo. Tem 4 vértices, 6 arestas, 4 faces, uma é a base, as demais são triangulares.. |

| | |
|---|---|
|  | A **pirâmide quadrangular** tem como base um quadrado. Tem 5 vértices, 8 arestas, 5 faces, uma é a base e as demais são triangulares. |
|  | A **pirâmide pentagonal tem como** base um pentágono. Tem 6 vértices, 10 arestas, 6 faces, uma é a base e as demais são triangulares. |
|  | O **cilindro** - este sólido geométrico é limitado por uma superfície curva e tem duas bases com a forma de circunferências. |
|  | O **cone** é limitado por uma superfície curva. Tem uma base na forma de circunferência e tem 1 vértice. |
|  | A **esfera** é um sólido geométrico limitado por uma superfície curva. Sua forma é esférica; não tem bases, não tem vértices e não tem arestas. |

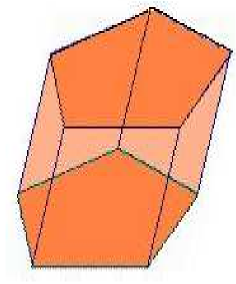
Imagens disponíveis em: <http://www.educ.fc.pt/icm/icm2002/icm2004/solidos_geometricos.htm>

**Estudando mais detalhadamente os prismas e os poliedros regulares**

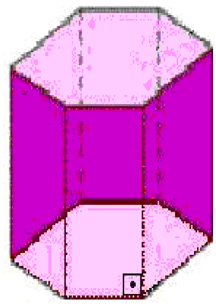
Os prismas são poliedros com duas faces congruentes e paralelas (as bases) e cujas faces restantes (as faces laterais) são paralelogramos. São nomeados de acordo com a natureza de suas bases. Se tiver três lados chama-se triangular, quatro, quadrangular, cinco, pentagonal e etc. Dizemos que são retos se suas faces laterais forem perpendiculares às bases, ou oblíquos, se tal não acontece. Além disso, um prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



Prisma pentagonal reto



Prisma pentagonal oblíquo



Prisma hexagonal regular

Imagens disponíveis em: < http://www.brasilescola.com/matematica/prismas.htm>

**PROBLEMAS:**

1- Entre as figuras abaixo, reconheça os poliedros, justificando suas respostas

Atividade e figuras extraídas do livro Geometria Euclidiana por meio da Resolução de problemas (TINOCO,1999;124)

A figura 5 foi extraída de: <http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial7.php>

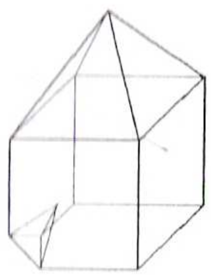


Fig. 1

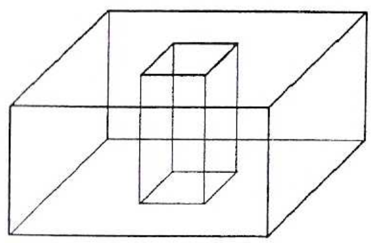


Fig. 2

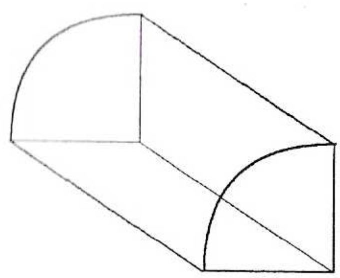


Fig. 3

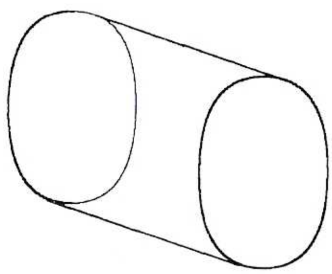


Fig. 4

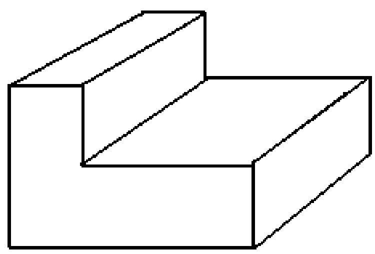


Fig. 5

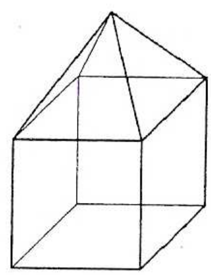


Fig. 6

**Definição**: Poliedro é um sólido totalmente limitado por polígonos que se ligam pelos seus lados, sendo cada um desses lados comum a exatamente dois polígonos. Cada polígono é chamado face do poliedro, os lados de cada face, de arestas e os vértices de cada face de vértices do poliedro.

