A Resolução de Problemas como um caminho para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial

ANGELA MARIA ALVES ANGELI[1]
CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA[2]

RESUMO

A escolha do tema do objeto de estudo surgiu de situações práticas vivenciadas em sala de aula, com a constatação de que determinados conteúdos de Geometria não são abordados. Especificamente optamos pela Geometria Espacial no Ensino Médio, visto que as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCEs) propõe os conteúdos estruturantes: Números e Álgebra, Geometrias, Medidas, Funções e Tratamento da Informação, e recomendam que estes devam ser abordados por meio das tendências em Educação Matemática, dentre elas: História da Matemática; Etnomatemática; Resolução de Problemas; Modelagem Matemática; e Mídias Tecnológicas. Este trabalho, que adota a resolução de problemas como estratégia metodológica inicia pelo estudo dos principais sólidos geométricos, e vai estreitando para focalizar mais precisamente os poliedros. Com o uso de materiais concretos, os alunos constroem vários tipos de poliedros e após análises e comparações, os classificam e identificam os que são regulares compreendendo, assim, o motivo de existirem apenas cinco, os conhecidos como de Platão. A partir daí resolvem problemas que desafiam o conhecimento adquirido. Alguns problemas são propostos para serem, discutidos e resolvidos em grupos. Após o término da questão proposta, os grupos devem expor os resultados. O professor promove uma discussão sobre a forma de como cada grupo chega ao resultado final, propiciando uma comunicação e maior confiança na elaboração de novos conceitos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Geometria Espacial. Poliedros. Sólidos Geométricos.

[1] Professor da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná
e-mail: angelaangeli02@gmail.com
[2] Professora do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática – PCM da UEM.
e-mail: clélia@wnet.com.br

ABSTRACT

The choice of the theme of the object of study arose from practical situations experienced in the classroom, with the observation that certain content of geometry are not addressed. Specifically chose to Space Geometry in high school, since the Curriculum Guidelines for Basic Education of Parana (DCEs) proposes structuring the content: Numbers and Algebra, Geometry, measures, Function and Treatment of Information, and recommend that these should be addressed through trends in Mathematics Education, among them: History of Mathematics; Ethnomathematics; Troubleshooting; Mathematical Modeling and Media Technology. This work, which adopts the resolution of problems and methodological strategy starts from the study of geometric solid leading, and going close to focus more precisely the polyhedra. With the use of concrete materials, students build various types of polyhedra and after analysis and comparison, the classify and identify those who are regular understanding, thus the reason there are only five, known as the Plato. From then solve problems that defy the knowledge acquired. Some problems are to be proposed, discussed and solved in groups. After the proposed issue, the groups must explain the results. The teacher promotes a discussion on how to how each group comes to an end result, providing a communication and greater confidence in the development of new concepts.

Key words: Troubleshooting. Space geometry. Polyhedra. Solid Geometry.

INTRODUÇÃO

A proposta das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCEs) para a Educação Matemática explicita que para a formação de um estudante crítico, capaz de agir com autonomia nas suas relações sociais, é preciso que ele se aproprie de conhecimentos matemáticos, entre outros, por entender que a Matemática é uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna. Ainda segundo as DCEs, apropriar-se dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para a formação do futuro cidadão que se engajará no mundo do trabalho, das relações sociais, culturais e políticas, pois a Matemática está presente em praticamente tudo, com maior ou menor complexidade.

No que se refere à educação matemática, as DCEs recomendam que a Matemática deve ser entendida sob dois aspectos: como linguagem das ciências a serviço das demais disciplinas, proporcionando a descrição de relações entre fatos e grandezas que poderão ser interpretadas e analisadas através de sua representação matemática; e como ciência, com sua forma de organizar os conceitos e as técnicas e de propor e resolver situações-problema.

De acordo com as DCEs a **Resolução de Problemas** é uma metodologia pela qual o estudante terá oportunidade de aplicar conhecimentos matemáticos já adquiridos em novas situações de modo a resolver a questão proposta. Para resolver problemas é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas.

O principal objetivo para a educação matemática deve ser, portanto, mostrar a Matemática em todas as suas dimensões proporcionando aprendizagens valiosas e transformadoras.

No Ensino Médio, etapa de escolaridade objeto de nosso estudo é importante que a Matemática seja trabalhada gradativamente também como um sistema abstrato de idéias, extrapolando os contextos de aplicação concreta, pois é hora de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos até então.

A Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigações e de linguagem e com papel integrador importante perante as demais Ciências da Natureza. No Ensino Médio ela deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação do jovem que contribui para a construção de uma visão de mundo para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

GEOMETRIA

A palavra Geometria significa, em grego, medir a Terra. Os povos que viviam às margens dos grandes rios como o Nilo, o Eufrates e o Ganges, tinham necessidade de delimitar, demarcar e quantificar as superfícies alagadas pelas enchentes, bem como de calcular custos e impostos relativos às áreas dessas superfícies. Dessa forma, podemos perceber que a Geometria teve sua origem em atividades práticas originadas pelas necessidades dos povos: pelo traçado das formas, pelas medidas de comprimento, área e volume.

Foi com o matemático grego Euclides (por volta do século III a.C.) que a Geometria realmente se desenvolveu, fazendo da cidade egípcia de Alexandria, onde ele vivia o centro mundial da Geometria. Sua famosa obra, *Os Elementos*, composta de treze livros é um tratado sobre Geometria e teoria dos números. Expõe a Geometria partindo de axiomas e postulados, não-demonstráveis, mas essenciais para a estrutura desse estudo. Apresenta a Geometria de uma forma lógica, organizada partindo de algumas suposições simples e desenvolvendo-se por raciocínio lógico. Euclides organizou tudo o que na época se sabia sobre a Geometria. Até hoje a geometria euclidiana tem papel importante em vários campos da ciência.

O Estado do Paraná reconhece a importância da Geometria no Currículo quando especifica que seu estudo deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

A Geometria é um tópico natural para encorajar a resolução de problemas e tem muitas aplicações que aparecem no mundo real, por exemplo: nos projetos de edifícios, pontes, estradas, carros e aviões; na navegação aérea e marítima; na balística; no cálculo do volume de areia, cimento e água; nos moldes de costura, etc. Além de nos ajudar na compreensão das coisas do mundo concreto, a Geometria abre-nos a possibilidade de criar imagens ilusórias e de imaginar mundos abstratos, frutos da fantástica capacidade de criação do cérebro humano.

GEOMETRIA ESPACIAL

Ao iniciar o estudo da Geometria Espacial, uma grande ênfase é dada à visualização de situações geométricas e à sua representação no plano. Sem tais habilidades é praticamente impossível desenvolver qualquer trabalho em Geometria.

A Geometria é considerada como uma ferramenta para descrever e interagir com o espaço no qual vivemos, usada em aplicações, tanto tradicionais como inovadoras e talvez a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade. Ela tem sido estimulada grandemente por novas idéias tanto na própria Matemática, como em outras disciplinas, entre elas, a Ciência da Computação, que tem influência em muitos aspectos da nossa vida por sua educação visual.

Talvez, melhor que o estudo do espaço, a Geometria seja a investigação do "espaço intelectual" já que embora comece com a visão e a percepção, ela caminha em direção ao pensamento, vai do que pode ser percebido para o que pode ser concebido. Atividades de caráter geométrico mudam as atitudes matemáticas dos alunos e a Geometria é um componente importante inclusive no desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, portanto, deve ser trabalhada ao longo de todo o ano, não ficando, como habitualmente, relegada à última unidade do ano escolar.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Conforme as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, na Resolução de Problemas, muitas vezes, é preciso levantar hipóteses e testá-las. Dessa forma, uma mesma situação pode ser um exercício para alguns e um problema para outros, a depender dos seus conhecimentos prévios.

Para Onuchic e Allevato (2004), "ensinar com problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo". Entretanto, a Resolução de problemas desenvolve a compreensão do aluno através de seu próprio raciocínio e a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido, propiciando uma avaliação contínua, a qual será usada em benefício do aluno e até mesmo do professor.

A Resolução de Problemas deve constituir o eixo organizador do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. O seu papel é fundamental para auxiliar o aluno na apreensão dos significados, visto que é uma habilidade cada vez mais presente em nosso dia-a-dia. A maior parte de nossa atividade pensante se ocupa em definir um objetivo e buscar os meios mais adequados para alcançá-lo.

Para que uma situação seja considerada um problema, é necessário que haja alguma dificuldade, um obstáculo a ser superado. Porém, não pode ser tão difícil para que o aluno se sinta incapaz de tentar resolvê-lo, mas nem tão fácil, a ponto de ser ignorado como tal. Um problema pode parecer fácil para uns e difícil para outros, a partir do conhecimento prévio e do raciocínio exigidos para a sua compreensão, ou seja, essa diferença pode estar em conhecer-se ou não um outro problema anteriormente resolvido, que tenha a mesma incógnita.

Consideramos um problema como um desafio intelectual que mobiliza o interesse do aluno, levando-o a raciocinar, estruturar e desenvolver estratégias para resolver, analisar e comparar o resultado obtido.

O problema pode ser simples, mas se desafiar ou aguçar a curiosidade do aluno e este conseguir chegar ao objetivo proposto, por seus próprios méritos, experimentará uma satisfação pessoal, gerando autoconfiança que despertará o gosto pelo trabalho mental, aperfeiçoando sua capacidade de pensar e agir matematicamente. Devemos valorizar a Resolução de Problemas partindo de situações concretas vivenciadas no cotidiano do aluno, procurando estabelecer relação com os conteúdos anteriores e até mesmo com outras disciplinas visando a percepção do caráter utilitário do conteúdo matemático, reconhecendo a importância e a abrangência da Matemática como linguagem de expressão científica.

A Resolução de Problemas deve ser uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se podem aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Na resolução dos problemas o professor deve explorar ao máximo a capacidade de produção independente do aluno, proporcionando-lhe meios para que o mesmo adquira tal habilidade, na maior intensidade possível, auxiliando-o, discreta e naturalmente, sem que ele perceba.

Segundo Dante

> A capacidade dos alunos para resolver problemas desenvolve-se ao longo do tempo, como resultado de um ensino

> prolongado, de várias oportunidades para a resolução de muitos tipos de problemas e do confronto com situações do mundo real. Ao avaliar essa capacidade dos alunos é importante verificar se eles são capazes de resolver problemas não padronizados, de formular problemas a partir de certos dados, de empregar várias estratégias de resolução e de fazer a verificação dos resultados, bem como a generalização deles (DANTE, 2008; 30).

A participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais das concepções mais atuais de aprendizagem. Esta participação deve ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que esta construção se efetive de forma significativa.

Tratar significativamente um conteúdo é dar ênfase ao processo de construção de um conceito, considerando as etapas pelas quais o aluno deverá passar, a fim de reconstruí-lo. Nesse sentido, a função do professor muda de comunicador de conhecimento para a de observador, consultor, organizador, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem, isto é, torna-se um instigador de idéias, de orientador de rumos, num trabalho com erros e acertos.

A linguagem utilizada na apresentação dos conceitos deve aproximar-se ao máximo, da linguagem do aluno. Cada conceito precisa ser interiorizado pelos estudantes antes de qualquer tentativa de formalização. Uma linguagem matemática precisa é o fim de um processo de aprendizagem e não o início. Uma ação pedagógica nesses moldes favorece o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas do aluno, tanto na Matemática quanto em sua vida.

De acordo com Polya

> Ensinar a resolver problemas é educar a vontade. Na resolução de problemas que, para ele, não são muito fáceis, o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, a apreciar pequenos progressos, a esperar pela idéia essencial e a concentrar todo o seu potencial quando esta aparecer. Se o estudante não tiver, na escola, a oportunidade de se familiarizar com as diversas emoções que surgem na luta pela solução, a sua educação matemática terá falhado no ponto mais vital (POLYA, 2006; 131).

IMPLEMENTAÇÃO NA ESCOLA

A intervenção foi realizada no Colégio Estadual Campina da Lagoa, trabalhando-se em duas turmas de forma diferenciada. Em uma, trabalhamos conteúdos de Geometria Espacial da maneira tradicional, entendida aqui como a apresentação de esquemas, definições, explicações e exercícios em sala de aula e, em outra turma, desenvolvendo atividades mediante a estratégia metodológica da Resolução de Problemas.

Na turma em que realizamos nossa intervenção, a partir da resolução de problemas propostos pela professora para serem resolvidos em grupo, os alunos elaboravam seus conhecimentos, sempre mediados pela ação da professora e instigados por perguntas desafiadoras que os conduziam aos resultados teóricos. Ao final do processo, professora e alunos sistematizavam o conhecimento construído e a professora, por sua vez, fazia uma análise comparativa do desenvolvimento e aprendizagem dos alunos das duas turmas envolvidas no processo.