**Poliedros Regulares**

Os poliedros podem ser regulares ou não. Dizemos que um poliedro é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e, para cada vértice, concorre o mesmo número de arestas.

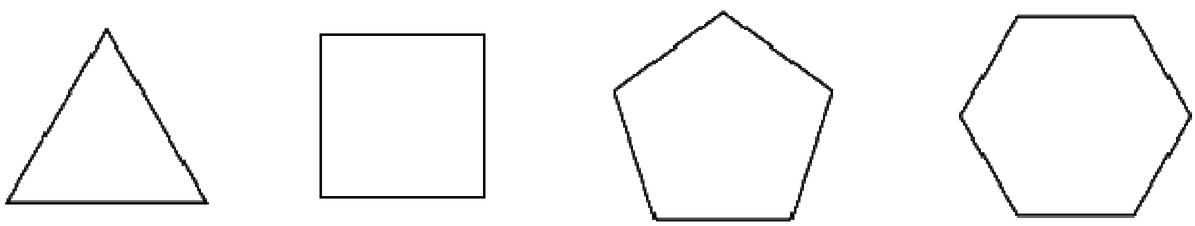
**Poliedros Convexos e Côncavos**

Um poliedro é chamado convexo quando um segmento de reta, unindo quaisquer dois de seus pontos, está totalmente dentro do poliedro. Quando este segmento de reta sai fora do mesmo dizemos que ele é côncavo.

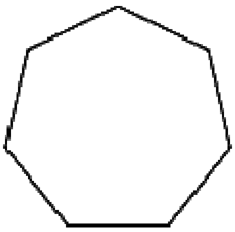
2- Partindo do fato de que existem polígonos regulares, com um número qualquer de lados, a partir de 3, quantos tipos possíveis de poliedros regulares poderão ser construídos?

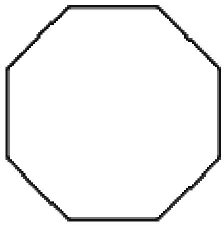
(Atividade baseada na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 2º Grau, 1992; 400)

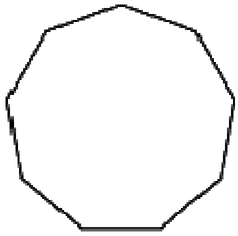
- Objetivo: Identificar quantos e quais são os poliedros regulares convexos possíveis de serem construídos.
- Material: Cartolina, régua, compasso, transferidor, tesoura e fita adesiva.
- Metodologia: Trabalho em grupo de 5 ou 6 alunos para a confecção de polígonos regulares.

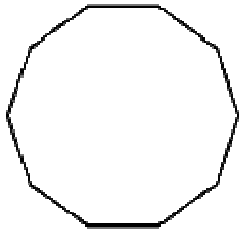


Triângulo eqüilátero　Quadrado　Pentágono regular　Hexágono regular


Heptágono regular

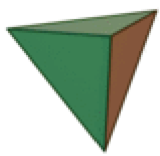
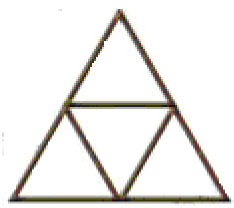
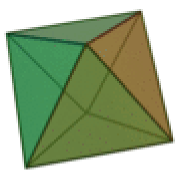
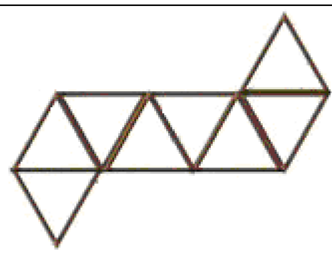

Octógono regular

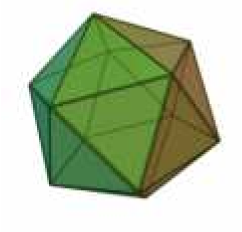
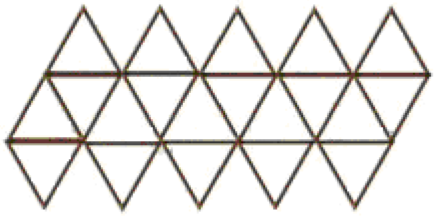