A primeira dificuldade surgiu quando constatamos que a maioria dos alunos não conhecia os tópicos principais da Geometria Plana. Como falar de sólidos geométricos ou de poliedros, quando muitos alunos não sabem o que é um polígono? Por isso, primeiro foi necessário subsidiar os alunos com os conteúdos básicos de Geometria Plana. Isto foi feito por meio de pesquisa em livros, intra e extraclasse e também na internet, divididos os itens por grupos de alunos. Feito isto, os grupos apresentavam os resultados de suas pesquisas para seus colegas de turma e a professora esclarecia dúvidas e complementava as informações, de acordo com a necessidade.

Foi necessário até mesmo trabalhar com cálculo de perímetros e áreas de figuras planas, apótemas de polígonos regulares e construção de ângulos com o uso do transferidor, para só então iniciar o estudo dos sólidos geométricos.

Sempre partindo de pesquisa sobre o conteúdo específico previamente determinado pela professora, os alunos, na sala de aula, reunidos em grupos pré-determinados, traziam suas contribuições a respeito do assunto. Posteriormente, a professora lançava a questão e os grupos tentavam resolver utilizando o conhecimento prévio adquirido em séries anteriores ou mesmo na pesquisa recente.

Uma das atividades consistiu na apresentação de figuras espaciais entre as quais os alunos deveriam identificar as que caracterizavam poliedros, justificando as respostas. O resultado dessa atividade foi surpreendente e, a principio negativo, pois ficou claro para a professora que todos os alunos já tinham em mente a compreensão do significado da questão, mas apenas um, dos seis grupos, respondeu e justificou corretamente a atividade proposta. Por outro lado, os erros cometidos, propiciaram uma discussão proveitosa e significativa, que foi relevante na aquisição da aprendizagem, visto que, a análise de cada interpretação errônea produzia um pensamento diferente, vindo a contribuir significativamente, com a construção de cada conceito sistematizado. Depois disso, uma atividade semelhante foi proposta e o resultado foi satisfatório, caracterizando, assim, o aprendizado.

Definido o conceito de poliedro, aprofundamos o estudo deste sólido, classificando-os em regulares, não-regulares, convexos ou côncavos e em função do número de faces, sempre procurando instigar a curiosidade do aluno.

A problematização apresentada para esse estudo foi: partindo do fato de que existem polígonos regulares, com um número qualquer de lados, a partir de três, quantos tipos possíveis de poliedros regulares poderão ser construídos?

Para a resolução desta atividade solicitamos antecipadamente aos grupos que trouxessem cartolina, régua, compasso, transferidor, tesoura e fita adesiva. Com o uso destes materiais eles deveriam construir vários polígonos regulares de cada tipo (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, etc.) com 5 cm de lado; determinar as medidas de seus ângulos internos e recortá-los. Depois disto eles começaram a confeccionar poliedros unindo, aleatoriamente, com fita adesiva, os polígonos recortados, se preocupando apenas em fechar a figura.

Orientados pela professora cada grupo montou dois poliedros diferentes, alguns já conhecidos e outros um pouco estranhos. Após este trabalho, passamos à análise desses poliedros. Com a ajuda da professora eles constataram que para a formação de um vértice do poliedro, foi necessário reunir no mínimo três polígonos, pois com menos, não se conseguia fechar o vértice. Além disso, a soma dos ângulos das três faces concorrentes deveria ser inferior a 360º, ou seja, menor que uma circunferência.

Esta atividade permitiu ainda a constatação de que não havia nenhum poliedro formado exclusivamente por hexágonos regulares ou por polígonos regulares com mais de seis lados. A partir dessa informação, imediatamente alguém concluiu que tal fato estava relacionado às medidas dos ângulos internos destes polígonos.

Isso nos revelou que a experiência de unirem hexágonos ou outros polígonos com mais lados para formarem um vértice foi fundamental para a conclusão de que se a soma das medidas dos ângulos internos igualam ou ultrapassam 360º , a reunião dos polígonos constituem uma circunferência e, portanto, não formam uma "ponta" ou vértice.

Nesse momento, a professora retomou com os alunos, os conhecimentos obtidos até então e concluíram, que dos polígonos regulares, apenas os triângulos, os quadrados e os pentágonos poderiam se constituir em faces de poliedros.

Passaram então à construção de poliedros, iniciando com os compostos exclusivamente por triângulos eqüiláteros (cada vértice mede 60º) e concluíram que podem ser formados vértices com três triângulos (180º), com quatro (240º) ou mesmo com cinco triângulos por vértice (300º). Se fossem utilizados mais que cinco triângulos a soma se igualaria ou ultrapassaria 360º ou mais e, assim não constituiria um vértice.

Prosseguindo vértice a vértice em cada caso, construíram o tetraedro (4 faces), o octaedro (8 faces) e o icosaedro (20 faces), respectivamente. Entretanto, notaram também, que haviam poliedros constituídos por 6 e 10 triângulos eqüiláteros e nesse momento, foi necessário a intervenção da professora para mostrar que nesses casos, os vértices não eram compostos da mesma forma, isto é, nestes poliedros (de 6 e de 10 faces) todos os vértices não eram formados pelo mesmo número de faces, ou, dito de outro modo, de cada vértice partiam números diferentes de arestas e, por isso, eles, não eram poliedros regulares.

Seguindo, com quadrados, ficou constatado que não é possível reunir mais do que três por vértice (270º), pois com mais de três quadrados a soma dos ângulos internos atingiria ou ultrapassaria 360º e não formaria vértice. Construindo vértice a vértice, foi obtido o cubo ou hexaedro (6 faces).

Com pentágonos, a conclusão foi de que reunidos três por vértice (324º), obteriam um poliedro regular de 12 faces, o dodecaedro. Não seria possível reunir mais do que três pentágonos por vértice porque a soma dos ângulos internos igualaria ou ultrapassaria 360º.

Com isso, a conclusão final para esta atividade é que mesmo havendo polígonos regulares, com um número qualquer de lados, a partir de três, só é possível construir com eles cinco tipos de poliedros regulares, a saber: o **tetraedro** (4 faces), o **octaedro** (8 faces), o **icosaedro** (20 faces), o **cubo** ou **hexaedro** (6 faces) e o **dodecaedro** (12 faces), também conhecidos como **poliedros de Platão**.

Um poliedro convexo é chamado de poliedro de Platão quando suas faces são polígonos com o mesmo número de lados e de cada vértice do poliedro sai o mesmo número de arestas, são eles: tetraedro, cubo ou hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Ficaram conhecidos dessa forma**,** pelo fato de Platão ter construído suas teorias a respeito da origem do universo, associando a estes os constituintes fundamentais da natureza.

Compreendido o conceito de poliedro regular, passamos a um estudo mais aprofundado sobre poliedros e suas variações, planificando, verificando a veracidade da relação de Euler e calculando áreas, volumes e diagonais.

Um outro problema trabalhado foi um clássico extraído da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2° Grau do estado de São Paulo (1992; 400):

> Estão no canto do teto de uma sala em forma de bloco retangular de dimensões 6m (largura), 10m (comprimento) e 4m (altura), uma abelha e uma formiga. No canto oposto desta sala no chão, está um doce de leite. Supondo que essa abelha e essa formiga adorem doce de leite, achar o menor caminho que a abelha e a formiga procurarão fazer para atingirem o doce de leite.

Para a solução experimental do problema solicitamos aos alunos que trouxessem para a aula caixas em forma de bloco retangular, régua, lápis coloridos e tesoura.

De pronto, alguém diz que a abelha chega primeiro, pois ela pode voar. A professora precisou esclarecer que a pergunta não era quem chegava primeiro, mas, sim, qual o menor caminho a ser percorrido.

Como calcular essa distância?

Os alunos não conseguiram solucionar o problema, mesmo dispondo de um paralelepípedo construído em escala (6 cm de largura, 10 cm de comprimento e 4 cm de altura). Foi necessária a interferência da professora, que, mediante perguntas direcionadoras auxiliou os alunos a identificarem essa distância como sendo a diagonal do paralelepípedo reto retângulo, estudada anteriormente.

Genericamente, o cálculo da diagonal de um paralelepípedo desta forma será: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, na qual, a, b e c são as dimensões do paralelepípedo. Assim o caminho da abelha pode ser calculado por $\sqrt{6^2 + 10^2 + 4^2} \cong 12{,}33m$.

A obtenção do caminho de menor distância para a formiga passa pela única possibilidade que este inseto tem de caminhar pelas paredes da sala, faces do paralelepípedo, ou pelas arestas deste. De início alguns alunos propõem caminhos equivalentes, utilizando apenas as arestas do prisma ou uma aresta combinando com uma diagonal. Realizados esses cálculos, eles, não acostumados a buscarem mais de uma solução para uma questão, desistem de procurar outros caminhos, acreditando terem chegado ao final, ou seja, ao caminho mais curto.