Eneágono regular


Decágono regular

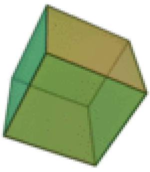
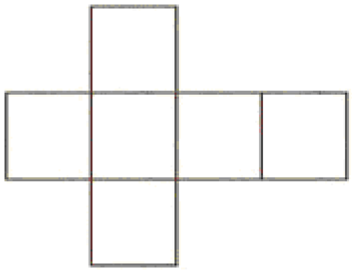
- **Contextualizando**: Construir vários polígonos regulares de cada tipo (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, etc.) com 5 cm de lado, determinar as medidas de seus ângulos internos e recortá-los. Constatar que para formar um "bico", isto é, um vértice de um poliedro, é necessário reunir no mínimo 3 polígonos, pois com menos, não se consegue fechar esse "bico" e a soma dos ângulos das 3 faces concorrentes deve ser inferior a 360º, ou seja, menor que uma circunferência. Utilizando apenas polígonos regulares idênticos, decorre, imediatamente, que não podemos utilizar hexágonos, nem polígonos com mais de seis lados, pois as somas de seus ângulos internos ultrapassam a circunferência que é de 360º e, portanto, restam os triângulos, os quadrados e os pentágonos.

Com triângulos, é possível reunir 3 por vértice (180º), 4 por vértice (240º) ou mesmo 5 por vértice (300º), mais que 5 completaremos 360º ou mais, não constitui vértice; prosseguindo vértice a vértice em cada caso, construímos o tetraedro (4 faces), o octaedro (8 faces) e o icosaedro (20 faces), respectivamente.

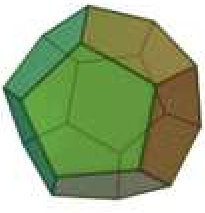
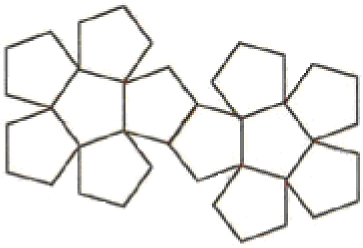
| Poliedro | Faces | Vértices | Arestas | Planificação |
|---|---|---|---|---|
|  Tetraedro | 4 | 4 | 6 |  |
|  Octaedro | 8 | 6 | 12 |  |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
|  Icosaedro | 20 | 12 | 30 |  |

. Com quadrados, não é possível reunir mais do que 3 por vértice (270º), pois com mais que 3 atingiremos 360º que é uma circunferência; construindo vértice a vértice, obtemos o cubo ou hexaedro (6 faces).

| Poliedro | Faces | Vértices | Arestas | Planificação |
|---|---|---|---|---|
|  Cubo ou Hexaedro | 6 | 8 | 12 |  |

. Com **pentágonos**, reunidos 3 por vértice (324º), obtemos um poliedro regular de 12 faces – o **dodecaedro**. Não é possível reunir mais do que 3 pentágonos por vértice porque ultrapassamos 360º.

| Poliedro | Faces | Vértices | Arestas | Planificação |
|---|---|---|---|---|
|  Icoságono | 12 | 20 | 30 |  |

As figuras dos poliedros foram extraídas de: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro#Poliedros_regulares>.
As planificações foram extraídas de: <http://paginas.terra.com.br/educacao/matematicaeorigami/solidos.html>.

- **Descontextualizando**: Não é possível construir outros poliedros utilizando apenas polígonos regulares idênticos e com todos os vértices do mesmo formato, pois dessa forma em cada vértice ultrapassaríamos os 360º, que é uma circunferência.

Na conceituação de poliedros regulares é interessante montar poliedros não regulares com 6 ou 10 triângulos eqüiláteros, como contra-exemplos. Esses poliedros possuem as mesmas faces regulares, porém vértices de formato diferentes.

É interessante, ainda, formar poliedros não regulares cujos vértices são compostos de polígonos diferentes, por exemplo:

- 1 triângulo e 2 hexágonos;
- 1 triângulo, 1 hexágonos e 1 quadrado;
- 2 triângulos, 1 quadrado e 1 pentágono.