As soluções às quais eles chegaram até aquele momento foram:

$C_1 \rightarrow 4m + 6m + 10m = 20m$ (soma das medidas das arestas)

$C_2 \rightarrow \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \cong 11{,}66 + 4 \cong 15{,}66m$ (soma da medida da diagonal do chão e da altura)

$C_3 \rightarrow \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} \cong 10{,}77 + 6 \cong 16{,}77m$ (soma da medida da diagonal da parede e da medida da aresta)

$C_4 \rightarrow \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \cong 7{,}21 + 10 \cong 17{,}21m$ (soma da medida da diagonal da parede e da medida da aresta)

Porém esses não são os caminhos de distâncias menores para a formiga. Foi preciso desafiá-los incentivando-os a procurar caminhos que passassem somente pelas faces, sem usar as arestas. A cada tentativa eles queriam desistir, mas a professora sempre insistia para que esgotassem todas as possibilidades. Assim, obtiveram mais esses resultados,

$C_5 \rightarrow \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} \cong 6{,}32m$ e $\sqrt{2^2+10^2} = \sqrt{104} \cong 10{,}20m \rightarrow 6{,}32m + 10{,}20m = 16{,}52m$

(ponto médio da altura pela parede).

$C_6 \rightarrow \sqrt{3^2+10^2} = \sqrt{109} \cong 10{,}44m$ e $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5m \rightarrow 10{,}44m + 5m = 15{,}44m$

(ponto médio da largura pelo teto).

$C_7 \rightarrow \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} \cong 7{,}81m$ e $\sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41} \cong 6{,}40m \rightarrow 7{,}81m + 6{,}40m = 14{,}21m$

(ponto médio do comprimento pelo teto).

$C_8 \rightarrow \sqrt{14^2+6^2} = \sqrt{232} \cong 15{,}23m$ (linha reta passando pela parede (4x6) e chão).

$C_9 \rightarrow \sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{200} \cong 14{,}14m$ (linha reta passando pela parede (10x4) e chão).

Após algumas discussões, os alunos chegaram à conclusão que o melhor caminho para a formiga é este último, ou seja, 14,14m que é aquele que constitui uma linha reta passando pela parede (10m x 4m) e pelo chão.

Neste ponto, fez-se necessário discutir, ainda, com os alunos, uma forma mais breve e genérica para obter o caminho de menor distância para a formiga, sem termos que passar toda vez por este extenso, porém rico, processo de discussão envolvendo Geometria e Álgebra integradamente.

Para apoiarmos a discussão do melhor caminho da formiga utilizamos genericamente planificações do paralelepípedo retângulo, pois a formiga só utiliza planos para se locomover.

Uma ação de professores, pesquisadores e cientistas que se utilizam de matemática no seu dia-a-dia, pode refletir uma característica dos seres humanos, que têm por objetivo buscar soluções ótimas para as questões que lhe são apresentadas.

Assim, passamos a generalizar este problema a partir de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c. Os melhores caminhos para a formiga são obtidos pela utilização do Teorema de Pitágoras em triângulos retângulos de catetos a e (b + c), b e (a + c) e c e (a + b). Assim sendo, as três soluções são x, y e z, a saber:

$$x = \sqrt{a^2+(b+c)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$$

$$y = \sqrt{b^2+(a+c)^2} = \sqrt{b^2+a^2+c^2+2ac}$$

$$z = \sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{c^2 + a^2 + b^2 + 2ab}$$

Todas essas soluções contêm uma parcela igual, dada por $a^2 + b^2 + c^2$ e diferem pelos produtos ab, bc ou ac. Tendo em vista a forma genérica de obtenção destas distâncias, podemos afirmar que a menor delas será definida pelo menor produto entre as dimensões do bloco retangular, quando efetuado duas a duas (o menor produto entre ab, ac e bc).

Como o menor produto entre duas dimensões desta sala é 4 x 6 = 24, então o caminho mínimo será percorrido pelas faces 4 x 10 e 6 x 10.

Buscando aprofundar os conceitos geométricos relacionados a esse problema foi proposto aos alunos que calculassem a medida do ângulo formado pelas duas faces (4 x 10 e 6 x 10) do triângulo que constitui o menor caminho para a formiga.

A princípio os alunos tiveram a impressão que a medida do ângulo era de 90°, observando que as duas faces eram perpendiculares entre si, porém, instruídos pela professora, eles construíram o triângulo com medidas proporcionais aos seus lados e com auxílio do transferidor obtiveram aproximadamente 120°, o que não confirmou suas suspeitas.

Conhecidas as medidas dos três lados do referido triângulo, restava calcular sua área. Para isto foi sugerida a fórmula de Heron, na qual os alunos se apoiaram e concluíram que:

$$S = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$$

na qual, a, b e c, são as medidas dos lados do triângulo e p o seu semiperímetro. Assim,

$$S = \sqrt{13,24.(13,24-12,33).(13,24-8,50).(13,24-5,66)}$$

$$S = \sqrt{13,24.0,91.4,74.7,58}$$

$$S = 20,80m^2$$

Uma vez compreendida a questão e formalizados os conceitos, passamos a resolver exercícios menos complexos que exigiam mais técnicas de resolução, porém menos raciocínio, visando a memorização de fórmulas e procedimentos matemáticos.

Aproveitando uma conversa entre duas alunas que comentavam a respeito de seus animais de estimação, na qual uma se queixava que o aquário de seu peixinho solitário havia caído e se quebrado, a professora, indagou sobre a forma do referido aquário. A princípio, ela não soube dizer o nome correto, mas após alguns segundos, o identificou, como sendo uma das figuras estudadas recentemente, mais precisamente, o prisma hexagonal.

Utilizando a mesma abordagem metodológica a professora propôs a seguinte questão: Consideremos dois aquários de vidro. Um tem a forma de um prisma hexagonal regular com 8 cm de aresta da base e $15\sqrt{3}$ cm de altura e o outro, tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são: 15 cm de comprimento, 14,4 cm de largura e 20 cm de altura. Compare seus volumes e a quantidade de vidro utilizada na fabricação de cada aquário.

Dessa vez, mais familiarizados com as fórmulas e técnicas de resolução, a compreensão ficou mais simples.

Iniciaram fazendo um esboço das figuras em seus cadernos e marcando as medidas nos respectivos lugares, de acordo com os dados do problema. Em seguida, começaram os cálculos pela área da base, pois já haviam interiorizado que para encontrar o volume de um prisma, bastava tomar a medida da área da base e multiplicar pela medida da altura.

Para o cálculo do volume do paralelepípedo reto-retângulo, basicamente não encontraram dificuldades. Já com o prisma hexagonal, não foi tão fácil mesmo tendo trabalhado com as figuras, ainda pairavam dúvidas sobre o cálculo da área do triângulo, eles sabiam sobre a viabilidade de dividir o hexágono em seis triângulos eqüiláteros, porém, confundiam a altura do hexágono com a altura do triângulo. Nesse momento, foi necessária a intervenção da professora, esclarecendo e diferenciando, o uso das fórmulas conhecidas para o cálculo da área dos diferentes tipos de triângulo.

Os cálculos apresentados ficaram assim:

Para o paralelepípedo reto-retângulo

A_b = c . l   (produto entre o comprimento e a largura da base)

A_b = 14,4 cm . 15 cm

A_b = 216 cm^2 (área da base)

V = A_b . h   (produto entre a área da base e a altura)

V = 216 cm^2 . 20 cm

V = 4320 cm^3 (volume)

Para o prisma hexagonal

$$A_b = 6.\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 6.\frac{8^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 6.\frac{64\sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = 96\sqrt{3}cm^2 \qquad \text{(área da base)}$$

$$V = A_b \,.\, h$$

$$V = 96\sqrt{3}cm^2 .15\sqrt{3}cm$$

$$V = 1440\sqrt{3^2}\,cm^3$$

$$V = 4320cm^3 \qquad (volume)$$

Logo que calcularam os volumes, ficaram surpresos ao perceberem a coincidência. Entretanto, eles não reconhecem a relação existente entre o volume encontrado, que aparece em cm^3, com o usado habitualmente, em litros. Surgiu então, uma grande curiosidade. A professora os conduziu a mais essa pesquisa, pois, no momento, havia ainda outra questão a ser resolvida.

Sem mais demora, passaram aos cálculos das áreas laterais e totais.