Podemos perceber que, além dessas possibilidades, existem outras combinações possíveis utilizando esses polígonos regulares.

**Conclusão**: Como pudemos constatar apenas cinco poliedros regulares podem ser construídos a partir de polígonos regulares.

**Poliedros de Platão**

Os poliedros - tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro - ficaram conhecidos na história como **Poliedros de Platão,** pelo fato de Platão ter construído suas teorias a respeito da origem do universo, associando a estes os constituintes fundamentais da natureza. Platão professava que Deus criou o mundo a partir de quatro elementos básicos: a terra, o fogo, o ar e a água. Ele procurou, então, definir as essências específicas desses elementos através de quatro objetos geométricos, os poliedros convexos regulares, que representavam, aos olhos dos gregos, harmonia e certa perfeição.

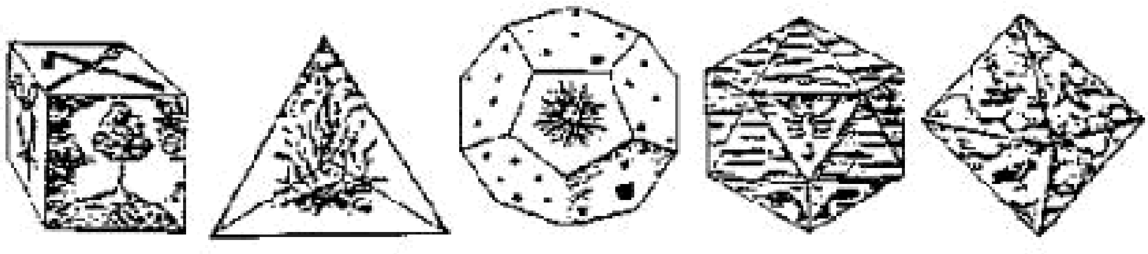
. a terra, o elemento mais imóvel, Platão associou ao cubo, o único poliedro com faces quadradas, e dessa forma, o mais apto a garantir estabilidade;

. o fogo ele atribuiu ao tetraedro, que é o poliedro mais "pontudo", com arestas mais cortantes, com menor número de faces e de maior mobilidade;

. a água e o ar, que são de mobilidade crescente e intermediária entre a terra e o fogo, ele atribuiu respectivamente ao icosaedro e ao octaedro.

.Com o tempo, aparece o quinto e último poliedro regular convexo: o dodecaedro. Platão explicita suas idéias sobre o quinto elemento: o cosmos, que segundo ele seria a "alma do mundo”.

**Poliedros Regulares e as Associações de Platão**



Cubo (Terra); Tetraedro (Fogo); Dodecaedro (Cosmos); Icosaedro (Água); Octaedro (Ar)

Poliedros de Platão texto e figuras extraídas de:
< http://www.es.cefetcampos.br/poliedros/modules/xt_conteudo/index.php? id=4>.

3- Estão no canto do teto de uma sala em forma de bloco retangular de dimensões 6m (largura), 10m (comprimento) e 4m (altura), uma abelha e uma formiga. No canto oposto desta sala no chão, está um doce de leite. Supondo que essa abelha e essa formiga adoram doce de leite, achar o menor caminho que a abelha e a formiga procurarão fazer para atingirem o doce de leite.
(Atividades e figuras extraídas da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática - 2º Grau, 1992; 400)

-Objetivo: Levar o aluno a visualizar situações cotidianas, discutir, raciocinar, expor idéias, abstrair conceitos, calcular, e generalizar fórmulas.

-Material: Caixas em forma de bloco retangular, régua, lápis coloridos e tesoura.

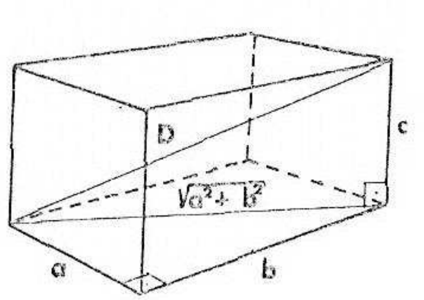
-Metodologia: Trabalho em grupos de 5 alunos para análise e discussão da situação proposta.

-**Contextualizando**: A discussão do problema poderá se apoiar em “modelos” como as próprias salas de aula, que em geral têm a forma de paralelepípedo retângulo, ou mesmo em um sólido geométrico desta forma, com dimensões proporcionais à sala em que estão a abelha e a formiga. Serão úteis também as representações planas de paralelepípedos retângulos e as planificações destes sólidos geométricos como suporte concreto na discussão dessas questões.

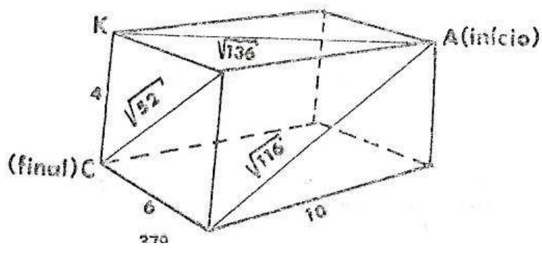
A solução para a abelha surge rapidamente, com o cálculo da diagonal do prisma, pois a abelha pode voar. Cabe aqui uma discussão sobre a utilização do Teorema de Pitágoras duas vezes na obtenção da diagonal desta sala. Neste caso, uma diagonal da face, que foi obtida por esse teorema, passa a ser o cateto no cálculo da diagonal da sala. Assim o caminho da abelha pode ser calculado por $\sqrt{6^2+10^2+4^2} \cong$ 12,33 m.

Genericamente, o cálculo da diagonal de qualquer prisma desta forma será:

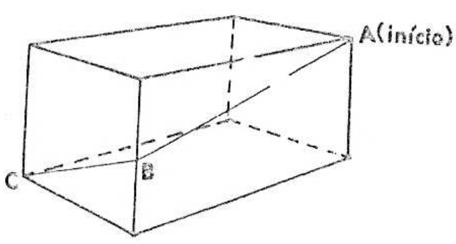
D = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$




A obtenção do caminho da formiga passa pela única possibilidade que este inseto tem de caminhar pelas paredes da sala, faces do prisma, ou pelas arestas deste. Peça aos alunos que pensem em soluções para o caminho da formiga. É possível que de início eles proponham caminhos equivalentes, utilizando apenas as arestas do prisma. Faça o cálculo desses caminhos. Em seguida, os alunos costumam sugerir que o menor caminho é uma combinação de uma diagonal de face (inclusive o teto) e uma aresta. Nesta combinação de diagonal e aresta existem três possibilidades distintas. É interessante calculá-las para se determinar a menor delas. Esses caminhos valem aproximadamente $d_1$ = 15,66 m, $d_2$ = 16,77 m e $d_3$ = 17,21, pois, por exemplo, o caminho $d_1$ = AK + KC, ou seja, $d_1 = \sqrt{136} + 4 \cong$ 15,66 m



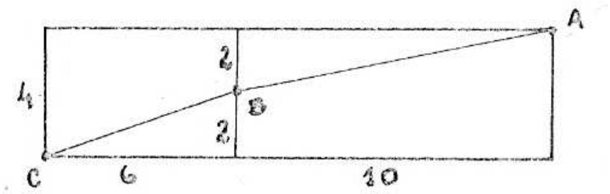

Porém esses não são os caminhos menores para a formiga. Incentive os alunos a procurar caminhos que passam somente pelas faces, sem usar as arestas. Assim poderá surgir um caminho utilizando duas faces, como no esquema seguinte:



Escolhendo, por exemplo, o ponto B da trajetória da formiga, como ponto médio de uma aresta de medida 4 m, temos o caminho $d_4$ = AB + BC. Apoiando-se sobre a planificação das duas faces, suporte deste caminho, temos:

AB = $\sqrt{2^2 + 10^2} \cong$ 10,20 m

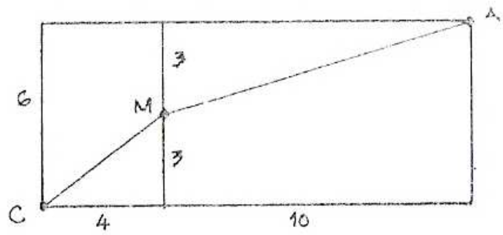
BC = $\sqrt{2^2 + 6^2} \cong$ 6,32 m




Assim, o caminho $d_4$ = AB + BC $\cong$ 16,52 m, ainda maior que o caminho $d_1$. Será o caminho $d_1$ o menor deles?