Do paralelepípedo:

A_l = 2.(14,4cm . 20cm) = 576 cm^2

2.(15 cm . 20 cm) = 600 cm^2

A_l = 1176 cm^2

Para o cálculo da área total, surgiu uma discussão entre eles. Uns diziam que tinha somente uma base porque o aquário é aberto, outros, afirmavam: mas ele tem tampa, portanto, são duas, como nos prismas. O impasse foi resolvido, considerando a tampa do aquário. Sendo assim:

$A_t = 2.A_b + A_l$

$A_t = 432\ cm^2 + 1176\ cm^2$

$A_t = 1608\ cm^2$

Do prisma hexagonal

$$A_l = 6\,.\,8\,cm\,.\,15\sqrt{3}\,cm$$

$$A_l = 720\sqrt{3}\,cm^2$$

$$A_t = 2\,.\,A_b + A_l$$

$$A_t = 192\sqrt{3}\,cm^2 + 720\sqrt{3}\,cm^2$$

$$A_t = 912\sqrt{3}\ \ cm^2$$

$$A_t \cong 1579{,}6\ \ cm^2$$

Após os cálculos, os resultados mostraram que mesmo com medidas e formatos diferentes, os prismas podem conter volumes iguais. No caso dos aquários, a diferença entre a quantidade de material utilizado na fabricação dos mesmos, foi insignificante. Todavia, numa fabricação em grande escala essa diferença se tornaria um fator decisivo na definição do lucro da empresa.

Restou-nos ainda, saciar a curiosidade dos alunos e estabelecer a relação existente entre o volume encontrado, em cm^3, com o usado habitualmente, em litros. Para isto, foi solicitado que os grupos confeccionassem antecipadamente uma caixa cúbica com aresta medindo 10 cm, sem a parte superior e pesquisassem o nome de um sólido com essa forma.

Todos os grupos confeccionaram a caixa, mas apenas um, dos seis, descobriram que o nome desse sólido era dm^3. Na sala, a professora revestiu essa caixinha, de papelão, com um saquinho plástico e usando um copo graduado pode mostrar que 1 dm^3 equivale a 1 litro. Depois disso, foi só usar a regra de três e determinar as outras unidades.

Poderíamos aprofundar ainda mais nesta questão, explorando proporcionalidade, questões financeiras, entre outras, pois um dos objetivos da metodologia aqui adotada, é esgotar todas as possibilidades de abstração de idéias numa situação dada, visando desenvolver ao máximo a capacidade de produção do aluno.

CONCLUSÃO

A proposta de abordar a Geometria Espacial (Sólidos Geométricos – Poliedros) mediante a tendência didático-pedagógica de Resolução de Problemas, sugerida nas Diretrizes Curriculares do Paraná é uma maneira ousada de se trabalhar, uma vez que exige do professor um maior preparo tanto em relação ao conhecimento específico, como em sua criatividade para propor as questões de maneira atrativa e instigante, de forma a motivar o aluno na busca de todas as soluções possíveis. Por outro lado, os alunos estão um tanto acomodados, têm preguiça de pensar, querem tudo pronto, talvez por nossa própria culpa.

Afinal, somos nós, professores, que os conduzimos a este ponto, com nossa concepção pedagógica de que ensinar consiste em explicar, em mostrar o que se pretende e aprender significa ser capaz de repetir, o mais fielmente possível aquilo que explicamos. Acostumados a essa forma de proceder, os alunos tendem a ficar esperando pela explicação, pela apresentação da solução pelo professor. Esta foi a principal dificuldade encontrada na implementação desta proposta, pois o aluno não tem o conhecimento prévio necessário para a resolução das atividades e com isto, o tempo previsto, não foi suficiente, entretanto, o resultado foi muito gratificante.

Compete a nós, professores, resgatarmos a autoconfiança e a auto-estima dos nossos alunos, para que juntos, possamos assegurar a criação de um ambiente de maior comunicação em sala de aula, a qual permitirá maior participação do aluno na elaboração de seu conhecimento.

Acreditamos que esta metodologia de ensino possa contribuir de forma especial para uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6028**: Informação e documentação - Resumo – Apresentação. Rio de janeiro, 2003.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática:** 1ª a 5ª séries. São Paulo: Ática, 1997.

DANTE, L. R. **Matemática:** ensino médio: livro do professor. volume único. São Paulo: Ática, 2008.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa:** ensino médio: livro do professor. São Paulo: FTD, 2005.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. BORBA M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação, Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2006.

PARANÁ. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**. Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RUBIÓ, A. P.; FREITAS, L. M. T. **Matemática** e suas tecnologias: ensino médio: livro do professor. São Paulo: IBEP, 2005.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 2º Grau**. 3.ed. São Paulo: SE/CENP, 1992.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. **Matemática** aula por aula: ensino médio: livro do professor. São Paulo: FTD, 2005.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática:** ensino médio: livro do professor. São Paulo: Saraiva, 2005.