Continuando a pesquisa de caminhos, somente pelas faces e não arestas. Em outras duas faces temos:

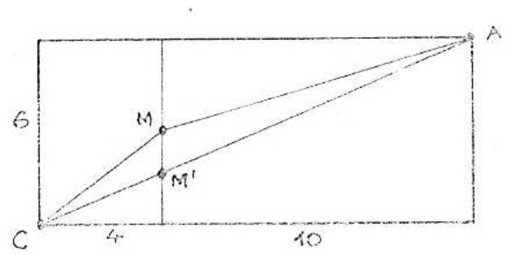
AM $\cong$ 10,44 m MC = 5 m




Assim, o caminho $d_5$ = AM + MC $\cong$ 15,44 m é o menor de todos até agora pesquisado. Será que se os pontos AMC fossem alinhados não teríamos um caminho $d_6$ menor que $d_5$? De fato calculemos o caminho AM'C sobre as faces 6 . y e 6 . 10.

$d_6$ = AM' + M'C = AC

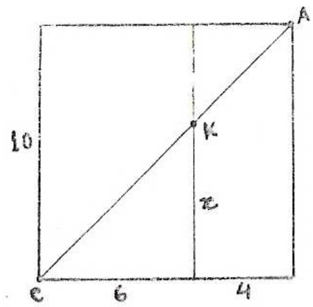
$d_6$ = $\sqrt{14^2 + 6^2} \cong$ 15,23 m




Será que a composição das duas outras faces, ainda não consideradas, não daria uma solução melhor? Pois é, é a matemática do dia-a-dia querendo otimizar soluções! E, parece que nesse caso não tem fim. Continuemos. Agora utilizando outras duas faces da sala.

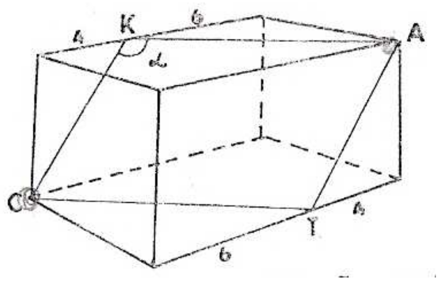
$d_7 = AK + KC + AC$

$d_7 = \sqrt{10^2 + 10^2} \cong 14{,}14$ m




Parece que a melhor solução se dará quando a formiga caminhar em linha reta pelas faces 10 x 6 e 10 x 4. Poderá surgir aqui o interesse em determinar a posição do ponto K. Por semelhança de triângulo temos: $\frac{x}{10} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = 6m$

Neste ponto K a formiga irá cruzar uma das arestas que mede 10 m desta sala.




Os caminhos AKC e ATC são equivalentes de medida d7 $\cong$ 14,14 m.

Ainda, na busca de novas situações relacionadas com esse problema, cujas resoluções proporcionam a aprendizagem de conceitos geométricos, proponha aos alunos que determinem os ângulos do triângulo AKC, ou ainda a área desse triângulo.

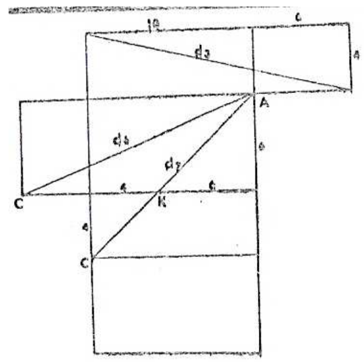
Por ora, vamos discutir com os alunos, uma forma mais breve e genérica para obter o menor caminho da formiga, sem termos que passar toda vez por este extenso, porém rico, processo de discussão envolvendo Geometria e Álgebra integradamente.

Para apoiarmos a discussão do melhor caminho da formiga vamos utilizar genericamente planificações do paralelepípedo retângulo, pois a formiga só utiliza planos para se locomover.

$d_6 \cong 15{,}23$ m

$d_7 \cong 14{,}14$ m

$d_8 \cong 16{,}49$ m



-**Descontextualizando**: Uma ação de professores, pesquisadores e cientistas que se utilizam de matemática no seu dia-a-dia, pode refletir uma característica dos seres humanos, que têm por objetivo buscar soluções ótimas para as questões que lhe são apresentadas.

Assim, passaremos a generalizar este problema a partir de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c. Os menores caminhos da formiga que são obtidos pela utilização do Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos de catetos a e (b + c), b e (a + c) e c e (a + b). Assim sendo, as três soluções são x, y e z, a saber:

x = $\sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}$

y = $\sqrt{b^2 + (a+c)^2} = \sqrt{b^2 + a^2 + c^2 + 2ac}$

z = $\sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{c^2 + a^2 + b^2 + 2ab}$

Todas essas soluções contêm uma parcela igual, dada por $a^2 + b^2 + c^2$ e diferem pelos produtos ab, bc ou ac. Tendo em vista a forma genérica de obtenção destas distâncias, podemos afirmar que a menor delas será definida pelo menor produto entre as dimensões do bloco retangular, quando efetuado duas a duas (o menor produto entre ab, ac e bc).

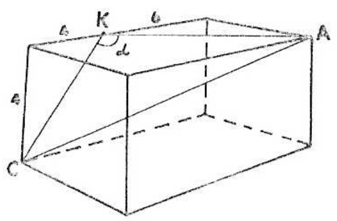
Por exemplo, para uma sala de dimensões 3 m, 4 m e 5 m, como se determina o melhor caminho para a formiga?

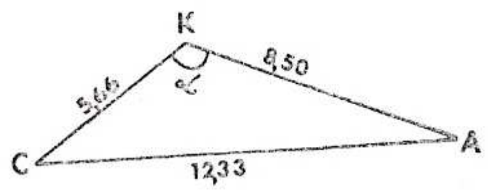
Como o menor produto entre duas dimensões desta sala é 3 x 4 = 12, então o caminho mínimo será percorrido pelas faces 3 x 5 e 4 x 5.

Uma vez determinado rapidamente o caminho da formiga ficou o problema dos ângulos do triângulo AKC (o menor caminho para a sala de 6 m x 8 m x 10 m), bem como a área desse triângulo.

É útil determinar pelo menos o ângulo de vértice K, do triângulo AKC. Pode parecer para alguns alunos que esse triângulo é retângulo em K, pelo fato de a formiga passar de uma face à outra, perpendiculares entre si.

AK = $\sqrt{72}$ CK = $\sqrt{32}$ AC = $\sqrt{152}$




Construindo o triângulo AKC com medidas proporcionais aos seus lados, podemos obter a medida do ângulo $\alpha$, com auxílio de um transferidor, em torno de 120º.

Com auxílio de uma calculadora científica (ou tabelas trigonométricas), Lei dos Cossenos e de rudimentos de trigonometria, poderemos obter o valor do ângulo.

$12{,}33^2 = 5{,}66^2 + 8{,}50^2 - 2 \,.\, 5{,}66 \,.\, 8{,}50 \,.\, \cos\alpha$

$\cos\alpha \cong -0{,}4962$

$\alpha = 119{,}75^\circ$

De forma similar podemos achar os demais ângulos do triângulo AKC e concluir que ele é obtusângulo justamente no vértice K, por onde a formiga poderá passar de uma parede para a outra.

Das questões propostas nesta atividade, resta-nos somente discutir o valor da área do triângulo AKC.

Utilizando a fórmula de Heron, podemos calcular a área do triângulo AKC, conhecendo-se os seus três lados.

S = $\sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$

onde a, b e c são as medidas dos lados do triângulo e p o seu semiperímetro. Assim,

$S = \sqrt{13{,}24.(13{,}24-12{,}33).(13{,}24-8{,}50).(13{,}24-5{,}66)}$

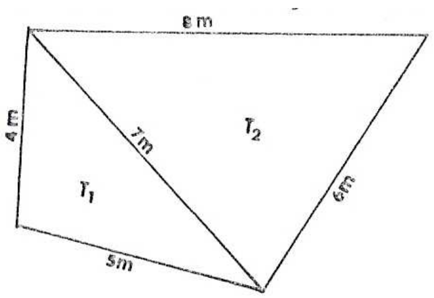
$S = \sqrt{13{,}24.0{,}91.4{,}74.7{,}58}$

$S = 20{,}80\ m^2$

**Heron de Alexandria -** (10 d.C. - 70 d.C.) foi um sábio do começo da era cristã. Geômetra e engenheiro grego. É especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área do triângulo. Seu trabalho mais importante no campo da geometria, *Metrica* (versa sobre a medição de figuras simples de planos sólidos, com prova das fórmulas envolvidas no processo), permaneceu desaparecido até 1896. Também lhe são atribuídas invenções de diversas máquinas, entre as quais a fonte de Herão e a eolípila (aparelho para a medição dos ventos).

Texto extraído de: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Heron_de_Alexandria>

A fórmula de Heron tem a vantagem de nos fornecer a área de qualquer triângulo em função de seus lados, sem precisarmos conhecer uma de suas alturas e o lado relativo a essa altura. Esta fórmula nos permite obter rapidamente a área de um terreno de forma quadrangular, quando se conhece os seus lados e uma de suas diagonais. Outros terrenos, em forma de polígono qualquer, poderão sempre ser divididos em triângulos. Por exemplo, achar a área do seguinte terreno quadrangular de lados 4 m, 5 m, 6 m, 8 m e uma diagonal 7 m.




Sua área será dada pela soma das áreas de dois triângulos que compõem o quadrilátero

$T_1$ = triângulo de lados 4, 5, e 7 m

$T_2$ = triângulo de lados 6, 7 e 8 m

Área $T_1 = \sqrt{8.(8-4).(8-5).(8-7)} \cong 9{,}79m^2$

Área $T_2 = \sqrt{10{,}5.(10{,}5-6).(10{,}5-7).(10{,}5-8)} \cong 20{,}33m^2$

Área do terreno = $A_{T1} + A_{T2} \cong 30{,}12\ m^2$

**OBSERVAÇÕES FINAIS:**

Esta é uma proposta de trabalho que tem a intenção de subsidiar o professor em sua busca de idéias que possibilitem melhorar o desenvolvimento de suas aulas visando atender as Diretrizes Curriculares do Paraná dentro das atuais tendências didático-pedagógicas, em particular a Resolução de Problemas.

O que se teve em vista ao operacionalizar esta proposta foi a proposição de uma nova abordagem para a Geometria Espacial (Sólidos Geométricos-Poliedros). Esta abordagem deve assegurar a criação de um ambiente de maior comunicação em sala de aula, a qual permitirá maior participação do aluno na elaboração de seu conhecimento.

## REFERÊNCIAS:


BATISTA, Silvia e BARCELOS, Gilmara. Sólidos Platônicos. In: **TIC no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática.** Disponível em: <http://www.es.cefetcampos.br/poliedros/modules/xt_conteudo/index.php?id=4>. Acesso em nov 2007 às 10:00 h.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C. SAIZ, I. (orgs.). **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática:** 1ª a 5ª séries. São Paulo: Ática, 1997.

**Geometria Espacial**. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/ espacial/espacial7.php>. Acesso em: nov 2007 às 14:00 h.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. BORBA M. C. (orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesco, 1999.

PARANÁ. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**. Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação, Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2006.

PAVANELLO, R. M. **O Abandono do Ensino de Geometria:** uma visão histórica. Campinas, 1989. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

PINTO, Paulo R. **Notas sobre Sólidos Platónicos e Simetrias**. Disponível em: <http://www.math.ist.utl.pt/~ppinto/plato5.htm>. Acesso em 29 nov 2007 às 13:20 h.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

**Prismas.** Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/prismas.htm.> Acesso em nov 2007 às 9:15 h.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 2º Grau**. 3.ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

**Sólidos Geométricos.** Disponível em: < http://paginas.terra.com.br/educacao/matematica eorigami/ solidos.html>. Acesso em nov 2007 às 15:40 h.

TINOCO, L. A. A. **Geometria Euclidiana por meio da Resolução de Problemas.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 1999.

WIKIPÉDIA. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title= Poliedro&oldid=8532901>. Acesso em: nov 2007 às 10:30 h.

WIKIPÉDIA. Desenvolvido pela Wikimedia Foundation. Apresenta conteúdo enciclopédico. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title= Heron_de_Alexandria&oldid=8884558>. Acesso em: nov 2007 às 13:10 h.